

E. E. STAFF - M. I. T.

CIRCUITOS MAGNÉTICOS Y TRANSFORMADORES

*ESTUDIO AMPLIO DE LAS CARACTERÍSTICAS FÍSICAS DE LOS
CIRCUITOS MAGNÉTICOS Y DE SU APLICACIÓN AL CÁLCULO
Y DISEÑO DE LOS MISMOS Y DE LOS TRANSFORMADORES*



EDITORIAL REVERTÉ

Propósito

El equipo del Departamento de Ingeniería Eléctrica del Massachusetts Institute of Technology inició hace algunos años la tarea de revisar su presentación de los principios tecnológicos fundamentales de ingeniería eléctrica. Este volumen es uno más de la serie que contiene esta presentación ya revisada.

La decisión de emprender un plan tan extenso en lugar de ir añadiendo parches surgió de la creencia de que el gran equipo del Departamento, con sus diversos intereses en la enseñanza y en la investigación anexa, podría realizar una nueva síntesis de material educativo en el campo de la ingeniería eléctrica y presentar una serie de textos con una amplitud de miras que no podría tener, fácilmente, un autor que trabajara solo.

Se creyó que una serie tan extensa estaría exenta de las repeticiones y desequilibrios tan frecuentes en las series de libros no conjuntadas. Debería tener una uniformidad y una amplitud resultante de la organización de un tema en conjunto. Debería atraer al estudiante de preparación ordinaria y proporcionar una profundidad y un rigor que fueran un desafío para el estudiante excepcional y aceptables para el escolar adelantado. Debería contener un curso fundamental adecuado para todos los estudiantes de ingeniería eléctrica, independientemente de su especialidad final. Debería estar restringida al material de importancia fundamental para todas las ramas de la ingeniería eléctrica y conducir, de una manera natural, a cualquier otra rama.

Este libro y el programa reorganizado de enseñanza del cual ha salido son, pues, los productos de un proyecto mayor de investigación para la mejora de los métodos de enseñanza. El hecho de que este libro y sus compañeros sean el resultado de un empeño de colaboración que lleva consigo sustancialmente a todo el equipo del Departamento de Ingeniería Eléctrica del Instituto y que esta colaboración se haya llevado a cabo con entusiasmo mantenido, es el más alentador testimonio de la devoción de cada colaborador a su amplio objetivo de una mejor instrucción. Para aquellos de nosotros que han observado el progreso de la tarea desde fuera, esta demostración de unidad y *esprit de corps* de una parte de un gran equipo será, quizá, el aspecto más impresionante del esfuerzo total.

KARL T. COMPTON

Propiedades de los materiales ferromagnéticos

La mejor manera de darse una idea del valor de un objeto cualquiera consiste en imaginar qué ocurriría si dicho objeto desapareciera. Si el hierro y el acero de la maquinaria dinamo-eléctrica, de los transformadores de potencia y de audiofrecuencia, de los receptores telefónicos, relés, altavoces y centenares de otros dispositivos electromagnéticos perdiera repentinamente sus propiedades magnéticas, los dispositivos mencionados ya no podrían funcionar adecuadamente. Resulta difícil imaginar cómo podrían realizarse nuevos diseños, sin estos materiales, que fueran de un tamaño y costo no excesivos. Evidentemente, toda sustancia en la que aparezca una gran inducción magnética, al aplicarle un campo magnético determinado o que haga posible constreñir el flujo a caminos convenientes bien definidos, será siempre de valor inestimable para el diseñador. Estas propiedades se encuentran en ciertas formas del hierro y sus aleaciones con cobalto, wolframio, níquel, aluminio y otros metales. A dichas formas del hierro y a las aleaciones a que se ha hecho referencia se les da el nombre de *materiales ferromagnéticos*. Por ser de fácil imanación, al emplear dichas sustancias para núcleos de aparatos se hace posible la obtención de inducciones magnéticas cientos e incluso miles de veces mayores que las que se obtendrían con una bobina sin núcleo ferromagnético.

Parte I

CIRCUITOS MAGNETICOS

1. IMPORTANCIA DE LOS MATERIALES FERROMAGNÉTICOS

La importancia comercial de los materiales ferromagnéticos nos la indican los miles de toneladas producidas anualmente y la gran variedad de propiedades físicas y magnéticas. Se dispone en el mercado de muy diversas formas de dichos materiales, tales como chapas desde pocas centésimas de milímetro hasta de medio milímetro, hilos de diámetros comprendidos entre los mismos límites, barras de secciones de diversas formas y piezas de fundición cuyo peso puede variar desde algunos gramos hasta cientos de toneladas.

Los campos de aplicación de estos materiales, que se estudian brevemente en el apartado 6, son tan vastos y los requisitos de cada aplicación tan diferentes que los ingenieros, físicos y metalúrgicos se han visto obligados a desarrollar gran cantidad de aleaciones ferromagnéticas, cada una de las cuales tiene cualidades especiales precisas para aplicaciones específicas. Difícilmente pueden supervalorarse estos logros y muchos de los desarrollos recientes en materia de técnica del diseño de maquinaria eléctrica se han debido a poder disponer de materiales mejores obtenidos gracias a la investigación metalúrgica, y porque el ingeniero ha utilizado las propiedades físicas y magnéticas para mejorar el aprovechamiento. Insistiendo en esto, indicaremos que los fenómenos electromagnéticos fundamentales en un generador moderno de 165.000 kVA son los mismos que en el generador bipolar de Edison de 5 kW construido hace poco más de medio siglo. El aumento de capacidad y el gran rendimiento logrado en el funcionamiento de las máquinas potentes se deben en gran parte a las mejoras de las propiedades magnéticas y de otras propiedades

físicas de los aceros y a una mejor comprensión de estas propiedades por parte de los ingenieros.

La utilización técnica de los dispositivos eléctricos que contienen materiales ferromagnéticos precisa la descripción cuantitativa de los parámetros de circuito que representan el comportamiento de estos dispositivos en el circuito eléctrico. En presencia de materiales ferromagnéticos, un elemento de circuito eléctrico tiene un parámetro de resistencia que no solamente depende de la intensidad de la corriente que circula por el circuito, sino también de la manera en que varía. El parámetro de inductancia no solamente no es lineal, sino que ni siquiera es función uniforme de la intensidad de la corriente. Si además varía con el tiempo podrá apreciarse fácilmente la dificultad de describirlo exactamente.

Antes de realizar ningún estudio cuantitativo se deberá disponer de datos cuantitativos relativos a las propiedades de los materiales ferromagnéticos y deberá comprenderse bien en qué forma hay que utilizar dichos datos para llegar a la meta deseada. La mayor parte de este capítulo se dedicará, pues, a estudiar las propiedades de los materiales ferromagnéticos de principal interés para el ingeniero electricista. Se consignan muchos datos cuantitativos que constituyen la base para la solución de los problemas de circuitos magnéticos a tratar en los capítulos posteriores. A fin de proporcionar una ayuda a la mejor comprensión de los fenómenos que intervienen, en el próximo apartado se describe una teoría del magnetismo.

2. TEORÍA DEL MAGNETISMO¹

El deseo de explicar los fenómenos del magnetismo y aumentar el conocimiento de muchas de las propiedades no lineales observadas en los materiales magnéticos ha dado lugar a varios intentos de construir una teoría del magnetismo. Uno de los primeros en intentarlo fue AMPÈRE, quien sugirió hace cien años que la imanación de una sustancia se debe a la orientación de moléculas que contienen corrientes eléctricas. Aun cuando la idea de AMPÈRE era demasiado vaga para ser útil, salvo desde un punto de vista filosófico, resultó tan sorprendentemente próxima a la realidad que constituye la introducción a la teoría actual desarrollada durante los últimos años hasta el extremo de poder explicar cualitativamente gran número de efectos observados e incluso, algunos de ellos, cuantitativamente. No obstante, a pesar de estos adelantos, el desarrollo de la teoría se halla aún muy atrasado frente a las últimas mejoras de las propiedades magnéticas de los materiales empleados en la industria. Estas mejoras se han logrado casi exclusivamente mediante investigaciones empíricas y solamente en los últimos años se ha desarrollado la teoría hasta el punto de poder servir como guía útil para la experimentación. Daremos aquí tan sólo los enunciados cualitativos más breves de la teoría actual, que en sus detalles contiene muchos aspectos de las modernas teorías atómica y cuántica.

Considerando el comportamiento magnético de las muestras de materiales de acuerdo con los conceptos actuales del magnetismo es preciso admitir varias subdivisiones diferentes de la materia. Las menores partículas que intervendrán serán las componentes del átomo; es decir, el núcleo y los electrones a él asociados. El

¹ El tema objeto de este artículo se ha tomado en gran parte del artículo excelentemente resumido de R. M. BOZORTH: «Present Status of Ferromagnetic Theory», *A. I. E. E., Trans.*, 54 (1935), 1251-1261.

tamaño inmediato superior es el de los átomos. Mayores que los átomos son los dominios, que son partículas subcristalinas, de forma y tamaño variable, de volumen del orden de 10^{-9} cm³ y que cada uno contiene unos 10^{15} átomos. Un cristal contiene un número de dominios que puede variar entre límites muy amplios y las muestras de materiales magnéticos suelen contener, salvo en casos muy especiales, muchos cristales.

2a. *Electrones y núcleos.* Se cree que el magnetismo es fundamentalmente eléctrico. Cuando una carga eléctrica q se mueve con velocidad u , se crea un campo magnético según indica la figura 1, en la que u indica la dirección del movimiento y P indica el punto en el que hay que determinar H . Si la carga es positiva y si el vector velocidad y el punto P están en el plano del papel, H será perpendicular al plano del papel y estará dirigido en el sentido de alejarse del lector, siendo su módulo

$$H = \frac{qu}{r^2} \sin \theta \quad (1)$$

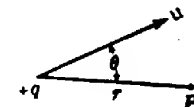


FIG. 1. La carga móvil + q crea un campo magnético en el espacio que la rodea.

En el átomo, los electrones se mueven en torno al núcleo más pesado y al mismo tiempo cada electrón, así como el núcleo, gira en torno a un eje propio. Un electrón giratorio o un núcleo giratorio tienen un momento de la cantidad de movimiento (momento cinético) definido y un momento magnético también definido. En el electrón, estos momentos son de sentidos opuestos y en el núcleo, de igual sentido. Un electrón en un átomo tiene, además de los momentos debidos a su giro en torno a su eje, un momento cinético y un momento magnético debidos a su movimiento en la órbita. El momento magnético total de un átomo es la suma vectorial de todos sus momentos magnéticos componentes.

2b. *El átomo.* Uno de los modelos atómicos² más útiles concebidos por los físicos consiste en un núcleo giratorio compuesto de neutrones y protones, rodeado por números definidos de electrones giratorios que realizan, además, ciertos movimientos orbitales. El átomo más sencillo es el del hidrógeno, que tiene por núcleo un protón y un solo electrón orbital. El átomo en conjunto tiene un momento magnético compuesto de tres partes —el momento magnético de la carga positiva que gira en torno a su eje, el de la carga negativa al girar en torno a su eje y el creado por la carga negativa al moverse en su órbita. El momento magnético asociado a los movimientos orbital y de rotación del electrón son de un orden de magnitud mil veces mayor que el momento magnético del protón giratorio. Por tanto, será difícil detectar, en experimentos con átomos de hidrógeno, el efecto magnético del núcleo a menos que se puedan neutralizar de cierto modo los momentos magnéticos del electrón. Esta neutralización tiene lugar en la molécula de hidrógeno porque, en la combinación de los dos átomos, las rotaciones de los dos electrones son de sentidos contrarios al igual que los movimientos orbitales. Como era de esperar, los giros de los dos protones son también de sentido contrario en algunas moléculas (parahidrógeno), mientras que en las otras (ortohidrógeno) los giros de los protones son del mismo sentido. En condiciones ordinarias, las tres cuartas partes de las moléculas son del tipo orto.

² K. K. DARROW, «Spinning Atoms and Spinning Electrons» *B. S. T. J.*, 16 (1937), 319-336.

³ L. B. LOEB, *Atomic Structure* (New York: John Wiley & Sons, 1938).

Según lo anterior, el parahidrógeno no debería tener momento magnético resultante y en cambio la experiencia pone de manifiesto la presencia de un momento magnético del mismo orden de magnitud que el del ortohidrógeno, si bien algo menor. La explicación es que las cargas giratorias tienen un movimiento de precesión en torno al campo magnético aplicado. El estudio de esta precesión indica que, independientemente del sentido del movimiento orbital o del de rotación, el movimiento de precesión de todas las cargas es tal que crea un campo de sentido opuesto al aplicado. En la molécula de parahidrógeno, por tanto, el único efecto magnético resultante será este debilitamiento del campo debido a los momentos magnéticos de precesión. Este efecto se conoce con el nombre de *diamagnetismo*. El ortohidrógeno tiene, además de este efecto, un momento de rotación nuclear algo mayor.

Cuando de una molécula de hidrógeno se arranca un electrón, resulta un ion hidrógeno simplemente cargado. En este caso se destruye la neutralización de los momentos magnéticos orbital y de rotación y el ion tiende a orientar sus momentos magnéticos orbital y de rotación en la dirección y sentido del campo magnético aplicado. A esta intensificación del campo se le da el nombre de *paramagnetismo*. Tanto las sustancias diamagnéticas como las paramagnéticas pierden su efecto magnético al suprimir el campo exterior: las diamagnéticas porque las precesiones en torno a una dirección fija cesan al suprimir el campo, y las paramagnéticas porque, sin campo externo, los momentos magnéticos se orientan de tal modo, según se demuestra por consideraciones cuánticas, que su suma es nula. Los átomos de los gases nobles son diamagnéticos y por tanto lo serán también ciertos iones tales como Na^+ , Mg^{++} y Cl^- . La mayoría de átomos e iones son paramagnéticos.

Las propiedades de las sustancias ferromagnéticas no vienen determinadas enteramente por sus átomos, pero lo anteriormente visto indica que el átomo de cromo

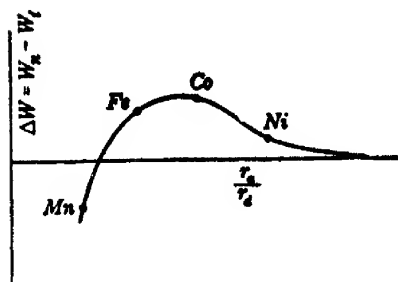


FIG. 2. Para las sustancias ferromagnéticas, la energía potencial de la red cristalina es menor al estar imanadas que al no estarlo.

con seis electrones de giro positivo en exceso, el átomo de hierro con cuatro y el cobalto con tres pueden ser buenos elementos constitutivos de un cuerpo con buenas propiedades magnéticas. Sin embargo, cuando estos átomos se agrupan formando estructuras cristalinas, las orientaciones de los giros son tales que el cromo es no ferromagnético, mientras el hierro, cobalto, níquel y ciertas aleaciones son muy ferromagnéticos. La característica determinante⁴ es la orientación de los átomos en la estructura cristalina.

Si es tal que dé un momento magnético resultante, el material es ferromagnético. Si es tal que la suma vectorial de los momentos magnéticos es nula, el material es no ferromagnético.

Las orientaciones, a su vez, dependen de si la

cociente entre la separación entre átomos r_a y el radio r_d de la órbita que contiene los electrones en exceso de giro positivo. Cuando ΔW es positivo, el estado de imanación es el estable, porque es el estado de menor energía potencial. Cuando ΔW es negativo, el estado estable es el de no imanación. Así el hierro, el cobalto y el níquel son ferromagnéticos, pero no el manganeso.

2c. *El dominio*. El paralelismo de los momentos magnéticos atómicos en la estructura cristalina se extiende a un volumen limitado pero más bien indefinido del cristal ferromagnético. La razón de esta limitación no se conoce por completo, pero en el apartado próximo se citan evidencias experimentales que demuestran que, incluso cuando un cristal no esté imanado en conjunto, existen en él regiones diminutas próximas entre sí llamadas *dominios* que están totalmente imanadas. Sin embargo, cada una de estas regiones tiene su momento magnético en una dirección diferente y la resultante de todos ellos, extendida a todo el cristal, es nula.

► Toda sustancia constituida por estos dominios saturados e imanados espontáneamente se dice que posee *ferromagnetismo*. ◀

En la estructura cristalina interior a un dominio, los átomos se hallan distribuidos de una manera ordenada definida. En el cristal de hierro⁵, por ejemplo, los átomos se hallan situados en los vértices y centro de un cubo, tal como se indica en la figura 3. A esta distribución se le da el nombre de *red cúbica centrada*. El agrupamiento en un cristal de níquel difiere de éste en que tiene un átomo en el centro de cada cara,

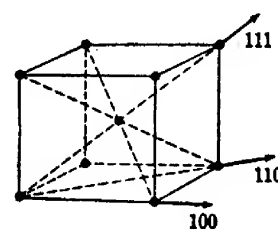


FIG. 3. Red cristalina cúbica centrada del hierro.

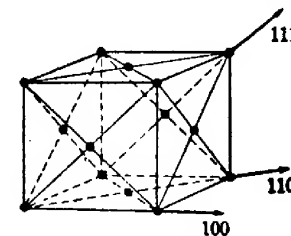


FIG. 4. Red cristalina de caras centradas del níquel.

pero no en el centro del cubo (fig. 4). Recibe el nombre de *red cúbica de caras centradas*. Un dominio de un cristal de hierro, en ausencia de campo magnético exterior, tiene sus momentos atómicos orientados todos en una misma dirección y sentido, siendo dicha dirección la de una de las aristas de la red cúbica. A esto se llama *dirección* o *eje 100*. Una diagonal de una cara representa una dirección 110. Una diagonal del cubo representa una dirección 111 y es la que toman los momentos magnéticos atómicos del dominio del níquel.

2d. *El cristal*. Para estudiar el comportamiento de un monocristal se han preparado muestras suficientemente grandes para poder comprobar sus propiedades magnéticas en el laboratorio. Al aplicar campos magnéticos exteriores a un cristal de hierro a lo largo del eje 100, la inducción magnética intrínseca^{*} β alcanza un valor estacionario para un valor pequeño del campo externo H , según puede verse en la figura 5. Esto se explica suponiendo que en el estado de no imanación, los

⁴ W. SHOCKLEY, «The Quantum Physics of Solids —I», *B. S. T. J.*, 18 (1939), 645-723.

⁵ R. M. BOZORTH, «The Physical Basis of Ferromagnetism» *B. S. T. J.*, 19 (1940), 1-39.

^{*} La inducción magnética intrínseca se define en la pág. 23.

dominios se hallan orientados en forma desordenada según los seis sentidos privilegiados en el cristal, según se indica en la figura 6a. Cuando se aplica un campo magnético en uno de estos sentidos, los dominios cuyos momentos magnéticos tienen uno de los otros cinco sentidos cambian su orientación, de manera que sus momentos magnéticos queden dirigidos según el campo aplicado, según se indica en la figura 6b. Este eje 100 recibe el nombre de dirección de imanación fácil. Si se aplica el campo según la diagonal de la cara 110, cuatro de los seis momentos magnéticos se orientan, primeramente, según las dos direcciones que tienen componentes según 110 y luego, al aumentar el campo, los momentos de todos los dominios van orientándose gradualmente en la dirección del campo. La dirección 110 es, para el cristal de hierro, la dirección de imanación mediana. Por último,

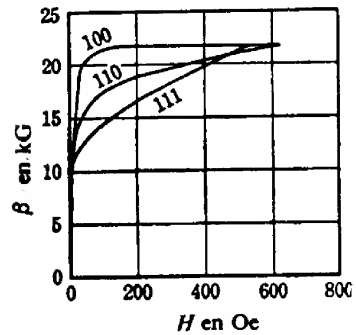


FIG. 5. Curvas de imanación de un cristal de hierro en las direcciones 100, 110 y 111. (De la nota de pie de página de la referencia 1.)

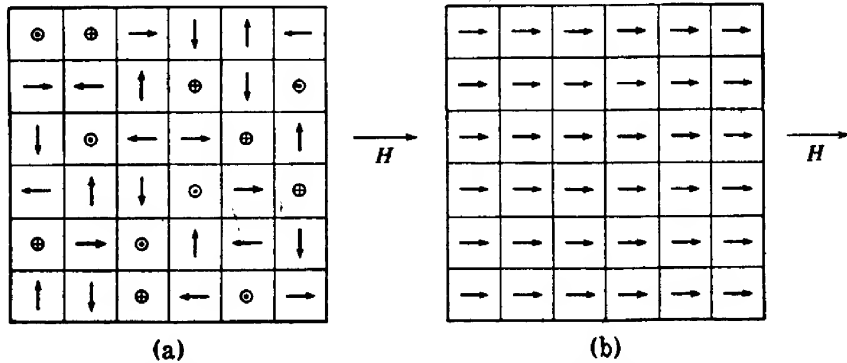


FIG. 6. (a) Dominios cuyos momentos magnéticos están orientados según los seis sentidos 100 en un cristal de hierro no imanado; (b) en el mismo sentido 100 cuando el cristal está totalmente imanado en un sentido 100.

si se aplica el campo en la dirección 111 de la diagonal del cubo, tres de los momentos magnéticos se orientarán según las tres direcciones que tienen componentes según 111 y un ulterior incremento del campo orienta a todos los momentos en la dirección 111, conocida como dirección de imanación difícil. En la figura 7 pueden verse las curvas correspondientes del níquel.

La presencia de los dominios queda claramente puesta de manifiesto en las fotografías realizadas por W. C. ELMORE, que constituyen la figura 8. Las tres partes representan tres exposiciones de la misma parte de la superficie de un cristal de cobalto en tres condiciones diferentes de campo exterior.

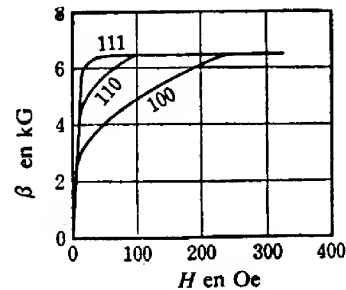


FIG. 7. Curvas de imanación de un cristal de níquel en las direcciones 100, 110 y 111. (De la nota de pie de página de la referencia 1.)

En la figura 8a, el cristal está imanado por acción de un campo exterior; en la figura 8b se ha desimanado el cristal y en la figura 8c se ha invertido el sentido del campo. Se cree que las imágenes se deben a la acción de los dominios imanados sobre una suspensión coloidal de óxido de hierro colocada sobre la superficie del cristal y observada al microscopio. Tales ordenaciones de las partículas de hierro no tienen nunca lugar en las sustancias ferromagnéticas, sino que se deben a los dominios imanados espontáneamente en la superficie de un cristal de hierro o cobalto, aun cuando el cristal, en conjunto, no esté imanado.

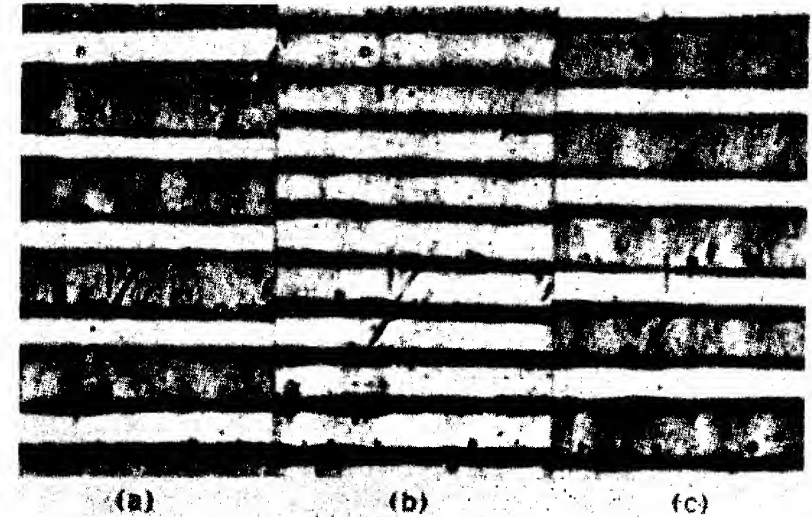


FIG. 8. Figuras de polvo sobre una superficie plana paralela a la dirección de imanación fácil de un cristal de cobalto, a) imanado hacia el lector, b) desimanado, c) imanado en el sentido de alejamiento del lector.

2e. *Sustancias policristalinas.* Una muestra policristalina de hierro o de aleación magnética está compuesta de muchos cristales rígidamente unidos, pero sin orientación definida de sus ejes. Cuando no hay campo exterior aplicado, cada dominio de dichos materiales se imana totalmente en forma espontánea en una cualquiera de sus direcciones 100. Los momentos magnéticos de los dominios de cada cristal se distribuyen por igual, según los seis sentidos de imanación fácil, con lo que el cristal se hallará desimanado. La orientación desordenada de los cristales origina una distribución desordenada de los momentos magnéticos en todo el cristal.

Se cree que la aplicación de un campo magnético exterior agranda, en primer lugar, a los dominios cuyos momentos magnéticos están orientados según el campo aplicado y reduce el tamaño de los dominios adyacentes cuyos momentos magnéticos están orientados en direcciones menos favorables. El efecto del supuesto engrandecimiento de los dominios sobre el estado magnético del material, según puede observarse exteriormente, es muy pequeño y solamente predomina en el caso de campos aplicados muy pequeños.

Al aumentar el campo aplicado hasta alcanzar valores que no sean ya demasiado pequeños, aparece un segundo efecto, en el cual los momentos magnéticos de los dominios se orientan en la dirección del eje privilegiado del cristal más próximo a la dirección del campo aplicado. Este efecto tiene lugar, no por reorientación del dominio como un cuerpo rígido, sino por reorientación de los ejes de giro de los electrones interiores al dominio que pasan de una dirección estable a otra también estable. En todo el interior de un dominio, esta reorientación de los giros tiene lugar simultáneamente. Al ir aumentando el campo desde valores muy pe-

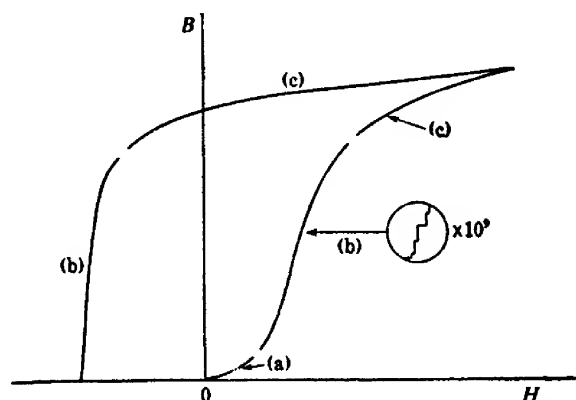


FIG. 9. Las tres regiones de imanación: a) desplazamiento del límite; b) cambio brusco de orientación; y c) cambio lento de orientación. (De la nota de pie de página de la referencia 1).

queños, la inducción magnética B crece por saltos finitos, según puede observarse experimentalmente, correspondiendo cada salto a la reorientación de los giros de un dominio. Este crecimiento por escalones se conoce con el nombre de *efecto Barkhausen* y se ilustra en la porción de curva ampliada de la figura 9. Naturalmente, estos escalones no aparecerán en una curva dibujada a partir de datos experimentales, pero el hecho de que la variación de imanación se produce a saltos puede observarse por medio de un altavoz conectado a una bobina arrollada sobre la muestra, según se indica en la figura 10. Cada reorientación de un dominio hace variar el flujo a través de la bobina captora y origina un «clic» en el altavoz.

Debido al gran número de aristas cristalinas no paralelas a la dirección del campo aplicado, aparece un tercer efecto al aplicar exteriormente campos magnéticos mayores que los requeridos para orientar los momentos de los dominios según las aristas cristalinas más próximas, en dirección, al campo aplicado. Este último modo de imanación consiste en una orientación suave de todos los momentos de los dominios que pasan de una orientación paralela a las aristas cristalinas a otra paralela al campo aplicado. Entre las regiones (b) y (c) de la curva no existe ninguna demarcación neta, si bien los saltos bruscos se hacen menos frecuentes al aproximarnos a la saturación.

Los fenómenos anteriores pueden resumirse brevemente de la manera siguiente: Cuando se aplica un campo magnético gradualmente creciente, pero débil, a una masa de hierro inicialmente desimanada, el primer modo de imanación que predomina se debe al ligero aumento de tamaño de los dominios imanados en la direc-

ción más próximamente paralela al campo aplicado, a expensas del tamaño de los dominios vecinos. Se origina una leve imanación y el aumento tiene lugar en forma suave. La parte de la curva de imanación en la cual ocurre este fenómeno, está marcada con (a) en la figura 9. Al aumentar más el campo magnético, predomina un segundo modo de imanación originado por las orientaciones bruscas de los gru-

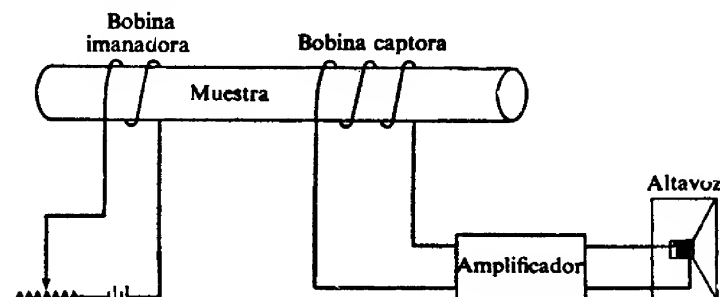


FIG. 10. Circuito para la demostración del efecto Barkhausen.

pos de electrones giratorios, al orientarse según los ejes del cristal más próximamente paralelos al campo aplicado. La región en la que se presentan principalmente estos fenómenos es la marcada con (b) en la figura 9. Para campos magnéticos más intensos que aquellos para los cuales se produce un efecto Barkhausen pronunciado, predomina el modo final de imanación. Este modo se describe como una rotación lenta de la orientación de los dominios hacia la dirección del campo y separándose de los ejes cristalinos más próximamente paralelos al campo aplicado. La región para la cual este es el modo que se presenta principalmente, está marcada con (c) en la figura 9. El primero y último modos llevan consigo una variación mucho menor de la inducción magnética para una variación dada del campo magnético que el segundo modo. Durante el último, el hierro se va saturando magnéticamente y cuando se orientan todos los momentos de los dominios según el campo aplicado, el material se halla totalmente imanado.

Los materiales ferromagnéticos pueden imanarse hasta inducciones magnéticas intrínsecas comprendidas entre 5 000 y 25 000 gauss, tienen permeabilidades relativas del orden de centenares o millares, presentan un efecto de saturación pronunciado y conservan parte de su imanación al suprimir el campo exterior. Las sustancias paramagnéticas tienen permeabilidades relativas muy poco superiores a la unidad y pierden toda su imanación al suprimir el campo exterior. Las sustancias diamagnéticas responden también muy débilmente a la imanación, pero sus permeabilidades relativas son menores que la unidad.

De igual modo que el cristal de cromo no es magnético a pesar de que su átomo tenga seis electrones de giro positivo no compensados, la estructura cristalina del hierro aleado con otros metales puede no tener propiedades magnéticas pronunciadas. Suelen encontrarse aleaciones de esta clase entre los aceros al manganeso e inoxidables. Específicamente, una aleación que comprenda un 0,3 % de carbono, 10 % de manganeso, 6,5 % de níquel y el resto hierro es esencialmente no magnética a la temperatura ambiente. No obstante, es curioso que ciertas aleaciones conocidas con el nombre de aleaciones Heusler formadas por materiales esencial-

mente no magnéticos, presentan propiedades magnéticas muy acusadas. La más fuertemente magnética de estas aleaciones contiene aproximadamente un 65 % de cobre, un 20 % de manganeso y 15 % de aluminio. Las mejores muestras pueden imanarse casi tan fácilmente como el hierro de baja calidad. Aún cuando no han hallado, hasta ahora, aplicación industrial extensa, tienen propiedades interesantísimas por lo que respecta al desarrollo de teorías del magnetismo.

Las anteriores observaciones referentes a los fenómenos de imanación se aplican principalmente a monocristales ferromagnéticos y a conjuntos isótropos de dichos cristales sin deformar. Una muestra de hierro que contenga muchos cristales orientados de cualquier manera y exenta de deformaciones tiene propiedades que son un promedio de las imanaciones en todas las direcciones de un monocristal. Sin embargo, los materiales ferromagnéticos policristalinos utilizados en ingeniería no están, frecuentemente, exentos de deformaciones ni son isótropos; es decir, sus ejes cristalinos no están siempre distribuidos por igual en todas direcciones. La chapa de acero laminado constituye un buen ejemplo de estas condiciones y frecuentemente presenta propiedades magnéticas muy diferentes para las distintas direcciones de imanación.

La cuestión de las deformaciones está estrechamente relacionada con ciertos aspectos de la teoría del ferromagnetismo. Por ejemplo, las fuerzas magnéticas en un cristal debidas a los giros de los electrones están equilibradas por las fuerzas eléctricas debidas a la carga de los electrones. Al volverse a ordenar los vectores magnéticos, se perturba el equilibrio entre las fuerzas eléctricas y magnéticas. En consecuencia, se observará una variación de las dimensiones físicas del material. Este fenómeno no es sino uno de los muchos efectos relacionados con deformaciones mecánicas o magnéticas y que reciben, colectivamente, el nombre de *magnetostricción*. Las propiedades magnetostrictivas del hierro son opuestas a las del níquel. El efecto de la tensión mecánica sobre el hierro es incrementar la imanación para un campo magnético dado, mientras el efecto de la compresión es debilitarla. En el caso del níquel, el efecto de la tensión es debilitar la imanación para un campo magnético dado, mientras el efecto de la compresión es intensificarla. En el caso del hierro, la longitud del material crece al aumentar la imanación (magnetostricción positiva), mientras en el caso del níquel disminuye la longitud (magnetostricción negativa). Los valores límites de la magnetostricción se presentan simultáneamente con la saturación magnética del material. En la curva de la figura 11, pueden verse las propiedades de la magnetostricción de saturación de las aleaciones hierro-níquel conocidas por el nombre de Permalloy.

Las deformaciones de un material se producen de varias maneras, tales como trabajándolo en frío, por la presencia de impurezas en el material que dan origen a una deformación de la estructura cristalina (deformación química), o por magnetostricción (deformación residual o latente). Cuando se desea la permanencia de la imanación, las grandes deformaciones internas serán convenientes, pues cuanto mayor sea la deformación, tanto más estable es la dirección de imanación del dominio. Esta condición se cumple en los imanes permanentes, los cuales presentan frecuentemente dureza magnética simultáneamente con la dureza física típica de los metales con gran deformación interna.

Por otra parte, cuando se desee facilidad de imanación —es decir, cuando un material deba tener gran permeabilidad— convendrá un efecto magnetostrictivo

interno despreciable. Estas condiciones quedan bien ilustradas en los datos de la figura 11, ya que las aleaciones níquel-hierro de pequeña magnetostricción presentan gran permeabilidad. En realidad, la mayor permeabilidad relativa obtenida hasta ahora, es de 600.000 aproximadamente y se logra calentando a 1.400 °C en hidrógeno durante 18 horas una aleación de 65 % de níquel y 35 % de hierro para eliminar las impurezas no metálicas y aligerar la deformación química y luego

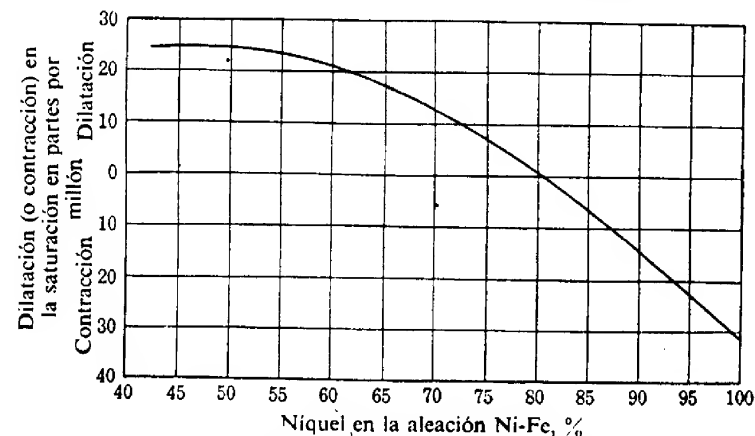


FIG. 11. Magnetostricción de saturación de las aleaciones níquel-hierro. (De la nota de pie de página de la referencia 1.)

durante una hora a 650 °C enfriándola, por último, en hidrógeno, bajo la acción de un campo magnético de 16 oersted. Con este tratamiento parecen orientarse las direcciones de las deformaciones magnetostrictivas (deformación latente o residual), de manera que los ejes de imanación fácil tienen la dirección del campo aplicado.

3. PROPIEDADES GENERALES DE LOS MATERIALES MAGNÉTICOS .

Actualmente, el ámbito de la teoría del magnetismo es insuficiente para permitir la predicción de las propiedades magnéticas de los materiales a partir de consideraciones puramente teóricas, aun conociendo con toda precisión la composición del material. Esta insuficiencia de la teoría no constituye un gran inconveniente, ya que aunque fuera posible tal predicción, el proceso que ella entrañase no sería suficientemente sencillo para tener utilidad. El proceso que suele seguirse para determinar las propiedades de las aleaciones magnéticas, consiste en efectuar medidas de cada una de las propiedades, sobre muestras de cada clase de material fabricado. Frecuentemente, se hacen algunas pruebas en molino, sobre muestras sacadas de cada lote al irlos fabricando. Los datos obtenidos se utilizan entonces para trazar curvas características del material en cuestión. Por último, cuando se fabrica el material en diversas formas para destinarlo a elementos constitutivos de un dispositivo determinado, el funcionamiento del dispositivo o sus parámetros como elemento de circuito se suelen poder calcular a partir de dichas curvas características con precisión suficiente para la mayoría de las cuestiones técnicas.

Los materiales ferromagnéticos se caracterizan por uno o varios de los siguientes atributos:

- a) Pueden imanarse mucho más fácilmente que los demás materiales. Esta característica viene indicada por una gran permeabilidad relativa μ/μ_0 .
- b) Tienen una inducción magnética intrínseca máxima $\beta_{máx}$ muy elevada.
- c) Se imanar con una facilidad muy diferente según sea el valor del campo magnético. Este atributo lleva a una relación no lineal entre los módulos B de la inducción magnética y H del campo magnético.
- d) Un aumento del campo magnético les origina una variación de flujo diferente de la variación que originaría una disminución igual de campo magnético. Este atributo indica que las relaciones que expresan la inducción magnética y la permeabilidad μ como funciones del campo magnético, no son lineales ni uniformes.
- e) Conservan la imanación cuando se suprime el campo magnético.
- f) Tienden a oponerse a la inversión del sentido de la imanación una vez imantados.

La importancia de algunas de estas características en las aplicaciones particulares de los materiales magnéticos depende de las circunstancias que concurren en cada aplicación.

De entre los materiales de que se dispone, el hierro es el más utilizado. Su permeabilidad es grande y su costo por unidad de peso es el más bajo de todos los materiales ferromagnéticos disponibles. En su forma comercialmente pura, se emplea frecuentemente en las estructuras de muchas máquinas. También se emplea como elemento básico en casi todas las aleaciones ferromagnéticas. La aleación producida en mayor cantidad es, probablemente, la compuesta por hierro esencialmente puro con un 1-4 % de silicio, dependiendo este porcentaje del fin a que se destine el material. Dando a esta aleación un tratamiento térmico adecuado, se obtiene un material que, comparado con el hierro, tiene mejores propiedades magnéticas para campos magnéticos débiles y una resistividad mayor. Según se verá más adelante, estas dos propiedades son muy convenientes. Esta aleación se lamina en chapas y flejes, principalmente de espesores comprendidos entre 0,35 y 0,635 mm, recocidos; en el lenguaje corriente se conocen con el nombre de chapa o fleje de acero al silicio. La chapa es muy conveniente para troquelarla en diversas formas utilizadas en la construcción de aparatos electromagnéticos. En la figura 12 pueden verse varias de estas formas.

Los aceros al silicio en chapa utilizados en la industria eléctrica, se conocen entre los fabricantes de acero ^{6,7} y los diseñadores de aparatos eléctricos, por nombres descriptivos.

Las chapas del tipo de campo contienen entre $\frac{1}{4}$ y 1 % de silicio y tienen una resistividad de unos $16\mu\Omega\text{-cm}$. Este tipo se emplea para motorcitos baratos.

Las chapas del tipo de inducido contienen entre $\frac{1}{2}$ y 1 % de silicio y tienen una resistividad de unos $19\mu\Omega\text{-cm}$. Este acero es relativamente blando y, por tal razón, fácil de troquelar. Se emplea para piezas polares e inducidos de motores

Carnegie-Illinois Steel Corporation, Pittsburgh, Pa., *Electrical Steel Sheets; Technical Bulletin N° 2* (1941).

⁷ Allegheny Steel Co., Brackenridge, Pa., *Magnetic Core Materials Practice* (1937).

y generadores pequeños y en otros dispositivos en los que se precisan fuertes inducciones magnéticas, sin ser de gran importancia las pérdidas en el núcleo.

Las chapas del tipo eléctrico contienen alrededor de un 1 % de silicio y tienen una resistividad de unos $26\mu\Omega\text{-cm}$. Este tipo se emplea mucho en motores y gene-

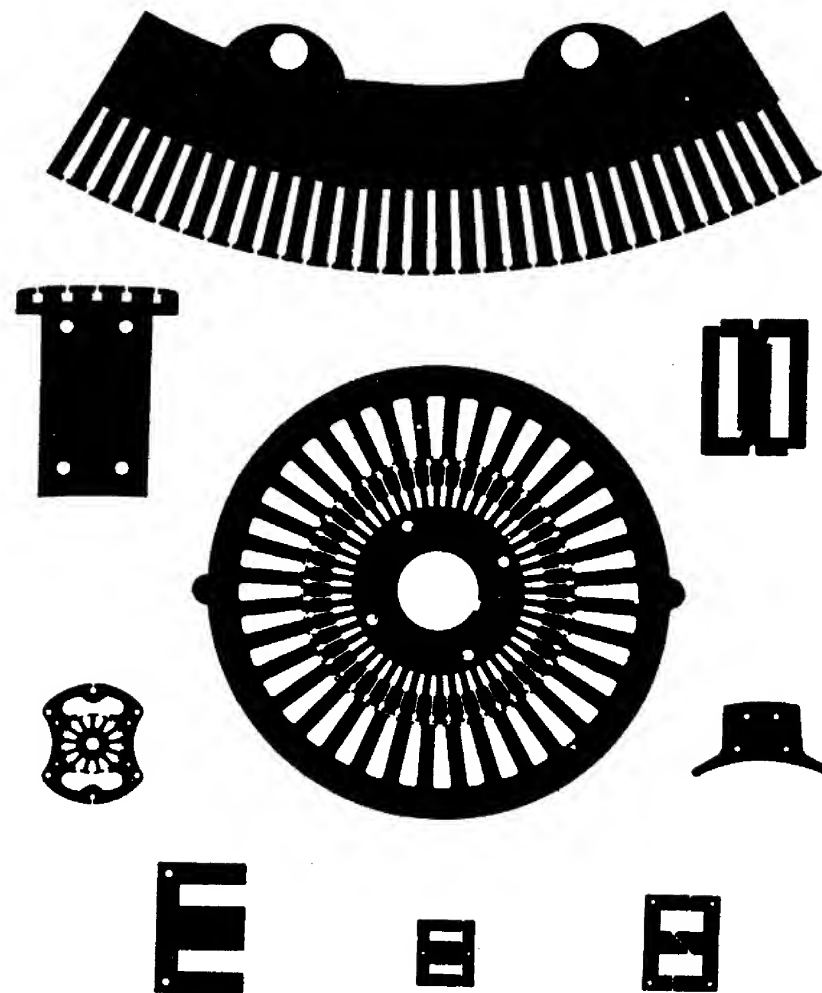


FIG. 12. Formas corrientes de chapa troquelada. (Cortesía de Carnegie-Illinois Steel Corp.)

radores industriales de tamaño no demasiado grande y rendimiento mediano y en transformadores, relés y otros dispositivos de trabajo intermitente.

Las chapas del tipo de motor contienen un 2,5 % de silicio y tienen una resistividad de unos $42\mu\Omega\text{-cm}$. Este material se emplea en motores y generadores media-

nos de buen rendimiento, en aparatos de mando y en transformadores de radio baratos.

Las chapas del tipo de dinamo contienen un 3,5 % de silicio y tienen una resistividad de unos $50\mu\Omega\text{-cm}$. Este tipo se emplea en generadores y motores de gran rendimiento, en transformadores de distribución pequeños y en transformadores de radio.

Se dispone de varios tipos de transformador designándose los principales con los números 72 (radio C), 65 (radio B), 58 (radio A) y 52. Los números son las pérdidas en el núcleo de chapas de la galga 29 en centésimas de watt por libra a 60 Hz obtenidas por el ensayo standard Epstein que se describe en el capítulo V. El contenido de silicio aumenta al disminuir las pérdidas. Estas chapas se emplean principalmente para transformadores de potencia y de radio y para motores, generadores y condensadores síncronos de gran rendimiento.

Debido a la gran cantidad de aleaciones ferromagnéticas de que se dispone en la actualidad, resulta imposible citar las propiedades de todas, siendo preciso reducirse a unas pocas. En el apartado 6 se estudian ciertas propiedades de un grupo seleccionado entre las aleaciones más corrientes y algunos de sus campos de aplicación; pero, antes de tener estas cuestiones en consideración, habrá que estudiar en forma más completa las propiedades de las curvas de imanación de los materiales ferromagnéticos ordinarios al aplicarles un campo magnético continuo.

4. CARACTERÍSTICAS Y CURVAS DE IMANACIÓN DE LOS MATERIALES MAGNÉTICOS

La relación entre el campo magnético H y la inducción magnética B que crea en un material ferromagnético reviste una importancia extraordinaria en la utilización técnica del material. Es preferible expresarla mediante curvas características^{8,9}. A efectos de explicación, el material ferromagnético se considera situado en una región en la que se pueda variar la intensidad del campo magnético. Un dispositivo posible¹⁰ consiste en un anillo toroidal del material sobre el cual se devana un hilo en la forma indicada en la figura 13a. Se varía el campo magnético variando la intensidad de la corriente que circula por el devanado. El material se halla desimantado inicialmente. Si se mide la inducción magnética B por un método apropiado en función del campo magnético H para valores de H crecientes hasta un máximo $+H_{\text{máx}}$ y se representa gráficamente la relación, se obtiene una curva análoga a la oab de la figura 13a. A esta curva se le da el nombre de curva de primera imanación. Si se disminuye ahora H , se halla otra relación entre B y H tal como la representada por la curva bc que queda por encima de la curva de primera imanación. Al anular H queda una inducción magnética representada por oc en la gráfica. A esta inducción magnética se le da el nombre de magnetismo remanente o remanencia. Para anular la inducción magnética, es preciso aplicar en sentido contrario al del campo magnético aplicado inicialmente, un campo magnético od . A este campo

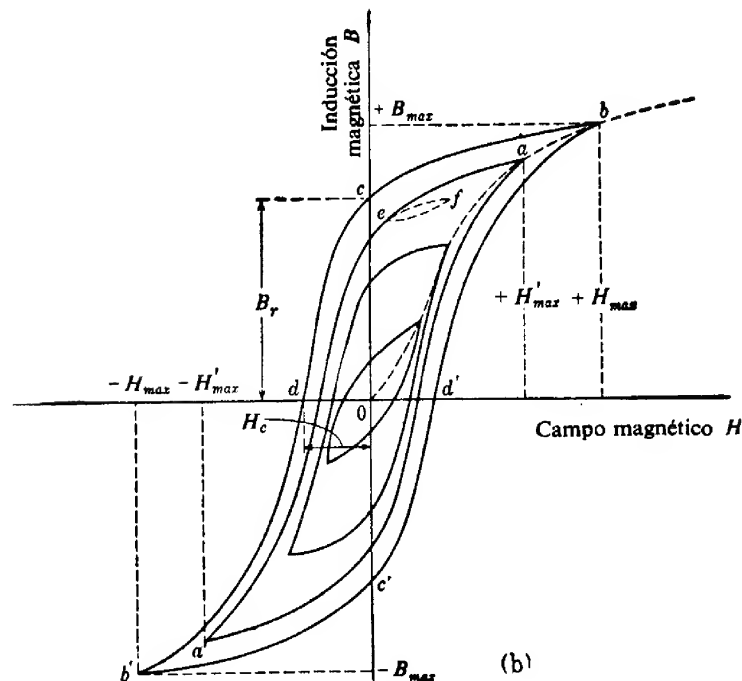
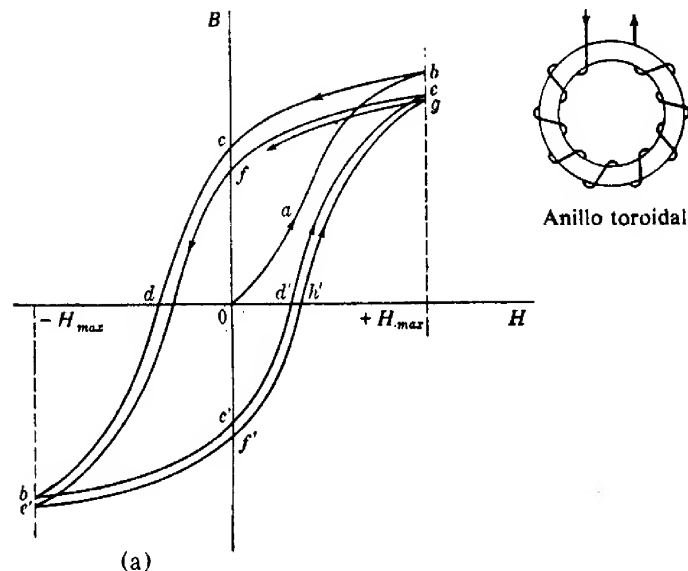


FIG. 13. a) Curvas $B(H)$ para una muestra inicialmente desimantada. b) Ciclos de histeresis.

⁸ F. BITTER, *Introduction to Ferromagnetism* (New York: Mc Graw-Hill Book Co., Inc., 1937).

⁹ Carnegie-Illinois Steel Corporation, Pittsburgh, Pa., *Electrical Steel Sheets, Technical Bulletin* N.º 2 (1941).

¹⁰ THOMAS SPOONER, *Properties and Testing of Magnetic Materials* (New York, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1927), cap. xv y xvii.

se le da, para ciertas condiciones de imanación que se verán más adelante, el nombre de *campo coercitivo*.

Haciendo H más negativo hasta que alcance el valor $-H_{\max}$, la relación entre B y H sigue la curva db' . Si se aumenta luego H desde $-H_{\max}$ hasta $+H_{\max}$ pasando por cero, la curva sigue el camino $b'c'd'e'$. El punto e difiere muy poco del b y el camino no forma aún un lazo cerrado. Si se hace variar H siguiendo otro ciclo entre los mismos límites de H , la relación entre B y H sigue el camino $efe'f'h'$ hasta g . Al seguir haciendo variar H según ciclos idénticos adicionales, el camino tiende a una curva fija. Por último, tras muchos ciclos, la curva se convierte en un lazo cerrado, según puede verse en la figura 13b. Si los valores positivos y negativos de H_{\max} son iguales, el lazo es simétrico respecto al origen. El acero se halla entonces en su condición de imanación simétrica cíclica, llamada abreviadamente *condición cíclica*, para el valor numérico particular de H_{\max} .

Ya se ha dicho que los valores de B de la rama descendente de la curva son mayores que los de la rama ascendente. Luego, el material tiene la propiedad de tender a oponerse a la variación de inducción magnética. A esta propiedad se le da el nombre de *histeresis*, término que viene a significar *retraso*. El lazo cerrado obtenido cuando el campo magnético va tomando todos los valores correspondientes a un ciclo cerrado, recibe el nombre de *ciclo de histeresis*. Aun cuando la palabra histeresis implica un retraso temporal, el fenómeno de la histeresis no depende del tiempo, sino solamente de que el campo magnético está creciendo o disminuyendo. Si en un instante cualquiera se eleva el campo magnético a un nuevo valor y el material magnético no está sometido a vibraciones, la inducción magnética no sube ni baja aparentemente de su valor inicial. El fenómeno de la histeresis se traduce en una disipación de energía, conocida con el nombre de *pérdida por histeresis*, en el interior del material cuando se consideran variaciones cíclicas del campo magnético. En el capítulo V se explican las diferencias entre las pérdidas por histeresis y los anteriores fenómenos de histeresis.

Si el material magnético está sometido a un ciclo que contenga valores menores de H y B , como el limitado por H'_{\max} y $-H'_{\max}$, se obtiene un ciclo de histeresis menor tal como el $aa'a$ de la figura 13b. Si el campo magnético no varía en un sentido continuamente entre los valores máximos de H , se introducen pequeños lazos internos. Si, por ejemplo, tras descender del punto a (fig. 13b), al e en el que H es igual a H_c , se incrementa H hasta el valor H_f y luego se vuelve al valor H_c , se introduce en la curva el lazo ef .

Al comparar las propiedades de diferentes materiales magnéticos, algunas de ellas se designan con nombres especiales. Las de mayor interés en esta parte del estudio son: a) el magnetismo remanente, b) la inducción residual, c) la retentividad, d) el campo coercitivo, y e) la coercitividad. Las definiciones ordinariamente aceptadas¹¹ de estos términos, son las siguientes:

a) *Magnetismo remanente* es la inducción magnética que queda en un material magnético después de suprimir un campo magnético aplicado.

b) *Inducción residual* B_r , en un material magnético es el valor de la inducción magnética para la condición de campo magnético aplicado nulo, cuando el material

¹¹ Estas definiciones concuerdan sustancialmente con las definiciones de la American Society for Testing Materials, normas A 34.

se halla en la condición de imanación simétrica cíclica. Se diferencia del *magnetismo remanente* en el requisito de la condición cíclica.

c) *Retentividad* es la inducción magnética que queda en el material después de suprimir un campo magnético suficiente para crear la inducción de saturación.

d) *Campo coercitivo* H_c de un material magnético es la magnitud del campo magnético para la cual se anula la inducción magnética cuando el material se imana en condición simétrica cíclica.

e) *Coercitividad* es el campo coercitivo requerido para anular la inducción magnética partiendo de una condición correspondiente a la inducción de saturación.

El estudio anterior indica que la inducción magnética asociada a un campo magnético dado no tiene un solo valor. Puede tener un valor cualquiera comprendido entre ciertos límites, el cual depende de la historia del material. En muchos problemas magnéticos, se desconoce la historia del material. La imanación existente puede haber sido originada por un aumento del campo magnético desde un valor muy bajo hasta el valor en cuestión, o por una disminución a partir de un valor elevado. Muchos cálculos magnéticos se realizarán, por tanto, utilizando la curva de imanación llamada *curva de imanación normal*, que se obtiene trazando una sola curva que pase por los puntos angulosos de una serie de ciclos de histeresis cada vez mayores. En la figura 13b puede verse dicha curva marcada con las letras *oab*.

En la figura 14a puede verse un ciclo de histeresis correspondiente a una chapa de galga 24 de acero eléctrico. Las coordenadas están en uem; es decir, el campo magnético viene dado en oersted y la inducción magnética en gauss. La curva de la figura 14a muestra la relación entre B y H para una inducción máxima de 10 000 G, que es la inducción a la cual se comparan los ciclos de histeresis, la inducción residual B_r , y el campo coercitivo H_c de las chapas de acero eléctrico, según las normas de la American Society for Testing Material. En la figura 14a puede verse que el valor de B_{r10} para la chapa de acero eléctrico resulta de 8 100 G y el valor de H_{c10} de 0,7 Oe. En la figura 14b puede verse una curva de imanación normal del mismo acero al que hace referencia la figura 14a. Las coordenadas de esta curva también se expresan en uem. Esta calidad de material no se satura hasta que B se aproxima a los 20 500 G según indica la curva de inducción magnética *intrínseca* β . La inducción magnética intrínseca β es igual a B menos $\mu_0 H$ y constituye una medida de aquella parte de la inducción magnética atribuible a la característica ferromagnética del material. Cuando el material se satura, ya no puede contribuir más a la inducción magnética; luego al elevar H por encima de los valores que saturan el material, la pendiente de la curva $B(H)$ se iguala a la permeabilidad del vacío μ_0 y β se hace constante. En la mayoría de materiales ferromagnéticos, la diferencia entre la *inducción magnética normal* B y la *inducción magnética intrínseca* β es despreciable hasta estar próximas las condiciones de saturación.

La *permeabilidad estática* μ del material, viene definida por la relación

$$\mu = \frac{B}{H}, \quad (2)$$

en la cual B es la inducción magnética total y H el campo magnético, estando relacionadas B y H por la curva de imanación. En otras palabras, la permeabilidad está-

tica (que no hay que confundir con la permeabilidad dinámica o incremental que se define en el capítulo VI) en un punto cualquiera de la curva de imanación es la pendiente (gauss/oersted) de una recta trazada del origen al punto de la curva de ima-

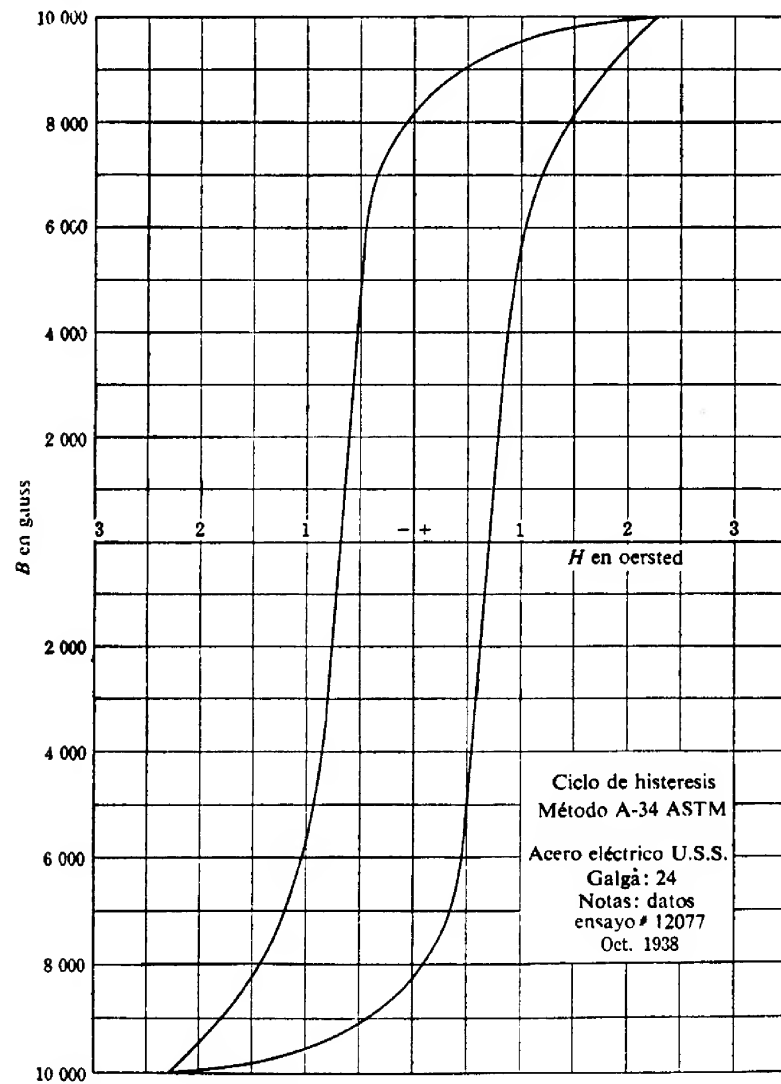


FIG. 14a. Ciclo de histeresis. (Cortesía de Carnegie-Illinois Steel Corp.)

nación normal. En la figura 14b puede verse una curva representativa de la permeabilidad estática en función del campo magnético H . La permeabilidad estática y su recíproco, llamada *reluctividad*, son útiles a veces, si bien en la mayoría de trabajos

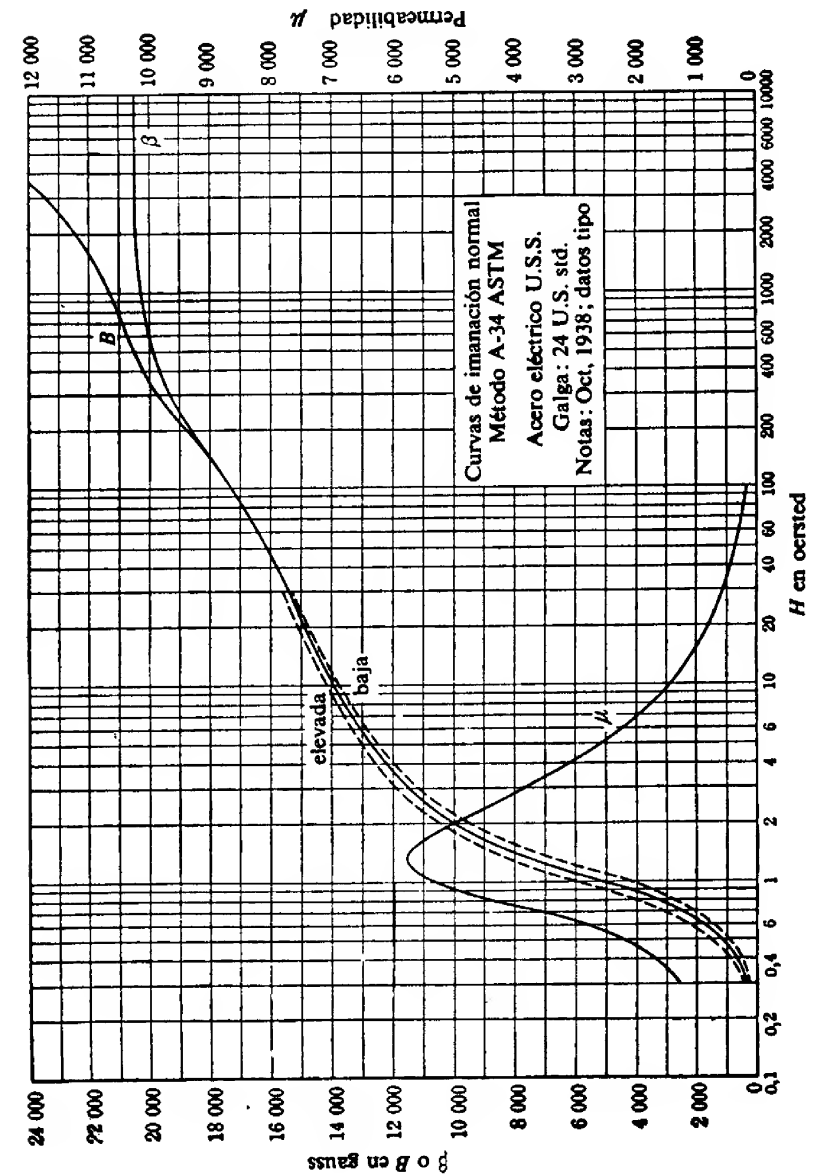


Fig. 14b. Curvas de inducción magnética y permeabilidad. (Cortesía de Carnegie-Illinois Steel Corp.)

Fig. 15a. Curvas de imanación normal en c. c. para diversos materiales magnéticos.

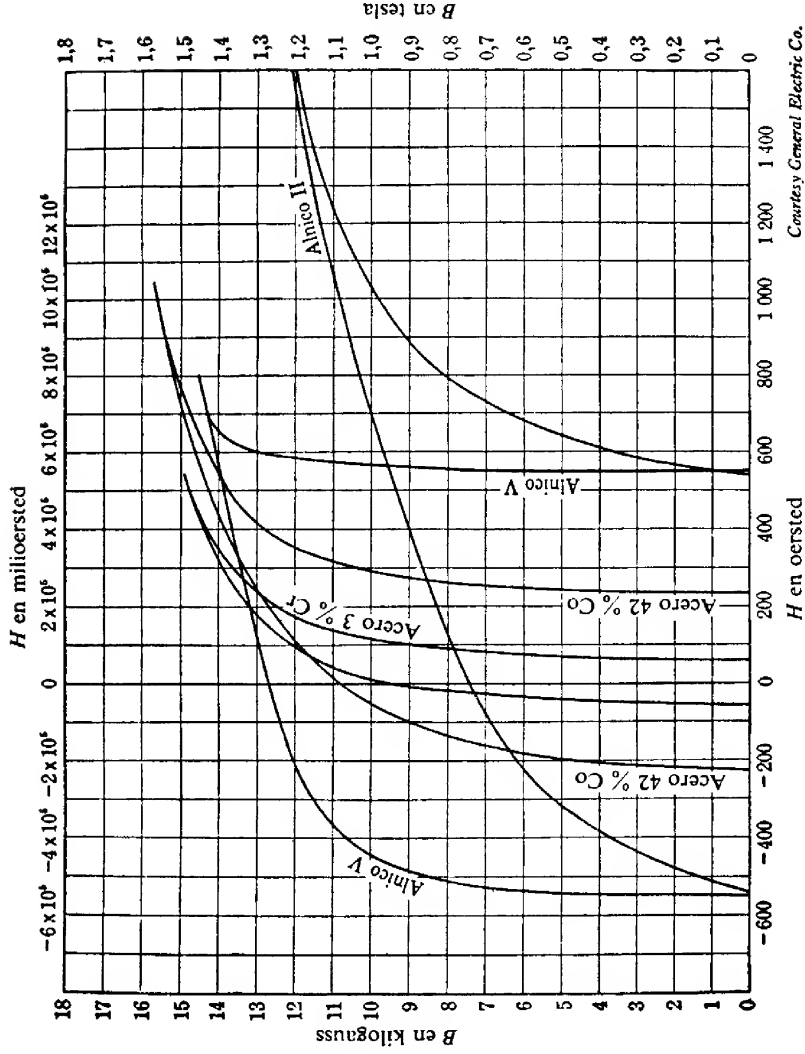


Fig. 15b. Cycles de histéresis de materiales para imanes permanentes.

TABLA I. PROPIEDADES REPRESENTATIVAS DE LOS MATERIALES FERROMAGNÉTICOS *

Materiales magnéticamente blandos	Elementos	Composición	Saturación intrínseca	Inducción residual B_r	Campo coercitivo H_c	Permeabilidad máxima	Permeabilidad inicial	Costo
Hierro magnético (Purificado en H)	Fe, Si, Al	99,98	21,5	13,6	0,05	275,	25,	centavos de dólar/libra
Sensuist.	Fe, Si, Al	85; 9,5; 5,5	10,0	5,0	0,05	120,	30,	7
Permalloy 78,5	Ni, Fe, Mn	78,5; 20,9; 0,6	10,7	6,0	0,05	105,	9,	3
Hipernik.	Fe, Ni	50; 50	15,0	7,5	0,06	90,	6,	28
Mumetal	Ni, Fe, Cu, Mn	74; 20; 5; 1	8,5	6,0	0,05	80,	7,	18
Mo-Permalloy 4-79	Ni, Fe, Mo, Mn	79; 16,4; 4; 0,6	8,5	5,0	0,05	72,	22,	27
Acero rico en silicio	Fe, Si	95,5; 4,5	19,0	5,0*	0,5*	8,3	0,750	32
Acero pobre en silicio	Fe, Si	99; 1	21,0	8,5*	0,7*	5,2	0,350	8
Permendur	Fe, Co	50; 50	24,5	14,0	2,0	5,0	0,800	7
Perminvar 7-70	Ni, Fe, Co, Mn	70; 22,4; 7; 0,6	12,5†	2,4†	0,6†	4,0†	0,850	69
Perminvar 45-25	Ni, Fe, Co, Mn	45; 29,4; 25; 0,6	15,5†	3,3†	1,4†	1,8†	0,365	35
Conpernik	Fe, Ni	50; 50	15,0	1,0	0,175	50
Acero de fundición	Fe, C	20,0	5,0*	1,0	0,175	18
Fundición de hierro recocida	Fe	16,0	5,5	11,0*	0,3	0,125	1
Mo-Permalloy 12,5-80	Ni, Mo, Fe	80; 12,5; 7,5 (Pierde sus propiedades magnéticas a 40°C)	40

* B_r y H_c a partir de $B_{max} = 10$ kG en lugar de a partir de la saturación. † Estas son las condiciones en las cuales es útil el Perminvar. Véase pág. 30

Materiales magnéticamente duros	Elementos	Composición	Retentividad	Coercitividad	$(BH)_{max}$	Costo
Fundición de Alnico V.	Fe, Co, Ni, Al, Cu	51; 24; 14; 8; 3	12,5	550	$4,5 \times 10^6$	56
Metal Honda.	Fe, Co, Ni, Ti, Al	45; 27; 18; 6,7; 3,3	7,1	780	2,0	53
Fundición de Alnico II.	Fe, Ni, Co, Al, Cu	54,5; 17; 12,5; 10; 6	7,2	540	1,6	26
Fundición de Alnico I.	Fe, Ni, Al, Co	63; 20; 12; 5	7,3	430	1,4	17
Metal Mishima.	Fe, Ni, Al	58; 29; 13	6,0	550	1,4	14
Remalloy.	Fe, Mo, Co	71; 17; 12	10,5	250	1,1	33
Acero al cobalto.	Fe, Co, C	64; 35; 1	9,5	260	1,05	62
Acero al wolframio.	Fe, W, C	93; 6; 1	10,0	80	0,34	9
Acero al cromo.	Fe, Cr, C, Mn	96; 3; 1; 0,4	9,7	65	0,30	1

+ Los datos de la tabla I, se han tomado principalmente de la referencia 12, pág. 26.

totalmente mediante una diferencia en el tratamiento térmico a que se somete el material. Los Perminvares mantienen una permeabilidad μ_i prácticamente constante si no se iman por encima de 1 000 G. La imanación por encima de este valor destruye la propiedad de permeabilidad constante, que solamente podrá restablecerse mediante un ulterior tratamiento térmico. De entre las características tabuladas, la inducción magnética intrínseca máxima es la menos sometida a variación. Depende, principalmente, del tanto por ciento de material ferromagnético presente en la aleación. El grado de variación al que están sometidas las otras características crece con el orden, la inducción residual, el campo coercitivo y la permeabilidad.

De las curvas de las figuras 15a y 15b y de los datos de la tabla I, puede deducirse cuál es el material más adecuado, desde el punto de vista magnético, para un fin determinado. El que pueda emplearse el material dependerá, naturalmente, de otros muchos factores tales como disponibilidad, costo, resistencia mecánica y maquinabilidad. Las características de los materiales magnéticos sometidos a campos alternos se estudian en el capítulo V. Se pueden obtener datos magnéticos adicionales de los materiales magnéticos, de los fabricantes y de la literatura existente.

5. PRUEBAS MAGNÉTICAS

La curva de imanación normal y una familia de ciclos de histeresis de un material magnético, dan la información necesaria para la solución de los problemas que lleven consigo el empleo del material en aplicaciones de corriente continua. A fin

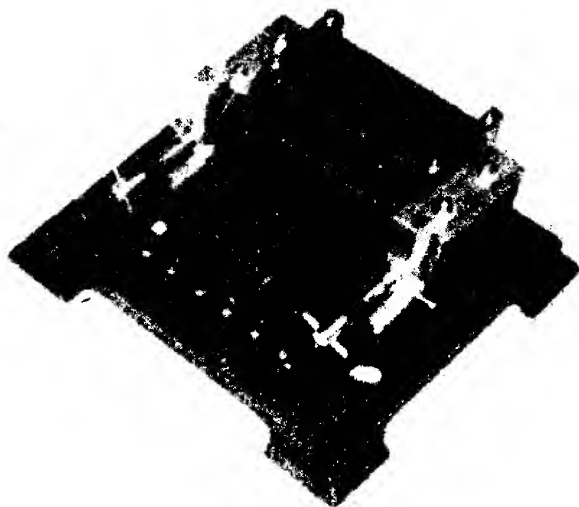


FIG. 16a. Permeámetro Fahy simplex. (Cortesía de Mr. Frank P. Fahy.)

de obtener experimentalmente estas curvas, se precisará un permeámetro¹⁴ en el que pueda ensayarse una muestra del material.

Describiremos, de entre los múltiples tipos de permeámetro, los más corrientemente utilizados. Estos son el permeámetro *Fahy simplex* que da muy buena precisión para campos magnéticos de hasta 300 Oe y con un adaptador hasta 1 000 Oe, y el permeámetro para *H elevado* que permite un dominio que llega hasta los 5 000 Oe.

En la figura 16a puede verse el permeámetro Fahy simplex que en la figura 16b aparece representado esquemáticamente en relación con su equipo asociado. El circuito indicado es algo más sencillo que el verdadero utilizado en el laboratorio, ya que el objeto que nos proponemos es poner de relieve el método de comprobación y no desmenuzar la técnica de manipulación. En primer lugar se calibra el galvanómetro balístico, ajustando sus resistencias R_S , R_B y R_H de manera que la variación de una cantidad conveniente de inducción magnética en la bobina B o la variación de una cantidad determinada de campo magnético en la bobina H dé origen en el galvanómetro balístico a una desviación de una división de la escala. Este calibrado exige el empleo de una inducción mutua patrón no señalada en el esquema.

La muestra S que se ensaya, se fija entre los postes de hierro macizo P y los extremos de un yugo laminado de hierro Y , constituyendo un circuito magnético en el cual el flujo está creado por la fuerza magnetomotriz del devanado M . La corriente que circula por este devanado está suministrada por un generador de corriente continua y su intensidad se puede ajustar mediante una resistencia varia-

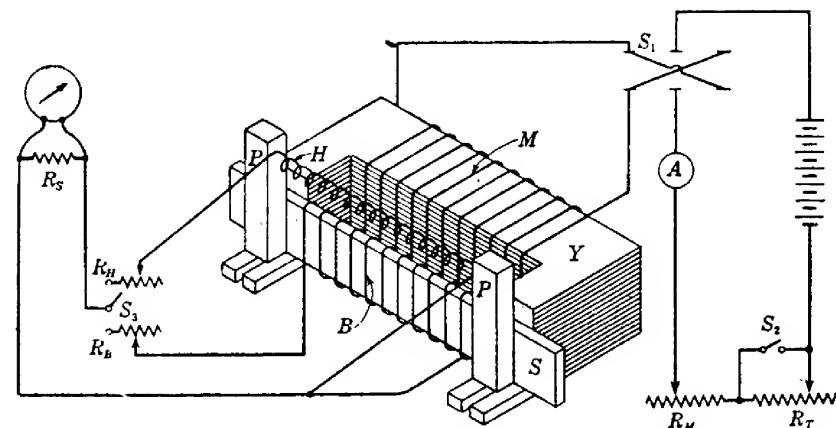


FIG. 16b. Esquema de conexiones del permeámetro Fahy.

ble R_M . Se cierra el interruptor S_2 cuando se está trazando la curva de imanación y el interruptor S_1 sirve para invertir el sentido de la corriente por la bobina. La bobina H es un solenoide con núcleo de aire de muchas espiras de hilo fino que proporciona el medio de medir la diferencia de potencial magnético entre los postes P . Esta diferencia de potencial magnético, dividida por la distancia entre los postes es el campo magnético H en la muestra.

Antes de tomar datos para la curva $B(H)$ normal, se desimana la muestra y,

¹⁴ R. L. SANFORD, «Magnetic Testings», *Circ. Nat. Bur. Stand.* C415 (1937).

con el interruptor S_2 cerrado, se coloca el reostato R_M en la posición correspondiente al punto más bajo de la curva. El interruptor S_1 se coloca en una cualquiera de las posiciones de cierre y se deja abierto el S_3 . Se invierte varias veces la corriente que circula por el devanado M , mediante el interruptor S_1 , a fin de que la muestra alcance la condición cíclica. Se cierra ahora el interruptor S_3 en su posición inferior y se lleva el S_1 de un par de contactos al otro. La desviación del galvanómetro balístico indica entonces la variación de inducción magnética B (densidad de flujo) en la muestra. Repitiendo el proceso con S_3 en su posición superior, utilizando la misma intensidad de corriente imanadora que antes, se tiene la variación correspondiente de campo

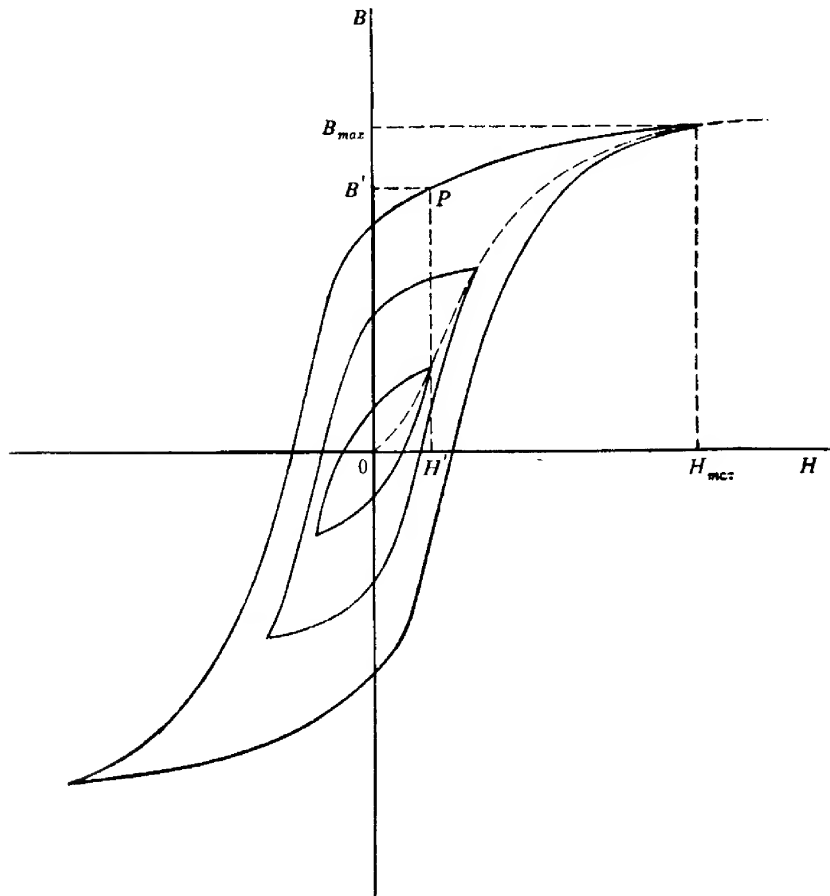


FIG. 17. Puntos de curvas de histéresis y de imanación normal obtenidos con un permeámetro.

magnético H en la muestra. Se obtienen otros puntos de la curva aumentando la intensidad de la corriente que circula por la bobina M , poniendo la muestra en condición cíclica mediante varias inversiones de S_1 y tomando luego los datos como para el primer punto. La curva de imanación normal es el lugar geométrico de los

puntos representados a partir de estos datos indicados por la línea de trazos de la figura 17.

Cuando hay que determinar un ciclo de histéresis, se establece primeramente la condición cíclica correspondiente al valor deseado de B_{max} . Se pone el reostato R_T de manera que dé un pequeño decremento de la lectura del amperímetro A al abrir S_3 . Con S_3 en la posición inferior, se abre S_2 y se anota la desviación del galvanómetro. La lectura indica la variación de B disminuyendo desde B_{max} . Esto dará el valor $B_{max} - B'$ indicado en la figura 17. Se restablece la condición cíclica en la punta del lazo invirtiendo S_1 , cerrando S_2 y volviendo a invertir S_1 . Si, con S_3 en la posición superior, se vuelve a abrir S_2 , se obtiene el valor $H_{max} - H'$. Pueden obtenerse puntos más abajo en el lazo, de igual manera, utilizando valores mayores de la resistencia R_T , realizando cada lectura a partir de una condición cíclica en la punta del lazo. Esto hace posible establecer condiciones iniciales idénticas para las lecturas de B y H y también evitar los errores acumulativos que irían aumentando al pasar de un punto a otro.

Cuando los puntos del ciclo de histéresis estén próximos al eje horizontal (H), los errores no demasiado grandes en la determinación de B no tendrán importancia, porque la curva es casi vertical, pero los errores de H sí tendrán importancia. El método para la determinación de H que se acaba de describir, es probable que introduzca un error considerable en dicha región, pues los valores de H se hallan tomando la diferencia entre H_{max} y otro valor grande $H_{max} - H$ determinado en la prueba. Se obtiene una mayor precisión en estos valores de H utilizando una conexión que permita la medida de H directamente a una imanación fija de la muestra haciendo girar rápidamente 180° la bobina H . No solamente es posible una mayor precisión con una sola lectura con el empleo de este dispositivo, sino que pueden realizarse varias lecturas de H sin alterar la condición magnética de la muestra.

Como entre los extremos de la barra de prueba existe una diferencia de potencial magnético considerable, se producirá una pérdida considerable de flujo que saldrá de la barra hacia el aire que la rodea. Por esta razón, la inducción magnética disminuye a lo largo de la barra desde los extremos hacia el centro con un decremento correspondiente del campo magnético en la forma indicada en la curva a de la figura 18. Cuanto mayor sea la fuerza magnetomotriz total aplicada, tanto mayor será esta pérdida y la falta de uniformidad resultante de H a lo largo de la muestra.

para campos magnéticos superiores a 300 Oe, este efecto se hace suficientemente grande para interferir con la precisión del instrumento. Este inconveniente, junto con la necesidad de ensayar las nuevas aleaciones duras para imanes permanentes, llevaron al desarrollo del adaptador super H . Este dispositivo se fija contra el yugo Y

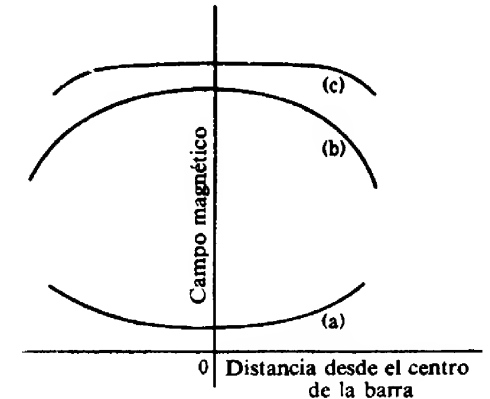


FIG. 18. Distribución del campo magnético a lo largo de la barra de prueba para: a) el devanado sobre el yugo, b) el devanado que rodea la muestra, la combinación de a) y b).

en lugar de la muestra y los postes P y mantiene cerca de su centro una longitud corta del material que se ensaya y una bobina H análogamente corta. A la muestra pueden aplicarse campos magnéticos de hasta 2 500 Oe sin sobrecalentar el aparato, si bien es sospechosa la precisión del instrumento por encima de los 1 000 Oe.

La curva b) de la figura 18 representa la variación del campo magnético a lo largo de una muestra cuando la bobina imanadora es un solenoide que rodea a la muestra y no un devanado sobre el yugo. En este caso, el valor de H es mayor en la región central y cae hacia los extremos. La curva c) representa una combinación de estas dos curvas e indica que, con parte del devanado imanador sobre el yugo y parte rodeando a la muestra, se puede obtener un campo uniforme a lo largo de una gran

parte de la barra. Este principio se aprovecha en el permeámetro Babbitt¹⁵, que da una buena precisión hasta los 1 000 Oe.

Recientemente, el U. S. Bureau of Standards ha desarrollado el permeámetro Sanford-Bennett^{16, 17} para H elevada. Este instrumento está destinado a medir B y H en muestras pequeñas (de secciones hasta 19 mm \times 38 mm) para campos magnéticos de hasta 5 000 Oe con un error no superior al 1 %. Pueden utilizarse valores de H de hasta 9 000 Oe sin sobrecalentar el instrumento o la muestra, pero la precisión para los valores más elevados no ha sido aún determinada (1958). En la figura 19 puede verse este permeámetro. Las dos grandes bobinas del centro rodean las piezas polares y comprenden el devanado imanador principal. Cada una de estas bobinas tiene 2 690 espiras de alambre Núm. 14 AWG recubierto de esmalte y seda. Cada una de las bobinas auxiliares o del yugo, tiene 1 600 espiras.

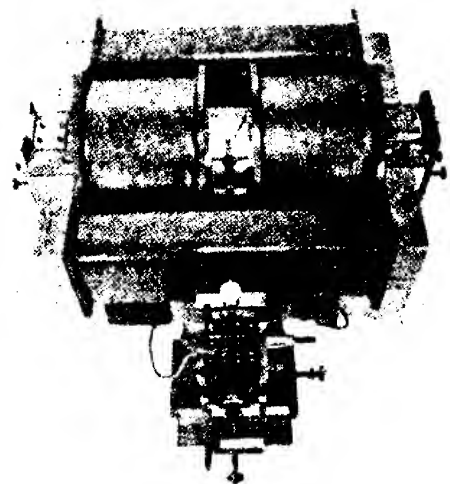


Fig. 19. El permeámetro Sanford-Bennett para H elevada. (Cortesía del National Bureau of Standards.)

Se dispone de varias bobinas B a fin de poder utilizar la que mejor se adapte a la muestra que se ensaya. Cada una de estas bobinas tiene 25 espiras de hilo fino arrolladas sobre una delgada coraza de latón. Esto se ve claramente en la parte central de la figura, como también ocurre con la bobina H inmediatamente debajo de la bobina B . El dispositivo de la parte frontal es un dispositivo accionado por motor, destinado a hacer girar la bobina H a fin de poder medir H para una imanación fija de la muestra. Las conexiones del instrumento son, en esencia, las mismas que para el permeámetro Fahy simplex.

¹⁵ B. J. BABBITT, «An Improved Permeameter for Testing Magnet Steel» *J. O. S. A. y R. S. I.*, 17 (1928), 47-58.

¹⁶ R. L. SANFORD y E. G. BENNETT, «An Apparatus for Magnetic Testing at High Magnetizing Forces», *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, 10 (1933), 567-572.

¹⁷ R. L. SANFORD y E. G. BENNETT, «An Apparatus for Magnetic Testing at Magnetizing Forces up to 5 000 Oersteds», *J. Res. Nat. Bur. Stand.* 23 (1939), 415-425.

6. UTILIZACIÓN TÉCNICA DE LOS MATERIALES FERROMAGNÉTICOS

El estudio detallado de los datos de las figuras 15a y 15b y de la tabla I indica que las diversas aleaciones mencionadas tienen características que se apartan en forma más o menos marcada de las características típicas de los materiales ferromagnéticos. El predominio de ciertas características determina la utilidad de un material dado para un fin específico. Por ejemplo, para un electroimán, suele ser conveniente un material que tenga una permeabilidad relativamente elevada y una gran inducción magnética de saturación, a fin de que la fuerza magnetomotriz y el volumen de material requeridos puedan ser pequeños. Ahora bien, estas propiedades no se deben lograr a cambio de un gran sacrificio de las propiedades mecánicas deseables, o de un costo excesivo. Una chapa de hierro relativamente puro o de acero con bajo contenido de silicio es lo que suele emplearse para estos fines. No obstante, cuando el flujo varía con el tiempo, como ocurre en los transformadores, bobinas de reacción y máquinas rotatorias, en el hierro se disipa energía en la forma indicada en el capítulo V. Debido al calentamiento y por razones de economía, esta disipación debe ser pequeña. Frecuentemente, en tales dispositivos suele emplearse chapa de acero eléctrico con un contenido de silicio comprendido entre el 2 y el 4 %. Su costo por unidad de masa es relativamente reducido y se encuentra en el mercado en diferentes formas convenientes para su fabricación en las formas deseadas. En la figura 12 pueden verse algunas de estas formas. Debido a su contenido de silicio, tiene una resistividad relativamente elevada y un ciclo de histéresis relativamente estrecho*, lo cual hace disminuir las pérdidas de energía en un campo alterno. Cuando se emplea una proporción de silicio superior al 4 %, la mejora en las propiedades magnéticas es despreciable y el material se hace quebradizo y difícil de troquelar en la forma deseada. Por tanto, se aumentan las dificultades de fabricación.

En algunos equipos de telecomunicación se precisa un material que tenga una permeabilidad extraordinariamente elevada. Para dichas aplicaciones pueden emplearse ciertas aleaciones de níquel y hierro llamadas Permalloy^{18, 19} o Hipernik, o una aleación de níquel-hierro-cobre llamada Mumetal²⁰. El empleo de estas aleaciones entraña un mayor costo por unidad de masa del material, pero no del costo por unidad de autoinducción. La gran permeabilidad de estas aleaciones se debe, principalmente, a haber estado sometidas a tratamiento térmico adecuado, para el cual se precisa un control muy cuidadoso. Además, su permeabilidad es muy susceptible a las deformaciones introducidas por el tratamiento mecánico; luego, su empleo puede aumentar los problemas de fabricación.

En el capítulo V se presenta un estudio que demuestra que se pueden reducir las pérdidas por corrientes de Foucault construyendo núcleos ferromagnéticos con láminas aisladas entre sí por el óxido que se forma en sus respectivas superficies o

* En el apartado 3 del capítulo V se tabulan valores representativos de las pérdidas en el núcleo para imanación simétrica cíclica y de la resistividad de muestras medias de diversos materiales.

¹⁸ G. W. ELMEN, «Magnetic Alloys of Iron, Nickel and Cobalt», *A. I. E. E. Trans.*, 54(1935), 1292-1299.

¹⁹ V. E. LEGG y F. J. GIVEN, «Compressed Powdered Molybdenum Permalloy for High-Quality Inductance Coils», *B. S. T. J.*, 19 (1940), 385-406.

²⁰ W. F. RANDALL, «Nickel-Iron Alloys of High Permeability with Special Reference to Mumetal», *I. E. E. J.*, 80 (1937), 647.

por una laca aislante. Otro procedimiento para reducir las corrientes de Foucault consiste en pulverizar el material y luego aislar entre sí las partículas con una sustancia aislante suficientemente tenaz para resistir las fuerzas de compresión ejercidas



FIG. 20. Reducción del tamaño de los núcleos de polvo prensado lograda en 20 años: a) hierro, b) Permalloy-80 y c) Mo-Permalloy 2-81.

al moldear el polvo formando núcleos de diversas formas. En la figura 20 puede verse el avance logrado en esto por los ingenieros y físicos del Bell System durante los últimos veinte años.

En otros problemas de telecomunicación es preciso emplear materiales de permeabilidad constante para todo el dominio de trabajo. Esta propiedad la poseen, para inducciones relativamente bajas, una aleación de níquel, hierro y cobalto llamada Perminvar (*permeabilidad invariable*) y otra de níquelhierro llamada Conpernik. Desgraciadamente, la permeabilidad de estas aleaciones es baja. Tienen, como únicas propiedades, un magnetismo residual despreciable y un campo coercitivo despreciable en todo el dominio de trabajo útil. El Perminvar tiene muy poca resistividad, del orden de $20\mu\Omega\text{-cm}$, pero la adición de un 7 % de molibdeno la cuadruplica sin sacrificio apreciable de sus propiedades magnéticas.

Los materiales empleados en maquinaria rotatoria deben tener propiedades diferentes de las anteriores. La resistencia mecánica cobra gran importancia ya que, en los rotores de los turboalternadores, las fuerzas centrífugas suelen ser grandes. Cuando el campo magnético es esencialmente constante, suelen utilizarse piezas de forja macizas de acero al níquel o al níquel-cromo. Estas aleaciones poseen los elevados valores de inducción de saturación necesarios para los aceros destinados a estas aplicaciones. En las partes de la máquina sometidas a un flujo alterno, tales como las proximidades de los devanados de corriente alterna, las pérdidas de energía resultantes son considerables. Para estas partes se emplea un acero al silicio conveniente.

En las máquinas de inducido giratorio, surge un problema especial. La inducción magnética en los dientes es muy elevada y convendrá un material de gran inducción de saturación a fin de disponer de un flujo por polo grande sin tener que utilizar excitaciones antieconómicas, a pesar de la constricción existente en las raíces de los dientes.

Para estas aplicaciones puede ser interesante una aleación hierro-cobalto llamada Permendur, aun cuando no se haya aprovechado hasta ahora (1958) para estas

aplicaciones. El coste actual de esta aleación, su fragilidad y su baja resistividad nos disuaden de su utilización. Sin embargo, la adición de un 1,7 % de vanadio hace disminuir su fragilidad e incrementa su resistividad hasta unos $24\mu\Omega\text{-cm}$. En la actualidad, el Permendur se emplea únicamente en pequeños electroimanes, relés y equipos telefónicos. En ciertas aplicaciones como en equipos aeronáuticos y demás, donde es preciso ahorrar espacio y peso, lo elevado del costo no constituye una seria dificultad. Los factores importantes son la relación entre el costo del material por unidad de masa, el costo del artículo acabado por unidad de masa y el tanto por ciento en peso del material en el artículo acabado.

Cuando se emplean los materiales ferromagnéticos en imanes permanentes, son otras las propiedades que adquieren importancia primordial. Las aplicaciones de los imanes permanentes suelen ser los instrumentos y aparatos de medida y los motores y generadores de poca potencia en los que el costo por unidad de masa del producto acabado es relativamente grande. Los imanes suelen estar sometidos frecuentemente a sacudidas fuertes, a campos alternos y a variaciones moderadas de la temperatura. La resistencia mecánica de los imanes permanentes suele ser mucho mayor de la necesaria. Los factores de mérito vienen a ser, de manera general, la coercitividad y la retentividad del material. En muchas aplicaciones, el factor determinante es el valor máximo del producto (BH) a lo largo de la curva de desimagnación entre $H = 0$ y $H = H_c$ según se explica en el capítulo IV. Este producto se ha tabulado en la tabla I titulándolo $(BH)_{\text{máx}}$ para los materiales apropiados para imanes permanentes.

En los primeros tiempos de la Electricidad Industrial se utilizaron aceros al carbono para imanes permanentes, los cuales se debilitaban mucho magnéticamente a causa de vibraciones, campos magnéticos alternos y variaciones de temperatura, por lo que no tuvieron aplicación cuando se requería constancia del campo. El desarrollo de los aceros al wolframio y al cromo constituyó un adelanto en la mejora de los materiales para imanes permanentes que aún encuentra gran aplicación cuando tiene importancia el costo del material y no el espacio que ocupa. Estos aceros tienen los mismos defectos que los aceros al carbono, pero en menor grado.

El desarrollo del acero al cobalto proporcionó un material magnéticamente superior a los aceros al wolframio o al cromo. No solamente pueden crearse campos más intensos con un imán de acero al cobalto, sino que los campos alternos y las vibraciones mecánicas tienen un efecto relativamente pequeño sobre su permanencia. Recientemente, se han desarrollado otras aleaciones que contienen principalmente hierro, níquel, cobalto y aluminio. Estas aleaciones, conocidas con el nombre comercial de Alnico en los Estados Unidos y Nipermag en Inglaterra son de producción más barata y de menor peso que el acero al cobalto y tienen propiedades magnéticas aún mejores. La aleación Alnico²¹ se produce en diversas composiciones, siendo la composición media de un 20 % de níquel, 12 % de aluminio, 5 % de cobalto, 0,4 % de manganeso más silicio y el resto hierro. Tiene un gran valor de $(BH)_{\text{máx}}$ y sus propiedades varían muy poco con la vibración, campos alternos e incluso con variaciones sorprendentemente grandes de la temperatura. No obstante, el empleo de esta aleación introduce un nuevo problema por no poderse trabajar fácilmente a máquina y frecuentemente debe fundirse para moldearla dándole la forma en la que deba utilizarse. Así pues, su empleo lleva consigo un problema complicado de fabri-

²¹ J. Q. ADAMS, «Alnico-Its Properties and Possibilities», *G. E. Rev.*, 41 (1938), 518-523.

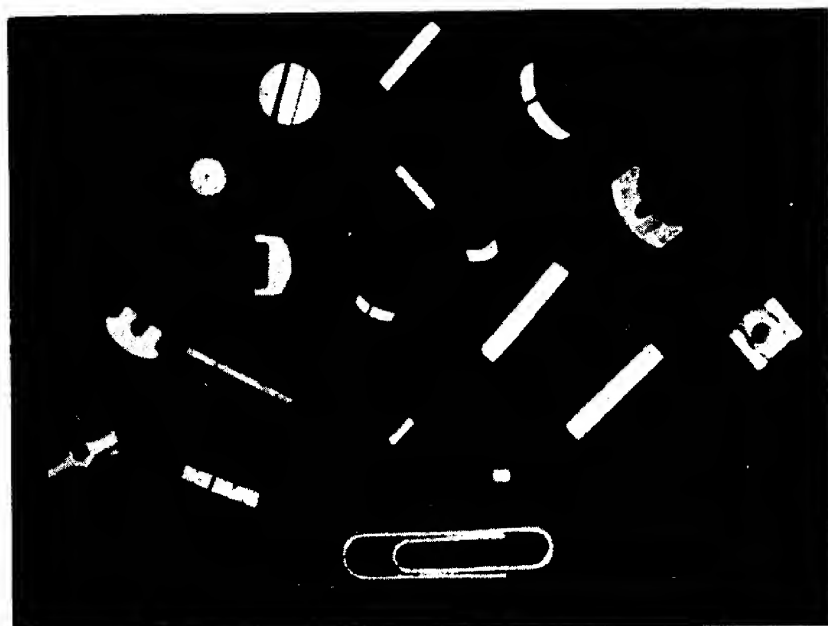


FIG. 21. Colección representativa de pequeños imanes de Alnico. El clip da idea del tamaño.
(Cortesía de la General Electric Co.)



FIG. 22. Circuito magnético de un receptor telefónico. (Cortesía de los Bell Telephone Laboratories.)

cación. Este problema se ha resuelto parcialmente con el aglutinamiento²², proceso en el cual los constituyentes pulverizados se difunden juntos a elevada temperatura y bajo una presión enorme. En la figura 21 pueden verse algunas de las partes formadas por este procedimiento con gran precisión. En el mercado se encuentran elementos de mayor tamaño, así como los que se indican en la figura, y pueden combinarse con hierro o acero para fabricar dispositivos magnéticos.

Otras aleaciones y también los óxidos de hierro y de hierro-cobalto, presentan propiedades interesantes como imanes permanentes. Los imanes de óxido deben ser moldeados y son relativamente quebradizos. Los futuros desarrollos acerca de estas cuestiones pueden dar resultados muy útiles. Para muchos dispositivos no hay ningún material ferromagnético adecuado. Por ejemplo, el moderno receptor telefónico de la figura 22 tiene imanes permanentes de Remalloy, piezas polares de Permalloy 45 y diafragma de Permendur.

En algunos dispositivos tales como relés, resistencias y transformadores, se podrá utilizar ventajosamente un material que tenga propiedades magnéticas muy sensibles a la temperatura. Esta condición ha resultado interesante desde hace poco, aun cuando la variación de la propiedad magnética con la temperatura ha tenido significado teórico desde los primeros intentos de formular una teoría del ferromagnetismo. Con una composición apropiada, puede obtenerse una aleación que tenga la temperatura a la cual pierde sus propiedades magnéticas (punto de Curie) a un nivel útil para muchas aplicaciones técnicas. Las aleaciones que tienen esta propiedad hallan su utilización en los elementos sensibles a la temperatura de transformadores, contadores y bobinas de reacción térmicamente sensibles. Las posibilidades de aplicación útil de las aleaciones de este tipo pueden apreciarse mejor al realizar una aleación²³ que contiene aproximadamente un 35 % de níquel, 5 % de cromo, 60 % de hierro y 0,3 % de silicio, con tratamiento térmico adecuado, la cual tiene una inducción de saturación de unos 6 000 G a una temperatura de 60°C y que es esencialmente no magnética a 160°C. Otra de estas aleaciones, el Mo-Permalloy 12,5-80, se hace no magnética a 40°C, o sea, a temperatura ligeramente superior a la ambiente.

Las propiedades magnéticas de muchos materiales ferromagnéticos varían gradualmente con el tiempo, fenómeno conocido con el nombre de envejecimiento. Todos los aceros se comportan de esta manera hasta un cierto punto, ya que sus compuestos hierro-carbono no son estables, sino que cambian con el tiempo de una forma a otra. Los cambios pueden realizarse rápidamente a temperatura elevada, si bien un enfriamiento brusco apropiado formando parte del tratamiento térmico puede originar un retraso tal que el efecto total quede distribuido durante varios años. No obstante, el envejecimiento no puede detenerse del todo. Los aceros al silicio presentan un envejecimiento muy ligero debido a la reacción que se produce entre el silicio, oxígeno y carbono durante la fabricación.

Aun cuando los efectos del envejecimiento sobre las propiedades magnéticas de todos los aceros son importantes, haciendo disminuir ordinariamente la permeabilidad y aumentar la coercitividad de los materiales magnéticamente blandos, los efectos son especialmente serios cuando se presentan en los aceros magnéticamente duros utilizados para los imanes de los instrumentos de medida. En este caso dismi-

²² G. H. HOWE, «Sintering of Alnico», *Iron Age*, 145 (1940), 27.

²³ L. R. JACKSON y H. W. RUSSELL, «Temperature-Sensitive Magnetic Alloys and Their Uses», *Instruments*, 11 (1938), 280-282.

nuye la fuerza del imán y empeora la precisión del dispositivo aun cuando la intensidad del campo magnético disminuya poco. La utilidad de los aceros al carbono magnéticamente duros puede mejorarse mediante el envejecimiento artificial. Por ejemplo, si se somete el acero a una temperatura de unos 100°C durante varias horas, se produce un envejecimiento rápido y una variación considerable de la intensidad. Con ello se reduce mucho la subsiguiente variación de intensidad del campo magnético a la temperatura ambiente.

Muchas de las aleaciones modernas no contienen carbono en cantidades apreciables y no se hallan sometidas a estos efectos de envejecimiento. Algunos de los compuestos formados, sobre todo el Alnico, son estables incluso a temperaturas superiores a los 600°C. En algunas de estas aleaciones se pueden practicar soldaduras incluso después del tratamiento térmico, sin perjudicar apreciablemente sus propiedades magnéticas favorables. Las ventajas ofrecidas por estas aleaciones a los procesos de fabricación pueden apreciarse fácilmente.

PROBLEMAS

1. Describanse brevemente todos los desarrollos modernos de la teoría del magnetismo que han aparecido en la literatura periódica referente a Física e Ingeniería Eléctrica hasta la publicación de este libro.

2. Dense todas las propiedades físicas y curvas características de todos los materiales ferromagnéticos no incluidos en este capítulo.

3. Un fleje de acero inoxidable (18 % de cromo, 8 % de níquel) tratado especialmente se coloca bajo la acción de un potente imán permanente, mostrando poca tendencia a ser elevado, pero, tras un minuto o minuto y medio, se halla fuertemente atraído por los polos del imán. El tratamiento especial consiste en eliminar el nitrógeno del metal y templearlo en agua cuando está a una temperatura de 590°C. El experimento magnético se realiza inmediatamente después de la operación de temple. ¿Cómo puede explicarse este cambio de las propiedades magnéticas? ¿Indica su explicación que el fleje recupera sus propiedades de material no ferromagnético al quitarlo del campo magnético? *

4. Cuando a los terminales del primario de un transformador se aplica una tensión sinusoidal de 2 300 V eficaces, la inducción magnética máxima en el núcleo es de 1 T (Wb/m²). Los datos del ciclo de histeresis del acero del núcleo del transformador son los de la siguiente tabla:

<i>B en tesla (Wb/m²)</i>	<i>H en milioersted</i>
— 1,00	— 3750
— 0,92	— 1500
— 0,77	0
— 0,50	+ 1400
— 0,20	+ 2100
0,00	+ 2350
+ 0,45	+ 2500
+ 0,75	+ 2950
+ 1,00	+ 3750

Representar, sobre un mismo eje horizontal, un ciclo completo de tensión sinusoidal y los ciclos correspondientes de inducción magnética y de campo magnético. Utilícese una escala horizontal de 15° = 1 cm. Utilícense las escalas verticales de 400 V = 1 cm, 0,15 T = 1 cm y 400 mOe = 1 cm. La forma de onda de *H* es análoga a la de la corriente de imanación del transformador descrito en el capítulo VI.

* Véase «Magnetic Delay», *G. E. Rev.*, 45 (1942), 245, 246.

CAPÍTULO II

Concepto de circuito magnético

Cuando en la práctica se desea tener un flujo magnético en una región, suelen utilizarse estructuras de material ferromagnético de forma especial y conductores de la corriente eléctrica situados adecuadamente, o se colocan imanes permanentes en lugares apropiados. Para solucionar muchos problemas es preciso poder calcular la intensidad del campo magnético *H* y la inducción magnética *B* en todo punto de dicha estructura. En general, *H* y *B* son funciones del espacio y del tiempo determinadas por la geometría de los conductores y de la estructura magnética, por las propiedades e historia del material magnético y por los valores, derivadas o frecuencias de las corrientes o de las intensidades de los imanes. Se tiene, pues, un problema de campo que contiene materiales de características no lineales. Determinadas hipótesis simplificadoras hacen posible, en algunos casos, la reducción del problema general de campo a otro más sencillo que lleve consigo el concepto de circuito.

1. PROBLEMA GENERAL

Cuando las corrientes y flujos varíen con el tiempo y con las tres coordenadas del espacio, el problema es del tipo más general y su solución puede ser extraordinariamente difícil, requiriéndose a menudo la técnica de las aproximaciones sucesivas. Para mayor simplicidad, en este capítulo, se limitarán las condiciones a corrientes de intensidad constante o lentamente variable. Lo mismo se supondrá de los flujos. A este estado se le da el nombre de *quasi-estacionario*.

El problema analítico general para el caso quasi-estacionario puede plantearse de la siguiente manera: Para una configuración dada de conductores portadores de corriente y material ferromagnético, ¿cuáles son la dirección, sentido y módulo del vector inducción magnética *B*, en algunos o en todos los puntos de la región, en función de las intensidades de las corrientes que circulan por los conductores o de las propiedades conocidas de los imanes permanentes? O, inversamente, ¿qué configuración de conductores portadores de corriente y materiales ferromagnéticos se precisa para establecer la dirección y el módulo del vector *B* en alguno o en todos los puntos de la región? La solución de este problema general en una región determinada del espacio exige que se satisfagan simultáneamente las tres condiciones siguientes:

- El vector intensidad del campo magnético *H* es igual en todo punto al vector inducción magnética *B* dividido por la permeabilidad μ que es, en general, una variable dependiente de *B*.
- La integral de la componente normal de *B* extendida a una superficie cerrada de la región, debe ser nula.
- La integral de la componente tangencial de *H* a lo largo de un contorno cerrado cualquiera en la región, ha de ser igual a $4\pi I$, siendo *I* la intensidad de la corriente abrazada por el contorno.

Salvo en su forma más simple, este problema es prácticamente irresoluble por vía analítica con los conocimientos actuales de materiales y métodos. En realidad, aun cuando sólo hubiera presentes materiales no magnéticos, la complicación que se presentaría para distribuciones geométricas relativamente sencillas de los conductores, sería enorme. En consecuencia, para llegar a una solución técnica de los problemas más difíciles, deberán hacerse hipótesis un tanto burdas referentes a algunos detalles. Hasta qué punto sean aceptables dichos resultados depende en gran parte de la calidad de lo que llamamos criterio técnico. Sin embargo, cuando se obtiene

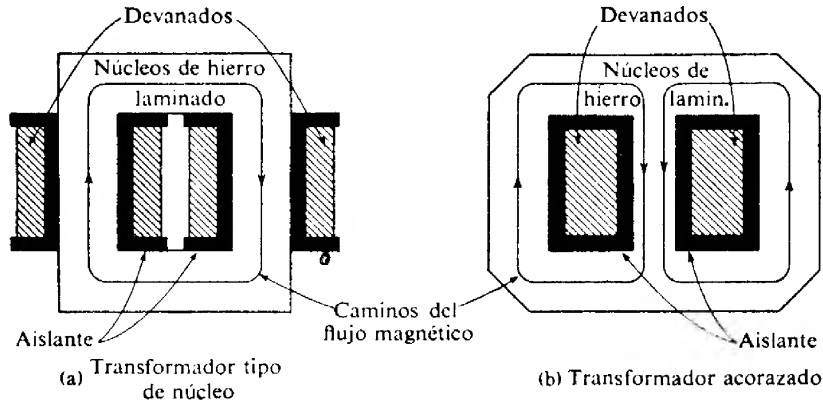


FIG. 1. Estructuras magnéticas de transformadores.

un diseño satisfactorio, mediante la combinación de procedimientos analíticos y experimentales, para una estructura magnética específica, podrá determinarse el diseño de estructuras magnéticas análogas empleando la teoría de modelos descrita en el capítulo VII.

Problema secundario que se resuelve fácilmente una vez conocido el campo, es el de obtener el *flujo magnético* total ϕ que atraviesa una superficie. Este flujo no es más que la componente de \mathbf{B} normal a la superficie, integrada a toda la superficie. La relación se expresa matemáticamente en la forma

$$\phi = \int B \cos \theta \, ds, \quad (1)$$

donde θ es el ángulo formado por el vector \mathbf{B} y la normal al elemento de superficie ds ; utilizando la notación vectorial

$$\phi = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, ds, \quad (2)$$

donde \mathbf{n} es el vector unitario normal dirigido hacia el exterior, asociado al elemento de superficie ds . El recíproco de este problema secundario, ordinariamente de más fácil solución, es el problema de determinar las corrientes o las distribuciones de imanes permanentes que crean un flujo dado a través de una superficie.

Afortunadamente, en muchas aplicaciones prácticas se puede reducir el problema tridimensional general a un problema unidimensional mediante una aproximación satisfactoria. Esta reducción lleva consigo una simplificación enorme por medio de la cual el *campo* tridimensional se transforma en un *circuito* unidimensional;

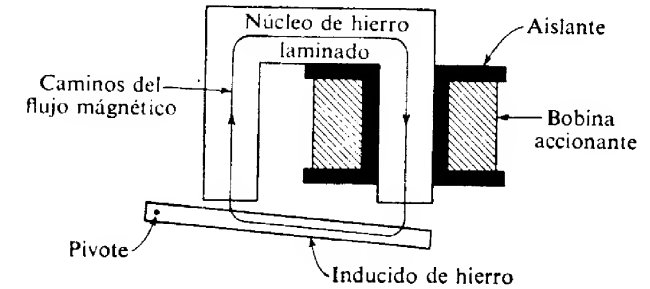


FIG. 2. Estructura magnética de un relé.

llamado *circuito magnético*. En general, un circuito magnético consiste en la mayor parte de su longitud en un material de gran permeabilidad, de sección sustancialmente uniforme y en el cual queda confinado, principalmente, el flujo magnético.

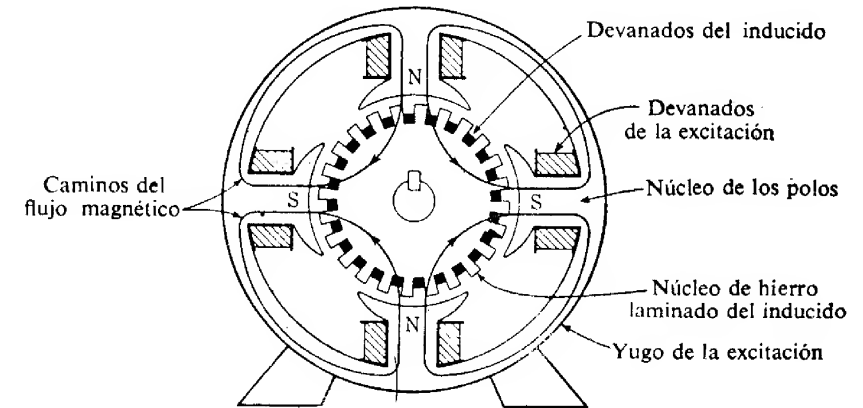


FIG. 3. Estructura magnética de una dinamo tetrapolar.

En las figuras 1, 2, 3 y 4 pueden verse ejemplos de estructuras magnéticas que pueden estudiarse con ayuda del concepto del circuito. En la figura 1 se ve que los caminos del flujo van siempre por dentro de los núcleos de hierro. En realidad, en el espacio adyacente al hierro se halla siempre presente una pequeña cantidad de flujo por razones que se estudian cualitativamente en el apartado 2 y cuantitativamente en los capítulos III y IV. En la figura 2, la porción de hierro del circuito del flujo se halla interrumpida en dos lugares por sendos entrehierros; así y todo, el camino del flujo transcurre casi todo por material de gran permeabilidad. La

estructura de la figura 3 tiene un circuito magnético más complicado, del tipo serie-paralelo. Las estructuras magnéticas de estas figuras están laminadas a fin de reducir todo lo posible las pérdidas en el núcleo, según se estudia en el capítulo V. En la

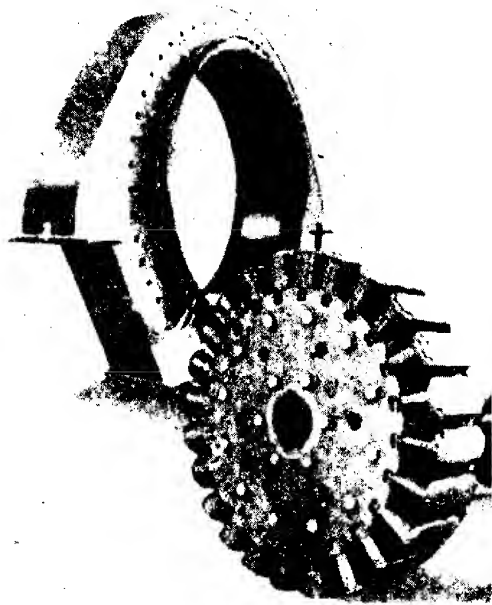


FIG. 4. Rotor y estator de un generador sincrónico trifásico de 2 300 V 60 Hz.

figura 4 puede verse una fotografía de un generador sincrónico trifásico. El órgano rotatorio de una máquina grande puede pesar varios cientos de toneladas, gran parte de la cual es material ferromagnético de gran calidad.

2. ANALOGÍAS ENTRE CIRCUITOS ELÉCTRICOS Y MAGNÉTICOS

El concepto de circuito magnético mencionado en el apartado 1 se basa en la idea de que un flujo constante o lentamente variable tiende a confinarse en los caminos de permeabilidad elevada de una estructura ferromagnética de manera parecida a cómo tienden las corrientes constantes o lentamente variables a confinarse en las trayectorias de gran conductibilidad de un circuito eléctrico. Este concepto lleva a la realización de ciertas analogías entre el comportamiento de un circuito resistivo no lineal con corrientes constantes o lentamente variables y el comportamiento de un circuito ferromagnético, que es no lineal de por sí, con flujo constante o lentamente variable.

Sin embargo, el circuito magnético difiere marcadamente del análogo eléctrico en un aspecto importante. Cuando un conductor eléctrico se emplea para transportar corriente, se halla normalmente separado de los otros conductores por un material

aislante. Un aislador regularmente bueno, como es la goma, tiene una conductibilidad 10^{20} veces menor que la del cobre, por lo que, en la mayoría de circuitos eléctricos, la corriente de conducción por el material aislante es despreciable frente a la que circula por los conductores. En contraste con esto, no se conoce ningún aislante magnético de propiedades similares. La sustancia más diamagnética que se conoce es el bismuto, que tiene una permeabilidad que es el 99,98 % de la del aire, por lo que en la práctica se utiliza el aire como aislante magnético, siendo su permeabilidad unas 10 000 veces menor y a veces sólo 100 veces menor que la de los materiales ferromagnéticos. Surge otra complicación del hecho de que el camino magnético deseado deba atravesar, a veces, un entrehierro, como se indica en las figuras 2 y 3, que está magnéticamente en paralelo con otro entrehierro que, a lo mejor, tiene un efecto aislante solamente de 5 ó 10 veces mayor que el del entrehierro. Esta condición hace que se desvíe del camino útil una fracción considerable del flujo magnético, yendo a pasar por el entrehierro situado en paralelo, el cual es inútil. Esta acción de derivación da origen a una condición conocida por el nombre de *pérdida de flujo*.

Puede hacerse visible la acción de derivación por el aire con ayuda de un circuito eléctrico de cobre desnudo sumergido en un electrolito que tenga una conductibilidad unas 1 000 veces menor que la del cobre. Si el conductor de cobre es corto y continuo y tiene gran sección, la corriente que circule por el electrolito será relativamente débil. La condición análoga en un circuito magnético está ilustrada por las estructuras de la figura 1. Por otra parte, si el conductor tiene una rotura o interrupción en él, tal que la corriente se ve obligada a recorrer por el electrolito un camino, aunque sea corto, la corriente se difunde mucho por toda la región próxima. Esta difusión es análoga a la que ocurre en los circuitos magnéticos de las figuras 2 y 3, donde el flujo útil que atraviesa el entrehierro puede ser tan sólo el 80 ó 90 % y en algunos diseños menor del 50 % del flujo que circula por gran parte del camino situado en el hierro. La determinación de los caminos que sigue la corriente y la resistencia del electrolito en el circuito eléctrico, o sea los caminos del flujo y la reluctancia del

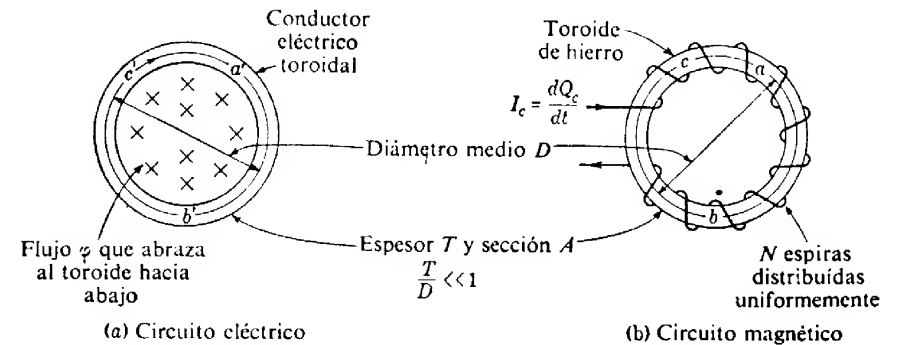


FIG. 5. Analogía idealizada entre los circuitos eléctricos y magnéticos.

material en el circuito magnético, es un problema que no es susceptible, en general, de cálculo exacto. En todos los cálculos magnéticos habrá que tener en cuenta los efectos de pérdidas.

La comprensión del concepto de circuito magnético, dentro de la tolerancia

inherente a ciertas hipótesis simplificativas, viene ayudada por la consideración cuantitativa de una configuración magnética y una configuración eléctrica estrechamente análoga. En la figura 5 pueden verse dichas configuraciones. Debido a la forma simétrica de cada configuración, pueden obtenerse directamente soluciones explícitas aplicándoles las ecuaciones del campo. Estas soluciones indican que la instalación magnética sencilla de la figura 5b puede estudiarse como circuito magnético de parámetros localizados de manera análoga a cómo la instalación de la figura 5a puede estudiarse como circuito eléctrico de parámetros localizados.

En la figura 5a puede verse un toroide conductor eléctricamente homogéneo atravesado por un flujo magnético dirigido hacia adentro del papel. Para toda superficie limitada por una línea tal como la $a'b'c'a'$ interior al toroide, el flujo φ es, en virtud de la ecuación 2*,

$$\varphi = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, ds. \quad (3)$$

Este flujo puede crearse por cualquier medio conveniente. Si φ es derivable respecto al tiempo, la ley de Faraday de la inducción da, para cualquier camino cerrado análogo al $a'b'c'a'$ interior al conductor,

$$E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, ds. \quad (4)$$

O sea,

$$E = - \frac{d\varphi}{dt}. \quad (5)$$

La cantidad E recibe el nombre de *fuerza electromotriz* y es proporcional solamente a la derivada temporal del flujo que abraza al toroide.

En la figura 5b puede verse una instalación magnética análoga. El toroide es de hierro o de otro material ferromagnético análogo y tiene devanadas N espiras distribuidas uniformemente y que transportan una corriente de intensidad I_c . A lo largo de un camino cerrado cualquiera $abca$ interior al hierro del toroide, la integral curvilínea de la componente tangencial al camino del campo magnético \mathbf{H} es, para una corriente constante o lentamente variable,

$$F = \oint H \cos \theta \, dl, \quad (6)$$

siendo dl la longitud de un elemento del camino $abca$ de integración, y θ el ángulo que forma con dicho elemento de camino el vector \mathbf{H} . En notación vectorial (6), se escribe:

$$F = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}. \quad (7)$$

* En este capítulo se escriben las ecuaciones de manera que pueda utilizarse cualquier sistema compatible de unidades no racionalizadas. Desgraciadamente, en la literatura técnica y en la práctica aparece una mezcla de unidades que requiere el empleo de numerosos factores de conversión en las ecuaciones. Esto se evita en las ecuaciones literales de este capítulo.

De la ecuación de Ampère y aplicando el teorema de Stokes, resulta:

$$F = 4\pi \int \mathbf{J}_c \cdot \mathbf{n} \, ds = 4\pi N I_c, \quad (8)$$

y con unidades racionalizadas

$$F = \int \mathbf{J}_c \cdot \mathbf{n} \, ds = N I_c, \quad (8 \text{ bis})$$

siendo \mathbf{J}_c la densidad de corriente en el devanado, o sea,

$$F = 4\pi N \frac{dQ_c}{dt} = 4\pi \frac{dQ}{dt}, \quad (9)$$

y con unidades racionalizadas

$$F = N \frac{dQ_c}{dt} = \frac{dQ}{dt}. \quad (9 \text{ bis})$$

En las ecuaciones (8) y (8 bis) la integración se extiende a toda superficie abierta limitada por la línea $abca$. En las ecuaciones (9) y (9 bis), $N dQ_c/dt$ o dQ/dt es la carga que en unidad de tiempo atraviesa el plano del toroide.

Por analogía con la fuerza electromotriz E de las ecuaciones (4) o (5), a la cantidad F de las ecuaciones (8) y (9 bis) se le da el nombre de *fuerza magnetomotriz* y se suele abreviar escribiendo fmm. La analogía entre dQ/dt y $d\varphi/dt$ es esencialmente matemática y no física, ya que la carga se mueve atravesando el plano del toroide hacia abajo por los hilos conductores a razón de dQ/dt coulomb por segundo; en cambio, el flujo φ no hace más que describir el estado del medio, variando dicho estado con el tiempo a razón de $d\varphi/dt$ weber por segundo. En el sentido físico, no se asocia la idea de velocidad a $d\varphi/dt$.

Si los dos toroides se consideran como circuitos eléctrico y magnético, respectivamente, las analogías pueden extenderse aún más y pueden compararse los efectos de E y F sobre sus respectivos circuitos. Si la intensidad del campo eléctrico es uniforme a lo largo del camino $a'b'c'a'$ de la figura 5a y si se localiza $a'b'c'a'$ en la circunferencia media del toroide conductor, la magnitud de la intensidad del campo eléctrico será

$$\mathcal{E} = \frac{E}{l} = \frac{E}{\pi D}, \quad (10)$$

donde l es la longitud del camino y D su diámetro medio. El campo eléctrico origina una densidad de corriente J que es función de la intensidad del campo eléctrico \mathcal{E} y de la resistividad ρ del material del toroide:

$$J = \frac{\mathcal{E}}{\rho}. \quad (11)$$

Si el cociente entre el espesor T del toroide y su diámetro medio D es tan pequeño que pueda considerarse el mismo valor de l para todos los caminos,

$$J = \frac{E}{lQ} \quad (12)$$

y la intensidad de la corriente total del toroide es

$$I = AJ = A \frac{E}{lQ} = \frac{E}{R}, \quad (13)$$

donde,

$$R \equiv \frac{\rho l}{A}. \quad (14)$$

A es el área de la sección recta del toroide y R su resistencia eléctrica. Así, por lo que se refiere a la corriente que circula por el conductor, la configuración toroidal abrazada por un flujo que tenga derivada respecto al tiempo es análoga a un generador localizado de fuerza electromotriz E , conectado en serie con un camino de resistencia R . La magnitud de la tensión del generador es $\frac{d\phi}{dt}$ y en la porción de circuito exterior al generador la caída de potencial eléctrico $V_{a'b'}$ entre un punto cualquiera a' y otro b' es

$$V_{a'b'} = \int_{a'}^{b'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (15)$$

o sea,

$$V_{a'b'} = IR_{a'b'}, \quad (16)$$

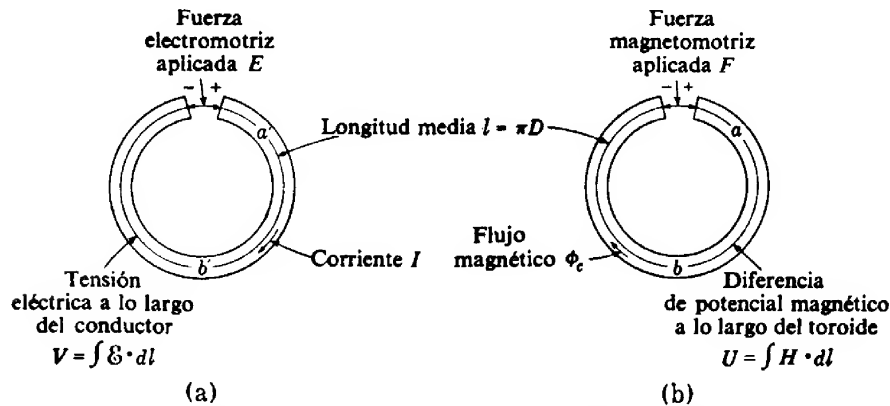


FIG. 6. Esquemas que muestran las fuerzas electro y magnetomotriz localizadas de los circuitos homólogos eléctrico y magnético.

donde $R_{a'b'}$ es la resistencia entre a' y b' . En las figuras 6a y 7a se ilustran estas condiciones. Cuando la resistividad del material no es constante, la resistencia es función no lineal de la intensidad de la corriente,

$$R = f(I). \quad (17)$$

Para la configuración magnética de la figura 5b pueden escribirse relaciones análogas, matemáticamente, a las expresadas por las ecuaciones comprendidas entre

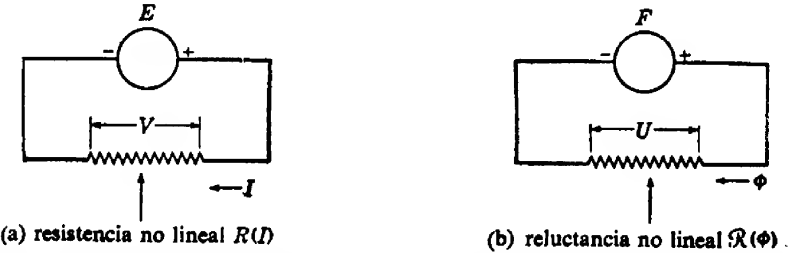


FIG. 7. Representaciones de circuitos homólogos eléctrico y magnético idealizados.

la (10) y la (17), ambas inclusive. El módulo del campo magnético \mathbf{H} en todo punto de un camino $abca$ de la figura 5b, si se localiza $abca$ en la circunferencia media, es:

$$H = \frac{F}{\pi D} = \frac{F}{l} = \frac{4\pi NI_c}{l} \quad (18)$$

En unidades racionalizadas, la definición de H queda alterada en la forma

$$H = \frac{NI_c}{l} \quad (18 \text{ bis})$$

siendo I_c la intensidad de la corriente que circula por cada una de las N espiras del toroide.

La intensidad del campo magnético crea una inducción magnética B_c función de H y de la permeabilidad μ del material ferromagnético

$$B_c = \mu H \quad (19)$$

En el caso de materiales ferromagnéticos, rara vez puede considerarse lineal esta función. Suele expresarse por una curva determinada experimentalmente, como la de la figura 13a del capítulo I. Si el cociente entre T y D es tan pequeño que pueda considerarse el mismo valor de B_c para todos los caminos

$$B_c = \mu \frac{F}{l} \quad (20)$$

y el flujo total en el núcleo es

$$\phi_c = AB_c = A\mu \frac{F}{l} = \frac{F}{R} \quad (21)$$

donde,

$$R \equiv \frac{l}{\mu A} \quad (22)$$

* La Unión Internacional de Física Pura y Aplicada recomienda que se utilice lo menos posible el vector \mathbf{H} por depender su definición de la racionalización de las unidades. La definición del vector \mathbf{B} no depende de dicha racionalización por estar afectado el valor de μ en forma que se compensa con la alteración de \mathbf{H} al efectuar el producto $\mu\mathbf{H}$. (N. del T.)

y recibe el nombre de *reluctancia* del camino magnético. La reluctancia del toroide de hierro es homóloga de la resistencia del toroide conductor eléctrico. Las ecuaciones (21) y (22) muestran que, por lo que respecta al flujo en el hierro, el toroide de hierro que lleva un devanado distribuido uniformemente que transporta una corriente de intensidad I_c , es equivalente a un generador localizado de fuerza magnetomotriz F conectado en serie con un camino magnético de reluctancia \mathcal{R} . La magnitud del generador de fuerza magnetomotriz F es $4\pi \frac{dQ}{dt}$ (con unidades racionalizadas dQ/dt). En la porción de circuito exterior al generador, la caída de potencial magnético U_{ab} de un punto a a otro b es:

$$U_{ab} = \int_a^b \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \quad (23)$$

o sea,

$$U_{ab} = \phi_c \mathcal{R}_{ab} \quad (24)$$

donde \mathcal{R}_{ab} es la reluctancia entre a y b . En las figuras 6b y 7b se ilustran estas condiciones. Cuando la permeabilidad del material ferromagnético no es constante, la reluctancia es función no lineal del flujo

$$\mathcal{R} = f(\phi_c) \quad (25)$$

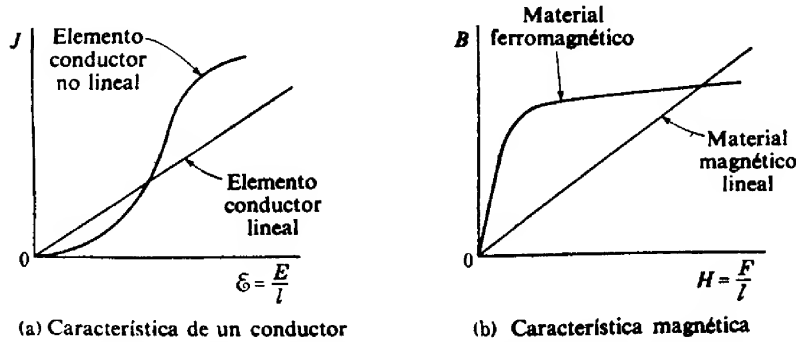


FIG. 8. Curvas características de materiales para circuitos homólogos eléctrico y magnético idealizados.

En la figura 8 pueden verse las formas de curvas características de los materiales de los toroides de los circuitos homólogos eléctrico y magnético idealizados.

A veces resulta conveniente el empleo de los recíprocos de \mathcal{R} y \mathcal{R} :

$$G \equiv \frac{1}{\mathcal{R}} \quad (26)$$

$$\mathcal{P} \equiv \frac{1}{\mathcal{R}} \quad (27)$$

y

en donde G es la *conductancia* del conductor eléctrico y \mathcal{P} la *permeancia* del camino magnético. Escribiendo las ecuaciones (16) y (24) en función de estos recíprocos, resulta:

$$I = GV \quad (28)$$

y

$$\phi_c = \mathcal{P}U \quad (29)$$

Los conceptos de permeabilidad, reluctancia y permeancia son muy útiles para el razonamiento. En cambio, para el cálculo, μ , \mathcal{R} y \mathcal{P} solamente son útiles cuando la relación entre B y H pueda considerarse función lineal, es decir; cuando μ sea esencialmente constante.

En las anteriores relaciones magnéticas, se ha supuesto que T/D era pequeño frente a la unidad. Si así no fuera, habría que dividir el toroide en anillos concéntricos elementales para cada uno de los cuales sería constante l , debiéndose determinar H para cada anillo. La inducción magnética B para cada anillo, se determinaría entonces mediante la curva de B en función de H del material correspondiente, ya que dicha función no es lineal. Para obtener, entonces, el flujo total ϕ , debe integrarse la inducción magnética B sobre toda el área de la sección recta del toroide. Para el cálculo de I se aplicaría el razonamiento homólogo si T no fuera despreciable frente a D y todo el flujo magnético de la figura 5a estuviera encerrado por el anillo interior del toroide.

El concepto de circuito magnético con parámetros localizados, se hace más claro considerando los procedimientos de cálculo de ϕ_c en el toroide. En el circuito eléctrico homólogo, se puede calcular la intensidad de la corriente, y así se hace ordinariamente, como si el toroide estuviera cortado y abierto como en la figura 6a y la fuerza electromotriz E estuviera aplicada a las caras que así se forman. Análogamente, el toroide magnético puede verse cortado y abierto en la figura 6b, con toda la fuerza magnetomotriz F localizada y aplicada entre las caras así formadas. Puede considerarse así al material ferromagnético como exterior al generador, con lo que, siempre que en el material exista un flujo ϕ_c , entre sus caras terminales debe existir una diferencia de potencial magnética U . Como se supone que el toroide es de material y sección uniformes, la diferencia de potencial será, según la ecuación (24)

$$U = \phi_c \mathcal{R}, \quad (30)$$

que, según la ecuación (7), debe ser igual a la suma de los generadores de fuerza magnetomotriz localizados. Luego,

$$F = U = \phi_c \mathcal{R}. \quad (31)$$

El sentido de la fuerza magnetomotriz de un generador magnético viene determinado por la regla del tornillo: Girando el tornillo en el sentido de circulación de la corriente por la bobina, el tornillo avanza en el sentido de los potenciales magnéticos crecientes. Fuera del generador, la disminución del potencial magnético se produce en el mismo sentido que el flujo. Si se recorre por completo el circuito mag-

nético, la suma de las subidas de potencial en los generadores debe ser igual a la suma de las caídas en las reluctancias.

Dividiendo por l la ecuación (31), se tiene

$$\frac{F}{l} = \frac{U}{l} = \phi_c \frac{\mathcal{R}}{l} = \frac{\phi_c}{\mu A} = \frac{B}{\mu} = H. \quad (32)$$

En la ecuación (32), la cantidad U/l es la diferencia de potencial magnético por unidad de longitud del toroide. Sin embargo, en un circuito de sección no uniforme, o de constitución no homogénea, U se toma sólo en partes homogéneas de caminos de sección uniforme y longitud l , para dar la H correspondiente a dicha parte.

Los conceptos anteriores llevan a la idea de un esquema de conexiones de un circuito magnético como el representado esquemáticamente en la figura 7b y sirven para indicar un paralelismo con el esquema de conexiones del circuito eléctrico de las figuras 7a. El concepto del elemento de circuito se ilustra cuando se representan las propiedades de los materiales con curvas características como las de las figuras 8a y 8b. Sin embargo, en el estudio anterior se suponía que E era debida a una $d\varphi/dt$ y F a una dQ/dt . Mantener constante E mediante una $d\varphi/dt$ constante es imposible porque al final se precisaría un flujo φ infinito; pero mantener una F constante mediante una dQ/dt constante sí es posible, y suele hacerse, porque puede mantenerse una corriente de intensidad constante. Por el contrario, E puede mantenerse en la práctica mediante una batería de resistencia interna despreciable conectada entre las caras del corte de la figura 6a, pero F no puede mantenerse mediante la corriente de una bobina que tenga un núcleo de reluctancia interna despreciable, conectada entre las caras del corte de la figura 6b, porque no se dispone de materiales de muy pequeña reluctividad. Cuando se enfoca el problema magnético desde el punto de vista de un circuito con una fuerza magnetomotriz aplicada entre las caras de un corte (fig. 6b), habrá que reconocer que el corte es hipotético y no introduce entrehierro en el camino del flujo magnético. Naturalmente, en realidad, el problema es fundamentalmente un problema de campo tridimensional; no hay que pasar por alto el hecho de que solamente se reducirá a un problema de circuito en el caso de configuraciones especiales.

Como la permeabilidad de un material ferromagnético es una variable, la reluctancia del camino por dicho material será otra variable y por tanto no será una cantidad especialmente útil. No se emplearán ni la permeabilidad ni la reluctancia más que para dar una visión del circuito magnético en función de su homólogo eléctrico más familiar como ayuda para el razonamiento. Exceptuando el empleo de la permeabilidad incremental, que puede considerarse constante según se ilustra en el apartado 14 del capítulo VI, los cálculos numéricos de estructuras magnéticas se pueden realizar mejor con el empleo de las curvas de inducción magnética en función del campo magnético, como se hace en el capítulo III.

Puede demostrarse que los elementos de reluctancia magnética conectados en serie o en paralelo se combinan de la misma manera que los elementos de resistencia en un circuito eléctrico de configuración homóloga.

Aun cuando los circuitos magnético y eléctrico son homólogos matemáticamente en muchos aspectos, presentan ciertas diferencias físicas importantes. Por ejemplo, en el circuito eléctrico no lineal homólogo de la figura 7, salvo a temperaturas extra-

ordinariamente bajas, se disipa una potencia $I^2 R$ cuando por el circuito circula una corriente de intensidad I . Sin embargo, en la porción de circuito del toroide magnético, no hay potencia disipada o absorbida directamente por el campo magnético en tanto que la inducción magnética sea constante en todos los puntos del circuito. El hecho de que los imanes permanentes, adecuadamente cuidados, mantengan su imanación durante largos intervalos de tiempo, constituye una buena justificación de esta aseveración. Cuando el campo magnético está creado en la estructura por un devanado excitador, en la bobina se disipa una potencia igual a $I_c^2 R_c$, donde R_c es la resistencia de la bobina e I_c la intensidad de la corriente que por ella circula.

Principios de los cálculos de circuitos magnéticos

Las analogías entre circuitos eléctricos y magnéticos parecen indicar, a primera vista, que la ley de Ohm entre fuerza magnetomotriz, flujo y reluctancia debería proporcionar un método directo de solución para los problemas de circuitos magnéticos. Sin embargo, resulta difícil la aplicación directa de este método debido a lo relativamente grande que resulta la pérdida de flujo que figura en los problemas de circuitos magnéticos y a la dependencia entre la reluctancia de un material ferromagnético y la inducción magnética. Por esta razón, se han ideado técnicas especiales para la solución de problemas de circuitos magnéticos. Estas técnicas constituyen el tema de este capítulo y del siguiente. Evidentemente, los métodos de solución no dependen del tipo de unidades empleadas, pero la solución se simplifica un tanto si se toma un sistema conveniente de unidades.

1. UNIDADES PARA CÁLCULOS MAGNÉTICOS

En los trabajos de ciencia pura se utiliza a veces el sistema de unidades electromagnéticas cegesimalas (uem), si bien la adopción por la Comisión Electrotécnica Internacional del sistema Giorgi¹, que contiene las unidades eléctricas prácticas, ha hecho que se tienda en la actualidad a utilizar este sistema incluso en cuestiones científicas. Los ingenieros, pues, deberán familiarizarse con el empleo de dos sistemas de unidades magnéticas: el uem y el Giorgi.

En los cálculos de circuitos magnéticos sólo intervienen con frecuencia las unidades de F (o U), H y B . La unidad Giorgi de F (o U) es el ampere-espira. La de H es el ampere espira por metro que recientemente ha recibido, por acuerdo de la Unión Internacional de Física Pura y Aplicada el nombre de *lenz* y se simboliza por L . La unidad Giorgi de B es el *tesla*, simbolizado por T , que antes se llamaba weber por metro cuadrado (Wb/m^2). En la tabla I se consignan varios factores de conversión que sirven para pasar de un sistema de unidades a otro.

La permeabilidad del vacío es:

en el sistema de uem: 1

en el sistema Giorgi sin racionalizar: 10^{-7} H/m

en el sistema Giorgi racionalizado: $4\pi 10^{-7}$ H/m.

En las figuras 1a y 1b pueden verse curvas representativas de imanación normal de muestras de varios materiales ferromagnéticos utilizados corrientemente en la construcción de aparatos electromagnéticos. El campo magnético H se ha representado en la figura 1a en escala logarítmica destinada a ampliar las curvas para los valores bajos de H . En la figura 1b, H se representa en escala aritmética y da las curvas en forma particularmente útil para la resolución de ciertos problemas tratados en los artículos subsiguientes. Como las propiedades magnéticas de los materiales

TABLA I

<i>Multiplicar</i>	<i>Por</i>	<i>Para obtener</i>
F en uem	10	F en ampere-espira
F en ampere-espira	$0,4\pi = 1,257$	F en gilbert
F en gilbert	0,07958	F en ampere espira
H en oersted	1000	H en milioersted
H en oersted	79,58	H en lenz
H en lenz	0,01257	H en oersted
H en oersted sin racionalizar	$\frac{1}{4\pi} = 7,958 \times 10^{-2}$	H en oersted racionalizado
B en gauss	10^{-4}	B en tesla
B en tesla	10^4	B en gauss

ferromagnéticos quedan muy afectadas por pequeñas variaciones de la composición química, por el tratamiento térmico y por la manipulación mecánica, las propiedades de las distintas muestras de un material ferromagnético pueden diferir considerablemente de las representadas por las curvas 1a y 1b.

2. CÁLCULOS PARA CAMINOS MAGNÉTICOS CONTENIDOS TOTALMENTE EN EL HIERRO

Como ya se ha dicho, los materiales ferromagnéticos pueden emplearse para muchos fines, tales como conducir el flujo por algún camino particular, aumentar el flujo creado por una fuerza magnetomotriz fija, o concentrar el flujo en un lugar determinado de un dispositivo. Estos empleos requieren dos clases muy amplias de cálculos:

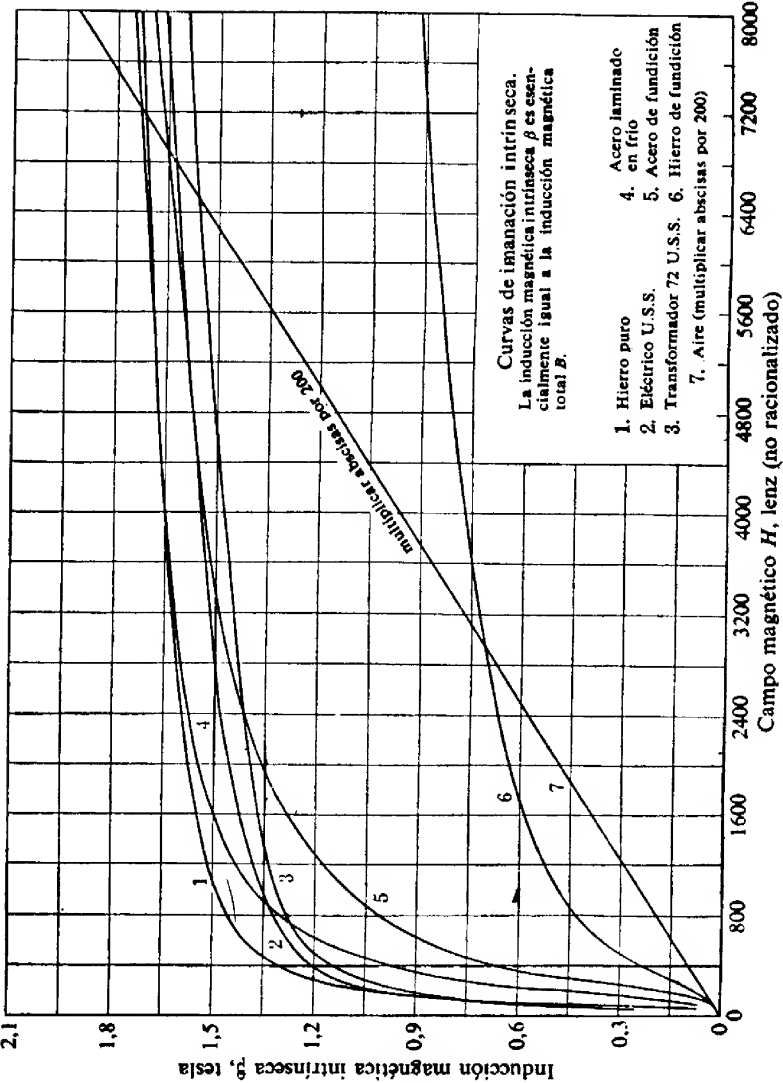
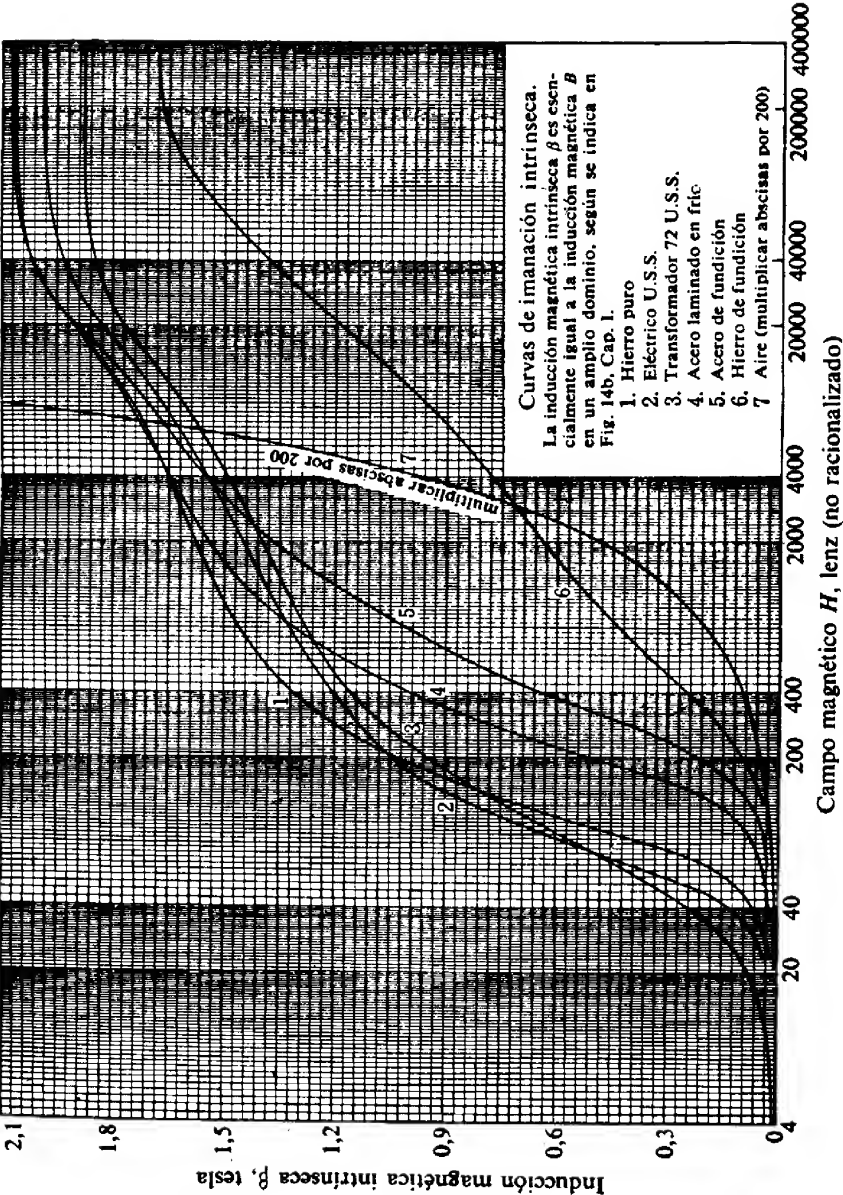
a) La determinación de la fuerza magnetomotriz necesaria para crear un flujo determinado o una inducción magnética dada en una parte que se especifique de la estructura.

b) La determinación del flujo o de la inducción magnética creados en partes especificadas de la estructura por fuerzas magnetomotrizes aplicadas en diversas partes de la estructura.

Hablando con precisión, el método de análisis del circuito magnético no da inducciones magnéticas salvo como valor medio del flujo total a través de una sección del circuito; la determinación de la distribución del flujo es un problema de campo.

Cuando el problema estriba en determinar la fuerza magnetomotriz requerida para crear un flujo total o una inducción magnética (densidad de flujo) determinado, es decir, el cálculo a), el proceso es directo, siempre que se desprece o se estime la pérdida de flujo. En cada porción de un camino magnético serie que tenga una sección recta de área A constante, el valor medio de la inducción magnética B es igual al cociente entre el flujo total ϕ y el área A . El valor del campo magnético H que se

¹ Modernamente se considera preferible el sistema de unidades Giorgi racionalizadas.



precisa para establecer este valor de B viene determinado por la curva que representa B en función de H para el material en cuestión. Se multiplica, entonces, este valor de H por la longitud de la porción de camino para la cual se supone constante B para obtener la diferencia de potencial magnético U entre los extremos de dicha porción del camino; es decir,

$$U_{ab} = Hl_{ab}, \quad (1)$$

en donde la distancia de a a b es la longitud del camino en material uniforme de sección recta constante. Si el camino incluye porciones de diversas clases de material ferromagnético, el valor de H para cada material se multiplica solamente por la longitud del camino en dicho material, obteniéndose así la diferencia de potencial magnético para dicha parte del camino. La suma de las diferencias de potencial magnético U_{ab} , U_{bc} , ... para dichas porciones $a-b$, $b-c$, ... de camino tomadas a lo largo de todo el circuito serie, da la fuerza magnetomotriz total requerida; es decir,

$$F = U_{ab} + U_{bc} + U_{cd} + \dots + U_{na}. \quad (2)$$

Si la constitución del circuito es tal que la inducción magnética media difiere mucho de los valores extremos de dicha inducción magnética en una misma sección recta, deberá emplearse un procedimiento especial basado en el indicado en la página 51.

Cuando el problema estriba en determinar el flujo total o la inducción magnética creado por fuerzas magnetomotrices aplicadas en diversas partes, es decir, el cálculo b) el proceso no es tan directo aun cuando se desprecien las pérdidas de flujo. En algunas combinaciones sencillas de caminos magnéticos, pueden emplearse procedimientos gráficos que se ilustrarán con ejemplos en los apartados siguientes. En el caso de combinaciones complicadas de caminos, se llega rápidamente a la solución mediante un método de aproximaciones sucesivas. En estas combinaciones complicadas se calcula primeramente la fuerza magnetomotriz requerida para crear un flujo de valor supuesto ϕ_1 . Si la fuerza magnetomotriz calculada no se aproxima suficientemente a la aplicada, se elige un nuevo valor de ensayo ϕ_2 , mayor o menor que ϕ_1 , según que la fuerza magnetomotriz aplicada sea mayor o menor que la cantidad requerida para igualar la caída de potencial magnético producida por el flujo supuesto ϕ_1 . Al cabo de pocos ensayos y con un poco de sentido común al elegir ϕ_1 , ϕ_2 , etc., se obtiene la solución.

Cuando la estructura magnética está constituida por chapas delgadas recortadas en forma adecuada y apretadas entre sí, el volumen ocupado por ellas no es igual al volumen de hierro que realmente conduce el flujo. Entre las láminas existen regiones de permeabilidad igual a la del aire, debido a la presencia de irregularidades o grietas en las superficies de las chapas, debido a la delgada capa de barniz aislante aplicado deliberadamente para evitar el contacto entre chapas y reducir las pérdidas por corrientes de Foucault según se explica en el capítulo V, o debido a rebabas en los cantos de las chapas, originadas al troquelarlas. Esta región conduce muy poco flujo debido a lo relativamente bajo de su permeabilidad; así, para tener en cuenta su efecto disminuyendo el volumen total de hierro, se acostumbra a expresar el área eficaz de la sección recta del hierro como igual al producto del área de la sección recta de la pila de chapas por un factor llamado *factor de apilamiento*. El factor de apilamiento, definido como el cociente entre el área de la sección recta de hierro y el área de la

sección recta de la pila, se halla comprendido entre 0,95 y 0,90 para espesores de lámina comprendidos entre 0,63 mm y 0,35 mm, respectivamente. Para láminas más delgadas, de entre 0,025 mm y 0,12 mm de espesor, debido a la mayor dificultad existente de sujetar las láminas y reducir las rebabas y a que la capa aislante es proporcionalmente más gruesa, el factor de apilamiento se halla comprendido entre 0,4 y 0,75, pudiendo mejorarse mediante procedimientos de fabricación especiales. La inducción magnética en el hierro es igual, entonces, al flujo total ϕ dividido por el producto del factor de apilamiento por el área de la sección recta de la pila.

Los detalles de los métodos que intervienen en los cálculos de esta clase pueden comprenderse mejor mediante la solución de algunos ejemplos numéricos.

3. EJEMPLO DE CÁLCULO DE ESTRUCTURA MAGNÉTICA DE SECCIÓN RECTA Y MATERIAL UNIFORMES

La estructura magnética de la figura 2 es análoga a la de un transformador de corriente alterna del tipo de núcleo. Está constituida por láminas de acero de transformador con un 4 % de silicio (designado por *transformador 72*) de 0,025 pulgadas (0,63 mm) de espesor apiladas formando una pila de 7,5 cm de espesor. El factor de apilamiento es 0,95 debido a las costras no magnéticas existentes sobre la superficie de las láminas. La bobina de excitación tiene 200 espiras. El problema consiste en calcular la intensidad de la corriente que ha de circular por el devanado de excitación para crear un flujo en el núcleo de 500 000 Mx. Se desprecia el flujo de pérdidas.

Solución: El área de la sección recta de la pila es uniforme (salvo en los ángulos) y, para las dimensiones dadas, es de 37,5 cm². El área de la sección recta equivalente del hierro es igual al área de la sección recta de la pila multiplicada por el factor de apilamiento; es decir, $37,5 \times 0,95 = 35,6$ cm². Luego, salvo en los ángulos, la inducción magnética media B es igual a $500/35,6 = 13,2$ kG. Si se considera esta inducción magnética como uniforme en todo el núcleo, es decir, si se desprecia la pérdida de flujo y no se

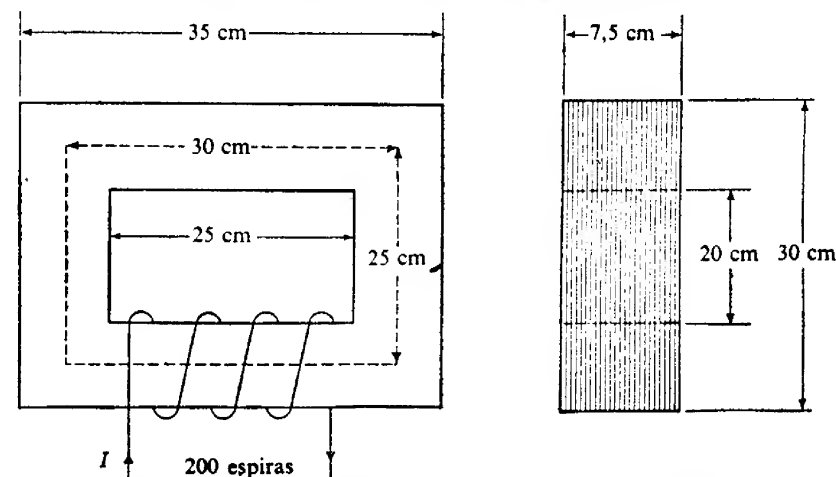


FIG. 2. Estructura magnética de un transformador de núcleo.

pretende saber el efecto exacto de los ángulos del núcleo sobre la distribución del flujo de la curva 3 de la figura 1a, resulta que el campo magnético o diferencia de potencial magnético por unidad de longitud de núcleo requerido para establecer una inducción magnética de 13 200 G o 1,32 T es, aproximadamente, 800 L.

El cálculo preciso de la distribución del flujo en los ángulos es difícil. En primera aproximación, se supone que la longitud media del circuito magnético es de 110 cm, según indica la línea de trazos de la figura 2. La diferencia de potencial magnético U entre las caras de un corte hipotético del circuito, entre las cuales se halla localizada la fuerza magnetomotriz es, aproximadamente, $800 \times 1,10 = 880$ ampere-espira. Como la bobina tiene 200 espiras, la intensidad de la corriente de excitación será de $880/200 = 4,4$ A, aproximadamente.

Para este ejemplo, en el que se supone uniforme la intensidad del campo magnético a lo largo de todo el núcleo, resulta también fácil el cálculo del flujo total cuando se especifica la fuerza magnetomotriz. Por ejemplo, el flujo creado por una corriente de excitación de 11 A, se calcula de la manera siguiente:

Solución. La fuerza magnetomotriz para la corriente de excitación que se especifica es $11 \times 200 = 2200$ ampere-espira. Como se supone uniforme el área de la sección recta del núcleo, el campo magnético será uniforme e igual a $2200/1,1 = 2000$ L. De la figura 1a resulta que la inducción magnética creada por este valor de H es, aproximadamente, 1,42 T o sea, 14 200 G. El flujo total será, por tanto, $14200 \times 35,6 = 505000$ Mx, aproximadamente.

4. EJEMPLOS DE CÁLCULO DE ESTRUCTURA MAGNÉTICA DE MATERIAL UNIFORME Y SECCIÓN NO UNIFORME

En las estructuras magnéticas de los aparatos eléctricos suelen encontrarse partes de diferente sección. Estas diferencias se deben, a veces, a necesidades de robustez de ciertas partes o a proporcionar una parte de núcleo que se sature fácilmente. El estudio de tales circuitos magnéticos puede resultar extraordinariamente

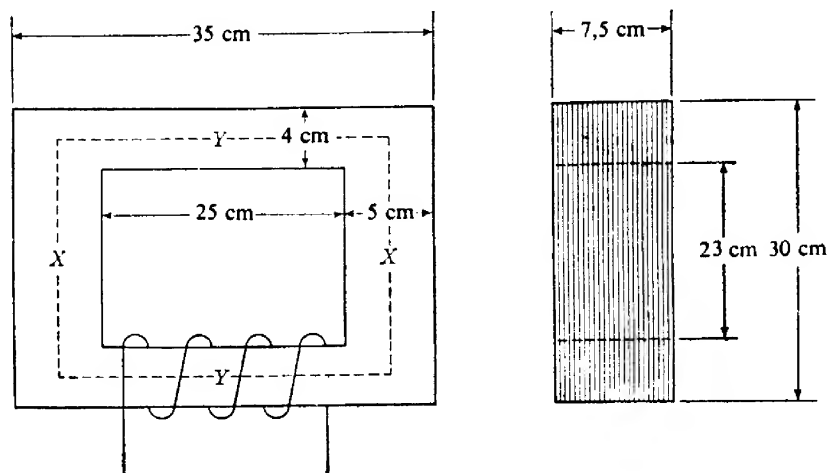


FIG. 3. Ejemplo de estructura magnética. Las ramas X e Y tienen secciones rectas de diferente área.

complicado. Tomaremos como ejemplo el núcleo de transformador de la figura 3, no porque constituya una forma típica de algún dispositivo en particular, sino por ser menos confuso e igualmente satisfactorio considerarlo como primer ejemplo de estructura sencilla. Este núcleo está formado por laminas troqueladas de acero de transformador con un 4 % de silicio y de 0,014 pulgadas (0,35 mm) de espesor, constituyendo una pila de 7,5 cm de espesor. El factor de apilamiento correspondiente a este espesor de laminas y a su forma de sujeción es 0,91. El problema estriba en calcular el número de ampere-espira necesario para crear en el núcleo un flujo de 410 000 Mx. Se desprecia la pérdida de flujo.

Solución: El área de la sección recta de la parte de hierro de las ramas X es $5 \times 7,5 \times 0,91 = 34,1$ cm² y la de las ramas Y es $4 \times 7,5 \times 0,91 = 27,3$ cm². La inducción magnética en el hierro es $410/34,1 = 12$ kG, para las ramas X y $410/27,3 = 15$ kG, para las ramas Y. De la curva 3 de la figura 1a resulta que el campo magnético ha de ser de 400 L para las ramas X y 3200 L para las ramas Y. La longitud media de los caminos del flujo indicados por las líneas de trazos en la figura 3, es de 52 cm para las ramas X y 60 cm para las ramas Y. La suma de las diferencias de potencial en las dos ramas X es de $400 \times 0,52 = 208$ ampere-espira, y en las dos ramas Y es de $3200 \times 0,60 = 1920$ ampere-espira. El número total de ampere-espira que requiere el circuito magnético total es, pues, de 2 130 aproximadamente.

Cuando sobre un núcleo constituido por partes de materiales o secciones rectas diferentes actúa una fuerza magnetomotriz, el problema de calcular los flujos creados no siempre es fácil. Si el núcleo consta de más de dos partes diferentes en las cuales las relaciones entre B y H no son lineales, la obtención directa del flujo es imposible porque, debido a la no linealidad de cada parte, la división del potencial magnético entre las diferentes partes del circuito no se puede calcular directamente. Cuando se emprende el estudio de las características magnéticas de la estructura con pocos valores de la fuerza magnetomotriz, podrá llegarse a la solución en un tiempo razonable empleando un proceso de aproximaciones sucesivas y utilizándola se podrán resolver, con precisión suficiente, ciertos problemas que pueden incluso ser relativamente complicados, siempre que se obre con sentido común y se sistematice el método de análisis. Sin embargo, si el núcleo no consta de más de dos partes no lineales conectadas en serie, tales como X e Y en la figura 3, y si se desprecian los flujos de pérdidas, puede emplearse un método gráfico de solución. A continuación se ilustran ambos métodos, utilizando una fuerza magnetomotriz de 2 700 ampere-espira.

Solución por aproximaciones sucesivas: Si no se conocieran los cálculos anteriores, el valor a suponer en primera aproximación a la inducción magnética precisaría de una estimación de la diferencia de potencial magnético existente entre los extremos de cada parte del núcleo. Como el área de la sección recta de la parte de hierro de las ramas Y (Fig. 3), es mucho menor que las áreas de las secciones rectas de las ramas X, la inducción magnética será mucho mayor en las ramas Y que en las X. Las ramas Y, por tanto, constituyen el «gollete». Si la inducción magnética es suficientemente grande para que los efectos de saturación sean pronunciados, la mayor parte de la fuerza magnetomotriz de la bobina de excitación deberá vencer la reluctancia de las dos ramas Y en serie. En primera aproximación, se tomará toda la fuerza magnetomotriz para las ramas Y. El gradiente de potencial magnético resultante en ellas es, pues, de $2700/0,60 = 4500$ L. La inducción magnética es, entonces, de 1,55 T o sea, 15500 G, aproximadamente. Como la inducción se halla en la región de saturación, la suposición hecha acerca de la distri-

bución de la fuerza magnetomotriz entre las ramas X e Y se aproxima mucho a la realidad. Pero, no toda la fuerza magnetomotriz se absorbe en las ramas Y, por lo que en ellas la inducción magnética será algo menor que 1,55 T.

Como segunda aproximación supondremos para las ramas Y una inducción magnética de 1,54 T. Esta inducción requiere un campo magnético de 3840 L. La diferencia de potencial magnético requerida para las ramas Y es, entonces, de $3840 \times 0,6 = 2304$ ampere-espira. Como el flujo total es el mismo en ambas ramas, las inducciones en ellas serán inversamente proporcionales a las áreas. Luego, la inducción magnética en las ramas X será $(27,3/34,1)1,54 = 1,23$ T, despreciando la pérdida de flujo. A esta inducción, las ramas X requieren un campo magnético de 330 L, o sea una diferencia de potencial magnético de $330 \times 0,52 = 172$ ampere-espira. La fuerza magnetomotriz requerida por el circuito total para crear el flujo supuesto de 420000 Mx es, pues, de 2476 ampere-espira.

Si la segunda aproximación no es suficiente, habrá que realizar una tercera y así sucesivamente hasta obtener una aproximación satisfactoria de la fuerza magnetomotriz especificada. Una nueva aproximación en la que se utilice para las ramas Y una inducción de 1,545 T da para dichas ramas 2450 ampere-espira, 1,16 T y 200 ampere-espira para las ramas X y un total de 422 000 Mx y 2650 ampere-espira para el circuito. Pretender obtener una aproximación demasiado grande, es perder el tiempo. Las hipótesis hechas acerca de los efectos de los ángulos, el despreciar las pérdidas de flujo, la utilización de la curva de imanación normal que ignora los efectos de la histéresis, la imposibilidad de efectuar lecturas con precisión sobre las curvas y la diferencia que haya entre el verdadero valor del factor de apilamiento y el supuesto, son factores que tienden a introducir errores. Por tanto, una aproximación que dé un error de un 5 % suele ser satisfactoria.

TABLA II

Datos de fig. 1b, chapa acero recocido		Datos de la parte X		Datos de la parte Y	
H lenz	B tesla	$U_X = 0,52 H$ amp-esp	$\phi_X = 34,1 \times 10^{-4} B$ weber	$U_Y = 0,60 H$ amp-esp	$\phi_Y = 27,3 \times 10^{-4} B$ weber
40	0,25	21	85×10^{-3}	24	68×10^{-3}
80	0,56	42	191	48	153
160	0,89	84	303	96	243
240	1,05	125	358	144	287
320	1,14	166	389	192	311
400	1,19	208	406	240	325
600	1,27	312	433	360	347
800	1,32	416	450	480	360
1600	1,43	832	488	960	390
2400	1,47	1228	501	1440	401
3200	1,51	1664	515	1920	412
4800	1,57	2436	535	2880	429

Solución gráfica directa: El método gráfico se emplea en multitud de problemas de circuitos en estado estacionario. Se emplea extensivamente en estudios de circuitos con válvulas de vacío en los que dichas válvulas se comportan como elementos no lineales respecto a la conducción de la corriente en forma análoga a como la estructura magnética se comporta como elemento no lineal respecto al flujo magnético.

El procedimiento consiste en determinar primeramente la relación que existe entre el flujo total y la diferencia de potencial magnético total para cada una de las dos partes no lineales del circuito. En este ejemplo, las dos ramas X constituyen una parte y las dos ramas Y, otra. Se precisa una escala lineal para las abscisas, por lo que se empieza por tabular los datos del material del núcleo, obtenidos de la figura 1b, tal como se ha hecho en la tabla II. Para las ramas X, el flujo ϕ_X es $34,1 \times 10^{-4} B$ y la diferencia de potencial magnético U_X es $0,52 H$, ya que el área de la sección recta del hierro en las ramas X es de $34,1 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ y la longitud total de las ramas X es de 0,52 m. Análogamente, en las ramas Y ϕ_Y es $27,3 \times 10^{-4} B$ y U_Y es $0,60 H$. Se representan gráficamente ϕ_X en función de U_X y ϕ_Y en función de U_Y , como se indica en la figura 4, de manera que el eje de abscisas de la curva correspondiente a las ramas X tenga los valores de U ordenados en sentido creciente de izquierda a derecha; mientras que el eje de abscisas de la curva correspondiente a las ramas Y los tiene ordenados en sentido inverso hallándose el valor 0 en el punto en que el valor de U correspondiente a las ramas X tiene el valor 2 700. En otras palabras, la representación gráfica para las ramas Y se ha invertido, constituyendo lo que se llama una *curva de imanación negativa*, y su origen se coloca en el punto que corresponde a un valor de U igual a 2 700 para la representación no invertida.

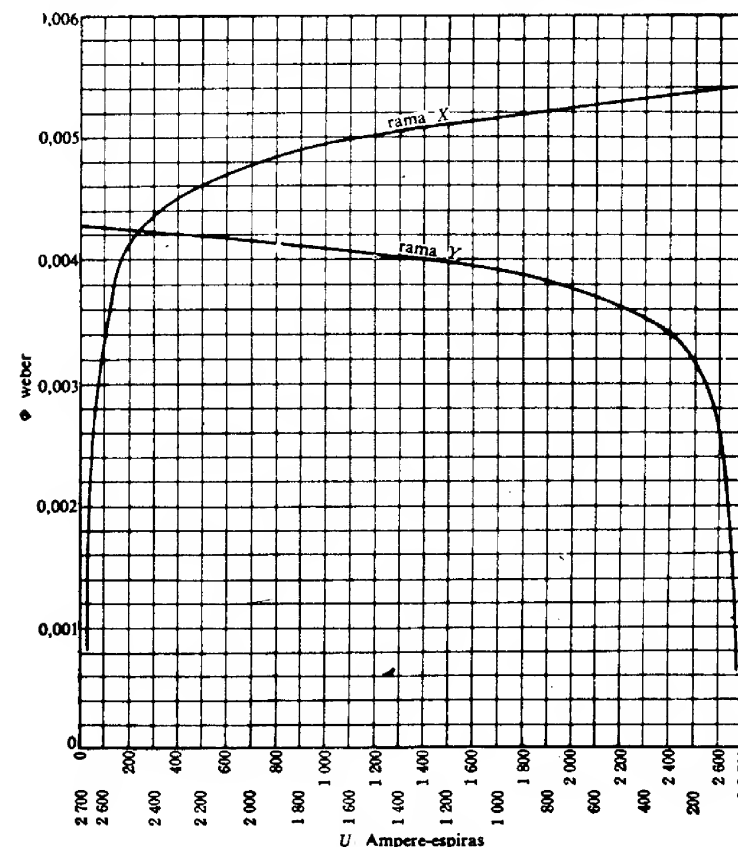


FIG. 4. Solución gráfica del ejemplo del apartado 4.

Se toma el punto 2 700 por ser éste el valor de la fuerza magnetomotriz aplicada. Si se aplicara cualquier otro valor de la fuerza magnetomotriz total, el origen de la curva invertida de las ramas Y se tomaría en el punto correspondiente a este otro valor.

Como en ambas ramas X e Y existe el mismo flujo total ϕ , la única solución para el valor asignado a F es el valor de ϕ correspondiente a la ordenada del punto de intersección de las dos curvas. En la figura 4, el valor de ϕ correspondiente a este punto es igual a 425 000 Mx, el cual concuerda sustancialmente con el resultado obtenido por el método de las aproximaciones sucesivas. El valor de U_X resulta ser 230 ampere-espira y el de U_Y 2 470 ampere-espira.

La explicación demuestra que la representación gráfica de ϕ en función de F da una curva de imanación para la combinación de las partes X e Y . Así, las dos curvas de imanación se reducen a una sola correspondiente a la estructura equivalente del núcleo.

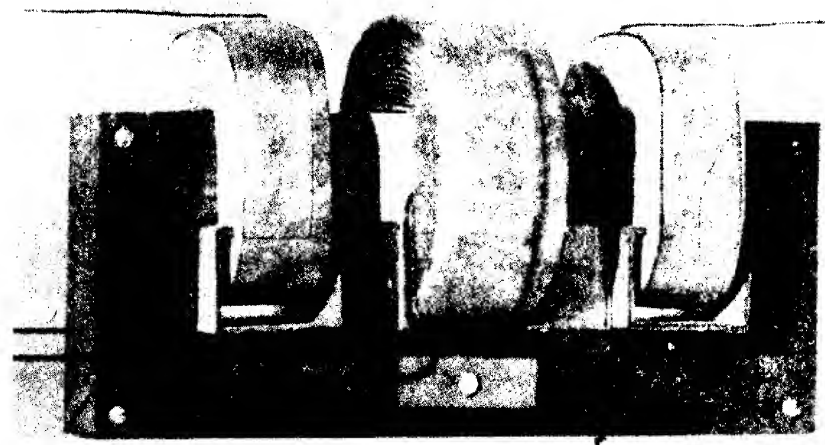
El método gráfico lleva consigo la preparación preliminar, raramente necesaria en el método de aproximaciones sucesivas, la cual puede aplicarse a la resolución de estructuras magnéticas más complicadas. En los problemas en que se desee el valor de ϕ para uno o dos valores de F solamente, el método de las aproximaciones sucesivas combinado con el sentido común requerirá menos tiempo. Si se desea ϕ para varios valores diferentes de F , el método gráfico resultará el más conveniente ya que, una vez realizada la preparación, el tiempo requerido para obtener ϕ para los valores especificados de F es muy corto y el tiempo total resultará, probablemente, menor que el que llevaría el método de las aproximaciones sucesivas. Finalmente, cuando se desea una curva de imanación completa, probablemente serán necesarias muchas soluciones, en cuyo caso el cálculo directo de F para diferentes valores supuestos de ϕ que cubran el dominio deseado constituirá, probablemente, el método más rápido. Para saber qué método es el más adecuado a cada problema particular, lo mejor es familiarizarse con los distintos aspectos de cada método. Estos temas volverán a mencionarse al tratar problemas en los que intervengan entrehierros.

5. CIRCUITOS MAGNÉTICOS CON ENTREHIERROS

Los circuitos magnéticos de muchos dispositivos contienen entrehierros en serie con el camino ferromagnético del flujo. Un entrehierro no es más que un espacio de aire intercalado en el circuito magnético y su existencia puede deberse a razones mecánicas o de construcción, a la necesidad de modificar el comportamiento magnético del circuito a fin de que el dispositivo funcione de alguna manera especial, o a la necesidad de crear un campo magnético en el aire en alguna región determinada. En las máquinas rotatorias, por ejemplo, los entrehierros existentes entre rotor y estator se deben a razones mecánicas y frecuentemente existen otros entrehierros dentro de los circuitos magnéticos del rotor y del estator debidos a la limitación inherente a la construcción de un diseño económico. En las bobinas con núcleo de hierro suelen introducirse entrehierros a fin de lograr que la autoinducción del elemento sea esencialmente independiente de la corriente que circula por la bobina para valores de su intensidad contenidos en un dominio prefijado de trabajo y, al propio tiempo, que la autoinducción sea mayor que la que tendría la misma bobina con núcleo de aire.

Siempre que se intercale un entrehierro en serie en un circuito magnético de

material ferromagnético, se produce un incremento de la reluctancia del camino magnético. En determinados dispositivos —por ejemplo en los transformadores— los núcleos, para evitar este aumento de reluctancia, pueden formarse con láminas en forma de marco rectangular o de corona circular, si bien, a causa de las complicaciones que presenta devanar una bobina sobre un núcleo magnético cerrado, dichos núcleos se emplean tan sólo cuando los efectos perniciosos de los entrehierros en las uniones de las láminas superan el costo adicional que entraña el devanado sobre núcleo cerrado. Muchos transformadores de intensidad utilizados para medidas eléctricas, los cuales deben tener caminos magnéticos de baja reluctancia, contienen núcleos anulares laminados exentos de entrehierros. Además, ciertos transformadores de gran calidad utilizados en circuitos de telecomunicación, utilizan núcleos constituidos por anillos de Permalloy pulverizado y prensado por razones de funcionamiento; las bobinas se devanan a máquina sobre una devanadera toroidal.



Núcleo y devanados de un transformador para tubo luminoso; primario 110 V, secundario 15 000 V, 30 mA. Los caminos en paralelo y los entrehierros hacen difícil el cálculo de este circuito magnético. (Cortesía de General Electric Co.)

Los núcleos de la mayoría de los transformadores se forman con tiras de chapa de lámina solapadas, apiladas en la forma indicada en la figura 5. Las bobinas se devanan aparte y se deslizan por las ramas del núcleo antes de que se junten las láminas de un extremo. Muchos núcleos de transformadores de audiofrecuencia están constituidos por láminas troqueladas en forma de E y cerrados por otras láminas troqueladas rectangulares de manera que, al ser más corta la rama central de la E dejen un entrehierro entre ella y la rama recta de cierre. En la figura 12 de la página 19 pueden verse diversas formas de láminas. Incluso en el caso de constituir el núcleo con láminas solapadas, aparecen pequeños entrehierros entre los extremos de las láminas y habrá que tener en cuenta su efecto sobre la reluctancia total cuando se efectúe el diseño. Modernamente se han desarrollado, en escala industrial, métodos para la construcción de núcleos de transformadores de distribución consistentes en

hacer pasar una tira continua de material a través de las bobinas ya devanadas*. Este método proporciona un núcleo cuya reluctancia es esencialmente la del hierro

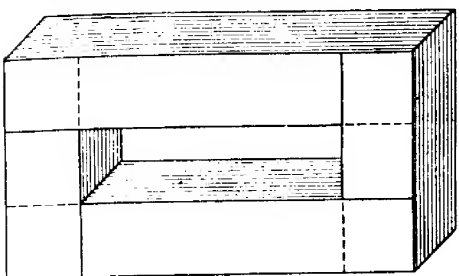


FIG. 5. Constitución de un núcleo de transformador tipo de núcleo.

y en el cual los caminos del flujo se mantienen en la dirección del grano. Otro método consiste en devanar en espiral una cinta sobre un mandril, impregnándola de un aislante y abriendo luego el núcleo así formado, de manera que sobre el núcleo puedan deslizarse bobinas ya formadas**. Este núcleo tiene entrehierros, pero los caminos del flujo se mantienen en la dirección del grano. También pueden mantenerse los caminos del flujo en la dirección del grano con un esquema especial de chapas conjuntadas que tienen ángulos de interconexión de 45°. En particular, en el caso de los transformadores de alta tensión, todavía se emplea la construcción consistente en chapas solapadas, debido a que las dificultades que surgen al formar una bobina de alta tensión bien aislada sobre un núcleo cerrado constituido por chapas rectangulares como las de las figuras 2 y 3 son tales que hacen prohibitivo el proceso, desde un punto de vista económico.

6. FLUJOS DISPERSO Y DE PÉRDIDAS

Cuando se intercala un entrehierro en un circuito magnético, el flujo se desparra por las cercanías del entrehierro en la forma indicada por las líneas de fuerza de la figura 6 y la inducción magnética en el entrehierro se distribuye en forma no uniforme. El flujo que termina cerca de los bordes del entrehierro recibe el nombre de *flujo disperso*. Debido a esta dispersión del flujo, la reluctancia aparente del entrehierro no es la del espacio de aire de iguales dimensiones que el entrehierro.

Como la permeabilidad del hierro suele ser cientos de veces mayor que la del aire, la reluctancia de un entrehierro, incluso siendo corto, suele ser grande frente a la de la parte de hierro del circuito magnético. Por tanto, entre partes del núcleo no inmediatamente adyacentes al entrehierro podrán existir diferencias de potencial magnético relativamente grandes. Estas diferencias de potencial crean un flujo en el aire entre dichas partes del núcleo, al que se da el nombre de *flujo de pérdidas*, que frecuentemente tiene un valor apreciable y origina

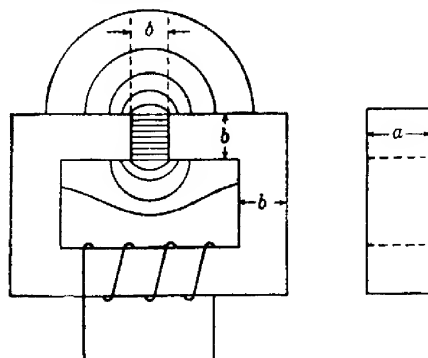


FIG. 6. Circuito magnético de una bobina con núcleo de hierro con entrehierro, pudiéndose ver los flujos disperso y de pérdidas.

* Este proceso de fabricación y otro que sirve para lo mismo se hallan ilustrados en las figuras 6 y 8 del capítulo XI.

** Véanse las figuras 9 y 10 del capítulo XI.

un aumento considerable de la inducción magnética en ciertas partes del núcleo. El diseño de algunos electroimanes es tal que el entrehierro es atravesado por bastante menos de la mitad del flujo creado por la bobina de excitación.

Los entrehierros de las máquinas rotatorias introducen nuevas complicaciones. En la figura 7 puede verse el entrehierro de una dinamo corriente. Por razones referentes a las características de funcionamiento de la máquina, el entrehierro suele presentar mayor separación en los bordes que en el centro de la cara polar, y los devanados del inducido suelen hallarse embutidos en ranuras practicadas en las láminas constituyentes del inducido. El flujo que atraviesa el inducido forma flecos curvados que van de los bordes de las piezas polares a los de los dientes del rotor, y debido a la gran reluctancia del entrehierro, el flujo que va de polo a polo sin penetrar en el núcleo del inducido —es decir, el flujo de pérdidas— se eleva frecuentemente al 25 por 100 del flujo en el núcleo de los polos de la excitación.

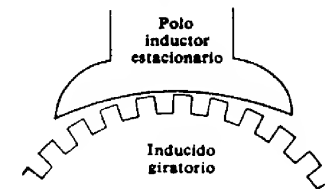


FIG. 7. Entrehierro de una dinamo corriente.

El cálculo de los efectos de los flujos disperso y de pérdidas debe realizarse con precisión al diseñar muchas piezas. Dicho cálculo entraña un problema de campo magnético tridimensional que puede resolverse aproximadamente por métodos gráficos. Estos métodos suelen ser laboriosos y la solución obtenida vale solamente para el entrehierro y núcleo en cuestión. Por tanto, se han desarrollado métodos aproximados para evaluar los flujos disperso y de pérdidas, alguno de los cuales se presentan en los apartados 7 a 12.

7. MÉTODOS DE CÁLCULO DE ENTREHIERROS CORTOS

Cuando el entrehierro es corto frente a sus dimensiones transversales y tiene caras paralelas, los cálculos del circuito magnético se pueden realizar con una aproximación que se acerca mucho a los límites de utilización de la mayoría de los datos magnéticos. Al igual que en los otros cálculos de circuitos magnéticos, el método da el flujo total y la inducción magnética media del entrehierro. La determinación de la verdadera distribución del flujo en el entrehierro, la distribución de los flujos disperso y de pérdidas, constituye un problema gráfico de campo. El procedimiento que utilizaremos consiste, primeramente, en despreciar el efecto del flujo de pérdidas. Luego, se tiene en consideración el efecto de la dispersión para el cálculo del flujo total, sustituyendo el verdadero entrehierro con caras paralelas con su flujo disperso por un entrehierro de caras paralelas que se supone carece de dispersión, pero que tiene una reluctancia equivalente a la del verdadero entrehierro. Si el núcleo tiene iguales dimensiones transversales en ambas caras del entrehierro, el entrehierro equivalente se supone que tiene una longitud δ igual a la del entrehierro verdadero, pero que tiene un área de la sección recta

$$A = (a + \delta)(b + \delta), \quad (3)$$

donde a y b son las dimensiones transversales de las caras verdaderas del núcleo (fig. 6). En otras palabras, las dimensiones transversales del entrehierro equivalente son las dimensiones originales incrementadas en la longitud δ del entrehierro.

Si una de las caras del entrehierro tiene una de sus dimensiones transversales mucho mayor que la dimensión correspondiente de la otra cara, la corrección a utilizar será 2δ . La cantidad 2δ sale de una consideración de imágenes, porque la configuración de las líneas del flujo disperso, cuando una cara es grande y la otra pequeña, es análoga a la de un entrehierro de doble longitud y dimensiones transversales que sean las mismas para ambas caras paralelas y de valor igual a las de la cara menor.

La experiencia indica que estas reglas suelen dar resultados satisfactorios si la corrección aplicada no supera a una quinta parte de la dimensión transversal a la que se aplica.²

En la región del entrehierro equivalente, la inducción magnética se supone uniforme. Por tanto, entre las caras del núcleo,

$$H \text{ (oersted)} = B \text{ (gauss)} \quad (4)$$

$$H \text{ (ampere-espira/cm)} = \frac{1}{0.4\pi} B = 0.796 B \text{ (gauss)} \quad (5)$$

$$H \text{ (lenz no racionalizado)} = 10^7 B \text{ (tesla)} \quad (6)$$

$$H \text{ (lenz racionalizado)} = \frac{10^7}{4\pi} B \text{ (tesla)} \quad (7)$$

Como la intensidad de flujo se supone uniforme, el flujo total será

$$\phi = BA. \quad (8)$$

Si se conoce el flujo o la inducción magnética, podrá calcularse el campo magnético en el aire H_a mediante las ecuaciones 4, 5, 6 ó 7, ó bien podrá buscarse en la curva para el aire de las figuras 1a y 1b. Los valores de las abscisas de la curva para el aire de dichas figuras, deben multiplicarse por 200. Análogamente, el campo magnético H_s de la parte de acero del núcleo, puede obtenerse de las curvas de las figuras 1a ó 1b. La fuerza magnetomotriz del circuito será

$$F = H_a l_a + H_s l_s \quad (9)$$

donde l_a y l_s son, respectivamente, las longitudes del entrehierro de aire y del camino de acero.

Si se conoce la fuerza magnetomotriz total aplicada, no será posible una solución analítica directa para el flujo a causa de las propiedades no lineales del núcleo, pero puede emplearse con facilidad una solución por aproximaciones sucesivas como la indicada en el apartado 4. Como el entrehierro suele requerir la mayor parte de los ampere-espira de excitación, se obtendrá, en primera aproximación, un valor del flujo, considerando que la totalidad de los ampere-espira se emplean en vencer la reluctancia del entrehierro. Salvo en el caso en que este flujo dé un valor de la inducción magnética más elevado que el del codo de la curva de imanación del material

² En el caso de entrehierros que tengan caras no paralelas, bordes achaflanados, dientes u otra geometría complicada, las longitudes y áreas equivalentes se obtienen mediante reglas semiempíricas. En el ejemplo del apartado 12 se presenta un entrehierro dentado. La manera de calcular la permanencia de diversas clases de caminos en aire puede verse HERBERT C. ROTERS, *Electromagnetic Devices* (New York: John Wiley & Sons, 1942), cap. V.

magnético, el verdadero valor del flujo será inferior en un pequeño tanto por ciento (ordinariamente) a este valor. No obstante, a veces se emplea un método gráfico directo de solución, análogo al descrito en el apartado 4, para determinar el flujo. Para caminos en aire y en acero conectados en serie

$$F = U_a + U_s, \quad (10)$$

donde los subíndices a y s se refieren, respectivamente, al aire y al acero. Si se desprecian entonces los efectos de las pérdidas, aunque no necesariamente de la dispersión, el flujo en el acero es igual al flujo que atraviesa el entrehierro, o sea

$$\phi_a = \phi_s. \quad (11)$$

La solución es el valor del flujo para el cual U_a y U_s satisfagan la ecuación (10).

Podría tenerse una solución gráfica que satisfaga las ecuaciones (10) y (11) superponiendo una gráfica de ϕ_s en función de U_s y otra de ϕ_a en función de U_a , invirtiendo ésta respecto al eje de ordenadas. El origen de coordenadas de la gráfica del entrehierro se coloca en el punto del eje de abscisas de la gráfica del acero que corresponda a la fuerza magnetomotriz aplicada total F . Las coordenadas del punto de intersección de ambas gráficas son el flujo total ϕ_s y la caída de potencial magnético U_s en el acero. En la figura 8 se ilustra la construcción a realizar para la solución gráfica.

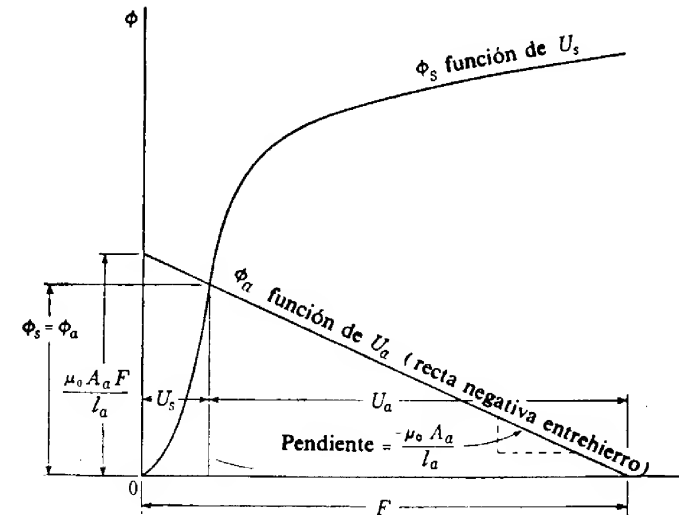


FIG. 8. Construcción correspondiente a la solución gráfica del flujo de un circuito que tenga un camino de acero de sección uniforme en serie con un entrehierro.

En la figura 8, la relación entre ϕ_s y U_s se obtiene de la curva de inducción normal del material. La curva de imanación del entrehierro se obtiene de la reluctancia calculada del entrehierro

$$R_a = \frac{l_a}{\mu_0 A_a}, \quad (12)$$

donde μ_0 es una constante, l_a es la longitud del entrehierro y A_a es el área de la sección recta aparente; es decir, el área de la sección recta del entrehierro equivalente dada por la ecuación (3), que tiene en cuenta la dispersión. La relación entre ϕ_a y U_a es:

$$\phi_a = \frac{U_a}{\mathcal{R}_a} = \frac{\mu_0 A_a}{l_a} U_a. \quad (13)$$

La localización de la línea de imanación para el entrehierro en la figura 8 se realiza fácilmente por el hecho de cortar al eje ϕ en

$$\phi = \frac{\mu_0 A_a}{l_a} F. \quad (14)$$

El valor de ϕ dado por la ecuación (14) es el flujo en el entrehierro que resultaría si la fuerza magnetomotriz F se aplicara totalmente al entrehierro. La pendiente de esta recta es igual a la permeancia (recíproco de la reluctancia) cambiada de signo del entrehierro equivalente. Por ello suele llamársele recta negativa del entrehierro. La intersección de la recta negativa del entrehierro con la curva del acero es, pues, la solución buscada de las ecuaciones (10) y (11), ya que dicho punto es el único que satisface simultáneamente a estas ecuaciones.

Como la curva representativa del flujo en función de la diferencia de potencial magnético se deduce ordinariamente de la curva de imanación normal —es decir, B en función de H — frecuentemente será más conveniente el empleo directo de la curva de imanación. Si se multiplican por $1/A_s$ las ordenadas de la figura 8 y por $1/l_s$ las abscisas, la curva que da ϕ , es función de U , se convierte en la que da B_s en función de H_s y las coordenadas del punto de intersección con la recta negativa del

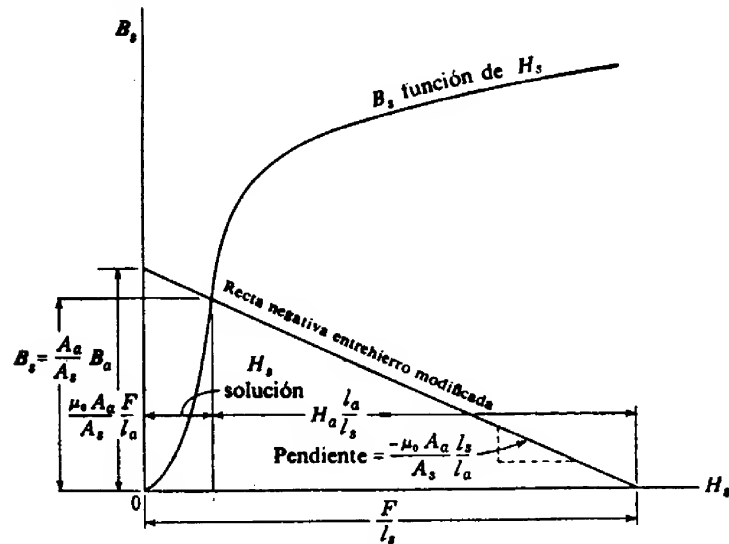


FIG. 9. Modificación de la figura 8 para el empleo directo de la curva de B_s en función de H_s .

entrehierro modificada se convierten en la inducción magnética en el acero B_s y el campo magnético en el acero H_s . Los valores de B_a y H_a no vienen dados directamente por la recta negativa del entrehierro modificada. Para el punto de intersección, se tienen los valores

$$B_a = \frac{B_s A_s}{A_a}, \quad (15)$$

$$H_a = \frac{F}{l_a} - \frac{H_s l_s}{l_a}. \quad (16)$$

La recta negativa del entrehierro corta a los ejes B_s y H_s en

$$H_s = \frac{F}{l_s}, \quad (17)$$

$$B_s = \frac{\mu_0 A_a}{A_s} \frac{F}{l_a}. \quad (18)$$

En la figura 9 pueden verse las gráficas de la construcción modificada.

Cuando haya que realizar un estudio del flujo resultante como función de la longitud del entrehierro, será de utilidad una solución gráfica como las indicadas en las figuras 8 ó 9. El valor absoluto de la pendiente de la recta negativa del entrehierro es inversamente proporcional a la longitud del entrehierro l_a . Así, en la figura 8, las intersecciones con la curva ϕ , de un grupo de rectas que pasen por el punto F del eje de abscisas, dan los valores de ϕ , para las longitudes de entrehierro correspondientes a las pendientes de las rectas respectivas. En la figura 9 pueden trazarse las rectas correspondientes, para dar los correspondientes valores de B_s .

Cuando el entrehierro es fijo y se desea el valor del flujo en función de la fuerza magnetomotriz, la construcción gráfica indicada en las figuras 8 y 9 puede no ser la más útil. En estas condiciones, puede ser más conveniente el empleo de una curva del flujo en función de la fuerza magnetomotriz para el núcleo en cuestión. Dicha curva sirve tan sólo para las dimensiones del núcleo y entrehierro y para el material supuestos para el problema. Se puede obtener la curva realizando un proceso llamado *cizalladura* de la curva del acero hacia la recta del entrehierro. Suponiendo despreciable el flujo de pérdidas, el proceso se realiza en la forma indicada en la figura 10. Se representa la curva para la parte de acero del núcleo en función de U_s con ayuda de la figura 1b para el material magnético empleado. Los valores de las abscisas son iguales a $H_s l_s$ y los de las ordenadas a $B_s A_s$. Análogamente, se representa ϕ_a en función de U_a , siendo los valores de las abscisas $H_a l_a$ y los de las ordenadas $B_a A_a$. Se obtiene, entonces, la curva de la combinación acero-entrehierro tomando valores arbitrarios de ϕ y representándolos en función de la correspondiente suma de U_s y U_a , o sea F .

Los métodos de solución indicados en las figuras 8, 9 y 10 no solamente se aplican a problemas magnéticos, sino también, en general, a cualquier circuito conectado en serie compuesto por dos elementos pasivos, que pueden ser lineales o no, y una fuerza

aplicada dada; o a una combinación paralela de dos elementos pasivos y una intensidad de corriente o un flujo aplicado. Como ejemplo de esta generalidad, puede considerarse la analogía existente entre el circuito eléctrico al que se aplica una fuerza electromotriz fija en serie con una resistencia lineal o no, y el circuito magnético al que se aplica una fuerza magnetomotriz fija un material ferromagnético en serie con un entrehierro. La construcción gráfica indicada por las figuras 8 ó 10 puede

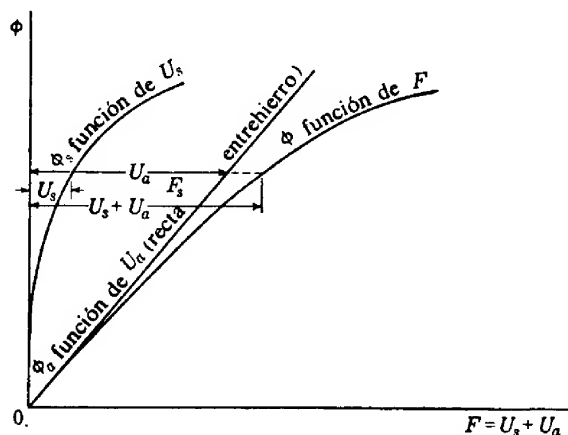


Fig. 10. Cizalladura de la curva del flujo para el acero hacia la recta del entrehierro

aplicarse igualmente a una conexión constituida por una batería de fuerza electromotriz E en serie con una resistencia R y una carga que tenga una característica especificada gráficamente por la intensidad I de la corriente en función de la tensión V . En este caso, E es homóloga de F , I de ϕ_s , y la tensión aplicada a R es homóloga de U_s . En la gráfica de I en función de V , puede trazarse la *recta negativa de resistencia* partiendo del punto E del eje de abscisas con una pendiente $-1/R$. La ordenada de intersección de la recta negativa de resistencia y la gráfica de I en función de V será el valor de la intensidad de la corriente que circula por el circuito. Para la cizalladura —es decir, para obtener una curva de I en función de E — se traza la *recta de resistencia* a partir del mismo origen que la curva de I en función de V y se representan gráficamente las caídas de tensión de los elementos en serie correspondientes a valores arbitrarios de I .

Hasta ahora, para determinar la relación existente entre flujo y fuerza magnetomotriz total en el circuito magnético serie, o la característica volt-ampere de un circuito eléctrico serie, sólo se ha mencionado un procedimiento gráfico como el indicado en la figura 10. Sin embargo, no debe pasarse por alto el hecho de que también pueden tabularse los datos presentando los valores de U_s y U_a para un mismo valor de ϕ y sumarse dichos pares de valores para obtener la fuerza magnetomotriz total F . A menos que, por otras razones, se desee tener las gráficas, el procedimiento de tabulación será, probablemente, más rápido que el gráfico ya que se ahorra el tiempo necesario para dibujar las curvas.

8. EJEMPLO DE CÁLCULO PARA UN CIRCUITO FERROMAGNÉTICO SENCILLO CON ENTREHIERRO CORTO

La estructura magnética de la figura 6 es análoga a la que suele emplearse en las bobinas de reactancia, con la diferencia de que el devanado debería estar sobre la rama que contiene el entrehierro. Está constituida por chapas de acero de transformador con un 4,25 % de silicio y espesor 0,35 mm apiladas formando una pila de 5 cm de espesor (dimensión a). El factor de apilamiento para esta estructura es 0,90. La dimensión b es de 6 cm. La longitud δ del entrehierro es de 2,5 mm. La longitud media de la parte de acero del circuito magnético es de 75 cm. El problema consiste en hallar la fuerza magnetomotriz necesaria para establecer un flujo total de 250 000 Mx.

Solución: Haciendo uso de la ecuación (3) para un entrehierro corto, el área de la sección recta equivalente del entrehierro es $(5,0 + 0,25)(6,0 + 0,25) = 32,8 \text{ cm}^2$. La inducción magnética media en el entrehierro será, pues, igual a $250000/32,8 = 7600 \text{ G} = 0,76 \text{ T}$. De la curva para el aire de la figura 1a, resulta que el campo magnético en el aire para esta inducción magnética media es de $3400 \times 200 = 680000 \text{ L}$. Como la longitud del entrehierro es de 2,5 mm o sea, 0,0025 m, los ampere-espira requeridos por el entrehierro serán 1700 aproximadamente.

El área de la sección recta total del acero es $30 \times 0,9 = 27 \text{ cm}^2$. La inducción magnética en el acero será, pues, $250000/27 = 9260 \text{ G} = 0,926 \text{ T}$. Si se toma la curva 3 de la figura 1a para representar las propiedades de este acero, el campo magnético en las chapas será 180 T. La caída de potencial magnético requerida por las chapas será, pues, $180 \times 0,75 = 135 \text{ ampere-espira}$. La fuerza magnetomotriz requerida por la estructura magnética completa será, por tanto, 1835 ampere-espira. Evidentemente, las dos últimas cifras no pueden considerarse significativas.

Solución que entraña una corrección grosera debida a las pérdidas: La solución anterior tiene en cuenta el aumento de inducción magnética en el hierro debido al flujo disperso. En realidad, habrá también un flujo de pérdidas considerable que aumentará aún más la inducción magnética en el hierro. Este flujo de pérdidas es función de la longitud del entrehierro, de la forma de las caras polares, del tamaño, forma y situación de las bobinas imanadoras y, en menor grado, de otros varios factores. Los experimentos realizados con reactancias del tipo considerado en este problema que tengan una bobina de proporciones medianas situada sobre el entrehierro o cerca de él, ponen de manifiesto que el flujo en el hierro es mayor que el obtenido con la corrección del flujo disperso. Una corrección grosera que da un valor total más aproximado del flujo, consiste en tomar 2δ en vez de δ al hallar el área del entrehierro equivalente. A esta corrección se la puede llamar corrección de *dispersión y pérdidas*.

El área del entrehierro equivalente, utilizando la corrección 2δ , será $(5,0 + 0,5)(6,0 + 0,5) = 35,75 \text{ cm}^2$. La inducción media en el entrehierro será $250000/35,75 = 6993 \text{ G} = 0,70 \text{ T}$. El campo magnético en el entrehierro será $3000 \times 200 = 600000 \text{ L}$ y la caída de potencial magnético en el entrehierro 1500 ampere-espira. La inducción magnética y caída de potencial en el acero son las mismas de antes, dando una fuerza magnetomotriz total de unos 1600 ampere-espira.

Aun cuando la longitud de la parte laminada de la estructura sea 300 veces mayor que la longitud del entrehierro, la parte laminada requiere solamente $135/1600$, es decir, un 8 % de los ampere-espira del circuito completo. Esta condición significa que aun cuando las chapas de hierro tengan una curva de imanación

no lineal, el circuito magnético completo tiene una curva de imanación total que, para muchos fines, puede considerarse esencialmente recta hasta poco más allá de los 250 000 Mx. Luego, siempre que el flujo no exceda demasiado de 250 000 Mx, la bobina imanadora podrá considerarse que tiene, para muchas aplicaciones, auto-inducción constante.

La presencia del material magnético en el núcleo es muy eficaz para elevar el flujo, como puede verse comparando el flujo total de esta estructura con el flujo total en el núcleo de una bobina distribuida uniformemente sobre un núcleo no magnético de igual forma que el núcleo de hierro laminado. En primera aproximación

$$B_{\text{núcleo aire}} = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{1\,600}{0,75} = 26 \times 10^{-4} \text{ T} = 26 \text{ G} \quad (19)$$

Si se supone la sección del núcleo igual a 30 cm², entonces

$$\phi_{\text{núcleo aire}} = 26 \times 30 = 780 \text{ Mx}, \quad (20)$$

y

$$\frac{\phi_{\text{núcleo hierro}}}{\phi_{\text{núcleo aire}}} = \frac{250\,000}{780} = 320 \quad (21)$$

que es sensiblemente igual al cociente entre la longitud del circuito magnético y la del entrehierro, que es 300. Esta comparación representa, no obstante, una situación un tanto ficticia, porque el flujo no seguiría el mismo camino por el aire al estar ausente el hierro. Si se hace la comparación basándose en contrastar el flujo total creado por el dispositivo de núcleo de hierro con una bobina de núcleo de aire que tenga la misma longitud de hilo de igual sección que la bobina de núcleo de hierro, el contraste es menos favorable para el dispositivo de núcleo de hierro. Por ejemplo, si se devana el hilo para constituir una bobina de la mejor Q posible*, el cociente representado por la ecuación 21 es del orden de 20. No se puede hacer una comparación adecuada de las eficacias de las bobinas con núcleo de hierro y con núcleo de aire, a menos que pueda establecerse la base de comparación en función de lo que tengan que lograr las bobinas. El núcleo de chapa de acero conduce y concentra el flujo en forma eficaz o, en otro sentido, concentra eficazmente en el entrehierro la fuerza magnetomotriz de toda la bobina independientemente de la situación del devanado sobre el núcleo (salvo efectos de pérdidas) y crea en el entrehierro una región de inducción magnética sustancialmente constante. En la bobina simple de núcleo de aire no se pueden determinar los caminos del flujo y no existe ninguna región extensa en la que sea uniforme la inducción magnética.

Si se especifica la fuerza magnetomotriz total, no será posible una solución directa para el flujo a causa de las propiedades no lineales del material del núcleo. Puede obtenerse con facilidad la solución por un método de aproximaciones sucesivas, o por un método gráfico, según se indicó en el apartado 4. Como el método de aproximaciones sucesivas es el mismo que se ilustró con la solución dada en el apartado 4 y para un circuito más complicado en el 9, sólo se dará ahora el método gráfico. Para este ejemplo, el núcleo será otra vez el de la figura 6 con las mismas dimensio-

* Una bobina circular de hilo de cobre que tenga cuadrada la sección recta del devanado y un diámetro medio 3,02 veces mayor que la profundidad del devanado.

nes y material utilizados en el ejemplo anterior y con la fuerza magnetomotriz de 1 600 ampere-espiras halladas en el ejemplo anterior.

Solución: Primeramente, se traza la curva del flujo en función de la diferencia de potencial magnético utilizando los datos de la figura 1a. Los valores utilizados de la diferencia de potencial magnético son el producto de 0,75 por el campo magnético en lenz, ya que la longitud equivalente del núcleo es 0,75 m, y los valores del flujo en maxwell serán el producto de la inducción magnética en gauss por 27 que son los centímetros cuadrados del área de la sección total del núcleo ferromagnético. Dicha curva es la de la figura 11 (análoga a Fig. 8). De la ecuación 14 se deduce que la intersección de la recta negativa del entrehierro con el eje de ordenadas de la figura 11 se halla en

$$\phi_a = \frac{\mu_0 A_a}{l_a} F, \quad (22)$$

y operando en el sistema Giorgi racionalizado, en el cual $A_a = 32,8 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ y $l_a = 25 \times 10^{-4} \text{ m}$, se tiene

$$\phi = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 32,8 \times 10^{-4}}{25 \times 10^{-4}} 1\,600 = 264 \times 10^{-3} \text{ Wb} \quad (23)$$

y habida cuenta de que

$$1\,000 \text{ Mx} = 10^{-3} \text{ Wb} \quad (24)$$

puede darse el resultado anterior en el sistema de unidades electromagnéticas cegesimales escribiendo $\phi = 264\,000 \text{ Mx}$. La recta negativa del entrehierro corta al eje F en el punto 1600 ampere-espira. La solución del problema, dada por las coordenadas del punto de intersección de la curva con la recta del entrehierro de la figura 11, es aproximadamente 250 000 Mx, en concordancia con los datos de la solución anterior.

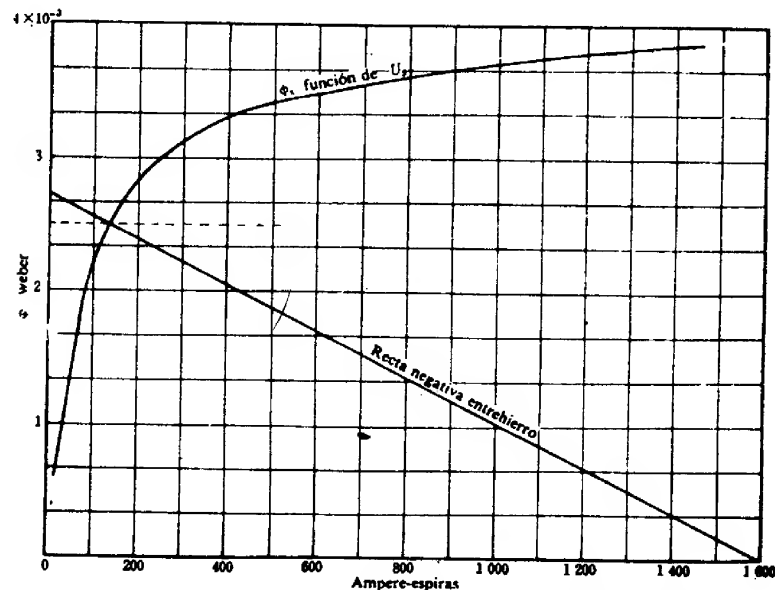


FIG. 11. Solución gráfica para el flujo, del ejemplo del apartado 8.

La solución indicada en la figura 12, análoga a la figura 9, trabaja con B y H en vez de con ϕ y F . En la figura 12, se traza la curva de B en función de H para el acero con ayuda de los datos obtenidos en la figura 1a. La intersección de la recta negativa del entrehierro con el eje B , se halla en

$$B = \frac{\mu_0 A_a F}{A_a l_a} \quad (25)$$

El valor de A_a debe ser el área de la sección recta del entrehierro equivalente; es decir, el área de la cara real del entrehierro corregida de dispersión y pérdidas. Sustituyendo valores numéricos en la ecuación (25), se tiene, tomando unidades Giorgi

$$B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 32,8 \times 10^{-4} \times 1\,600}{27 \times 10^{-4} \times 25 \times 10^{-4}} = 0,980 \text{ T} \quad (26)$$

que en el sistema de unidades electromagnéticas equivale a 9 800 G.

La intersección de la recta negativa del entrehierro con el eje H , se halla en F/l_s , es decir, en

$$\frac{F}{l_s} = \frac{1\,600}{0,75} = 2\,133 \text{ L} \quad (27)$$

La solución dada por las coordenadas del punto de intersección de las dos gráficas de la figura 12 es $B_s = 0,92 \text{ T}$. El flujo total ϕ será aproximadamente igual a $250 \times 10^{-3} \text{ Wb}$, lo cual concuerda con la solución obtenida con la figura 11.

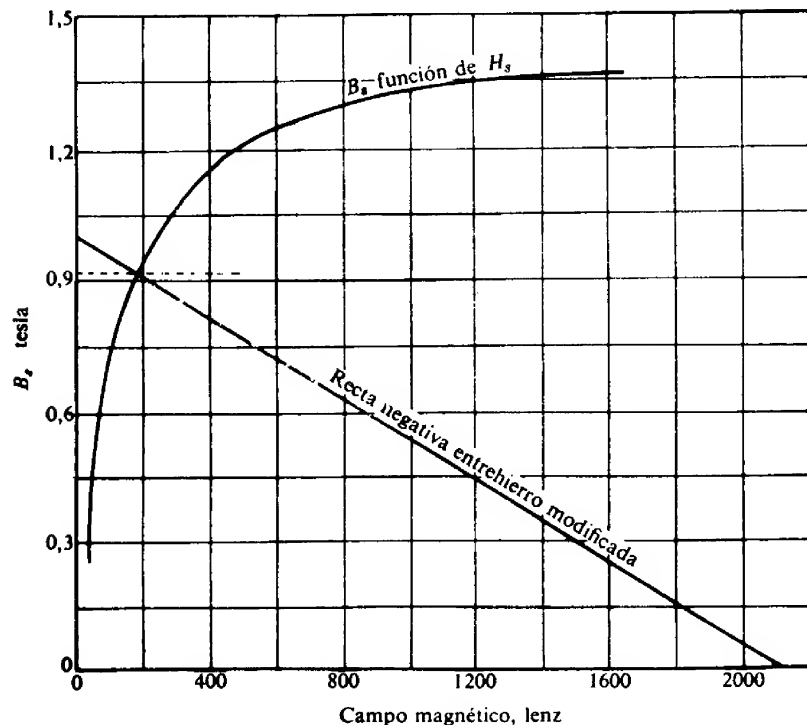


FIG. 12. Cálculo gráfico de la inducción magnética en el ejemplo del apartado 8.

Los factores que influyen en la elección del método utilizado en cualquier problema particular son, claro está, los mismos que se indicaron en el apartado 7.

9. EJEMPLOS DE CÁLCULOS PARA CAMINOS SERIE-PARALELO DE MATERIAL FERRO-MAGNÉTICO Y ENTREHIERROS CORTOS

En ciertos transformadores se desea que entre primario y secundario exista un acoplo magnético relativamente débil, en cuyo caso suele utilizarse un núcleo del tipo representado en la figura 13. Las bobinas se colocan sobre las ramas X y Z y parte del flujo creado por sus fuerzas magnetomotrices se desvía por la rama Y , debilitando así el acoplo magnético. Las propiedades no lineales del material del núcleo hacen que la fracción del flujo total desviada por la rama Y varíe con el grado de saturación magnética.

En este ejemplo, se establece un flujo de 380 000 Mx en la rama X de la figura 13, creado por una bobina devanada sobre dicha rama. Hay que determinar los ampere-espira de esta bobina. El circuito magnético está constituido por chapas de acero de transformador con un 4,25 % de silicio y de espesor 0,35 mm. El factor de apilamiento para esta estructura es 0,90. Al igual que en ejemplos anteriores, se desprecia el flujo de pérdida y se supone que la inducción magnética es uniforme en las secciones de cada parte componente de la estructura magnética. Se supone que los caminos aXb y aZb de la estructura tienen sección constante y una longitud de 50 cm. La longitud media del núcleo en la rama Y se supone igual a 20 cm.

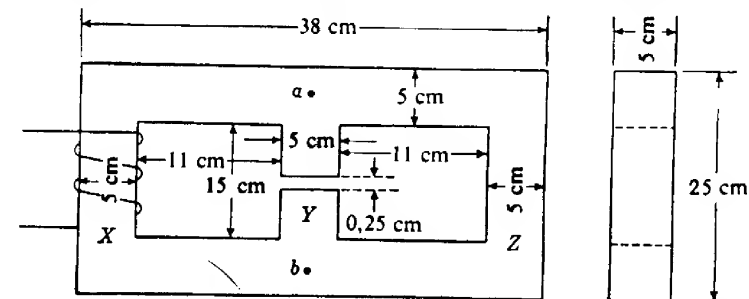


FIG. 13. Estructura magnética con un entrehierro y caminos serie-paralelo.

Solución: El área de la sección recta en cada rama del núcleo es igual a $5 \times 5 \times 0,9 = 22,5 \text{ cm}^2$. El área de la sección recta del entrehierro, corregida de dispersión, es $5,25 \times 5,25 = 27,6 \text{ cm}^2$. La inducción magnética en la rama X es $380\,000/22,5 = 16\,890 \text{ G} = 1,689 \text{ T}$. La componente de la diferencia de potencial magnético necesaria para crear esta inducción magnética en la rama aXb se calcula mediante la curva 3 de la figura 1a y la longitud media de la rama aXb . El campo magnético para esta inducción es 10 000 L; luego, la caída de potencial magnético en el acero será $10\,000 \times 0,50 = 5\,000$ ampere-espira. El flujo total de 380 000 Mx en el tramo aXb se divide entre las ramas Z e Y de tal manera que la caída de potencial magnético de a a b en la figura 13 sea la misma por el tramo aZb que por el aYb . Debido a las diferentes propiedades no lineales de estos tramos, no es posible un ulterior cálculo directo. La división del flujo no puede calcularse directamente, por lo que habrá que recurrir a un método de aproxi-

maciones sucesivas. De entre las distintas variedades de este método, la siguiente resulta sencilla y eficaz:

Se supone un flujo en el entrehierro o en la rama Y. Se calcula la fuerza magnetomotriz de a a b necesaria para crear el flujo supuesto. Esta fuerza magnetomotriz actúa también sobre el tramo aZb y como se supone que la sección recta del tramo es uniforme, se podrá calcular fácilmente el flujo en él. Se suma este flujo al de la rama Y. Si la magnitud del flujo de la rama Y es la correcta, la suma de los flujos en las ramas Z e Y deberá ser igual al flujo deseado en la rama X. Si la suposición no es correcta, deberá repetirse el proceso con un valor supuesto diferente.

A menos que la inducción magnética en la rama Z sea suficiente para casi saturar el acero, el tramo aZb cortocircuitará, probablemente, al tramo aYb a causa de la reluctancia relativamente grande del entrehierro. Como primer ensayo puede suponerse en la rama Y un flujo pequeño, de unos 80 000 Mx. La inducción magnética correspondiente en el entrehierro será $80\,000/27,6 = 2\,899\text{ G} \approx 0,29\text{ T}$. De la ecuación 7 o de la curva para el aire de las figuras 1a o 1b, resulta un campo magnético correspondiente aproximadamente igual a 230 000 L. Como la longitud del entrehierro es de 0,25 cm, es decir $25 \times 10^{-4}\text{ m}$, la caída de potencial magnético en el entrehierro será de 575 ampere-espira. Las curvas de imanación de las figuras 1a y 1b indican que la caída de potencial magnético en las láminas de la rama Y a la inducción magnética correspondiente de $80\,000/22,5 = 3\,555\text{ G}$, es despreciable frente a los 575 ampere-espira del entrehierro. Luego, si el flujo de la rama Y tiene el valor supuesto de 80 000 Mx, la caída de potencial magnético entre a y b será de unos 575 ampere-espira. Esta caída de potencial magnético, al actuar sobre la rama Z, crea un campo magnético de $575/0,50 = 1\,150\text{ L}$ aproximadamente que, según los datos de las figuras 1a y 1b establece una inducción magnética de 1,36 T. El flujo correspondiente en la rama Z será, pues, $13\,600 \times 22,5 = 306\,000\text{ Mx}$. El flujo en la rama X será, por tanto, de 386 000 Mx. Como este flujo es mayor que el especificado de 380 000 Mx, se hará un segundo ensayo utilizando un valor menor para el flujo de la rama Y.

TABLA III

Parte de circuito	Area cm ²	Longitud cm	Flujo Mx	Inducción T	Campo L	Fmm A-esp.
Rama X	22,5	50	380 000	1,689	10 000	5 000
			(especificado)			
Primera aproximación	Entrehierro	27,6	80 000	0,29	230 000	575
			(supuesto)			
	Rama Z	22,5	306 000	1,36	1 150	575
			$\phi_{\text{entrehierro}} + \phi_Z = 386\,000$ (demasiado grande)			
Segunda aproximación	Entrehierro	27,6	77 000	0,28	221 000	550
			(supuesto)			
	Rama Z	22,5	303 000	1,35	1 100	550
			$\phi_{\text{entrehierro}} + \phi_Z = 380\,000$			

Como la mayor parte del flujo total se halla en la rama Z y da una inducción magnética para la cual los efectos de saturación son importantes, la caída de potencial magnético entre a y b en el segundo ensayo no se reducirá proporcionalmente al error del resultado obtenido para la primera aproximación, sino mucho más. La caída de potencial magnético entre a y b es directamente proporcional al flujo supuesto en la rama Y por predominar la reluctancia del entrehierro; luego, habrá que reducir la estimación del flujo en la rama Y, no proporcionalmente al error del flujo de la rama Z calculado en la primera aproximación, sino mucho más.

Por tanto, en la siguiente aproximación se supondrá que el flujo en la rama Y es de 77 000 Mx. La inducción en el entrehierro será, entonces, de $77\,000/27,6 = 2\,790\text{ G} \approx 0,28\text{ T}$. El campo magnético en el entrehierro, dado por un procedimiento análogo al empleado en la primera aproximación, es de 221 000 L. La caída de potencial magnético en el entrehierro de longitud 0,25 m, es de 550 ampere-espira. Como, para esta inducción tan baja en las láminas de la rama Y, la caída de potencial magnético es despreciable frente a la caída de potencial magnético en el entrehierro, se toma como caída de potencial entre a y b la de 550 ampere-espira. Esta caída de potencial magnético está también aplicada a la rama Z y por tanto, el campo magnético en la rama Z será $550/0,50 = 1\,100\text{ L}$. De las figuras 1a y 1b se deduce que este campo establece una inducción magnética de 1,35 T. El flujo en la rama Z será, por tanto, $13\,500 \times 22,5 = 303\,000\text{ Mx}$. La suma de los flujos en las ramas Y y Z da para el flujo en la rama X el valor 380 000 Mx.

En todos los problemas de circuitos magnéticos, incluso en los más sencillos, la tabulación sistemática de los cálculos permite ahorrar mucho tiempo. Una tabulación como la indicada en la tabla III, sería muy ventajosa para la solución del ejemplo 4.

La fuerza magnetomotriz que ha de suministrar la bobina es igual a la suma de las caídas de potencial magnético en los tramos aXb y aZb . Dicha suma vale 5 550 ampere-espira.

10. CÁLCULOS PARA ENTREHIERROS LARGOS Y PARA CAMINOS DEL FLUJO DE PÉRDIDAS

El procedimiento descrito para entrehierros cortos es bastante satisfactorio mientras la menor dimensión del área de la sección recta del entrehierro no sea menor que el quíntuplo de la longitud de dicho entrehierro. No obstante, frecuentemente la longitud del entrehierro es comparable con, e incluso mayor que, las dimensiones transversales del entrehierro. En los circuitos que tienen entrehierros largos, los flujos de pérdidas pueden alcanzar valores varias veces mayores que los flujos útiles en el entrehierro. El cálculo de los flujos para entrehierros largos y el cálculo de los flujos de pérdidas deben realizarse desde el punto de vista del campo y no desde el del circuito. No obstante, si basta un cálculo del flujo total sin cálculo detallado de su distribución, se podrán seguir ciertos procedimientos muy útiles. Los procedimientos de diseño exigen mucho criterio y experiencia a causa de que la variedad de tamaños, formas y proporciones entre las estructuras magnéticas requieren la adaptación y perfeccionamiento de reglas generales a cada aplicación particular. Los detalles de estos procedimientos son demasiado complicados para tratarlos en este texto, si bien pueden presentarse ciertos principios generales importantes.

El flujo magnético existente entre dos superficies de material ferromagnético suficientemente separadas para requerir el estudio como problema de entrehierro largo o de flujo de pérdidas depende principalmente de las áreas de las superficies, de su curvatura media y de la diferencia de potencial magnético existente entre ellas. Depende mucho menos de la distancia de separación y orientación relativa de las superficies, pues la mayor parte de la reluctancia del camino del flujo se halla cerca de las superficies.

En el procedimiento de diseño, la estructura magnética real está representada por una estructura consistente en partes que tienen superficies de áreas casi iguales cuyas curvaturas medias son también muy próximas, pero que tienen una geometría de fácil expresión matemática. Como más conveniente se destacan las esferas,

semiesferas, cilindros o partes de cilindros, dado que la distribución del campo en torno a estas superficies es relativamente fácil de determinar. El procedimiento real es análogo al que se emplea para determinar la distribución del campo eléctrico en torno a superficies conductoras cargadas.

En el diseño de una estructura magnética destinada a crear una cierta inducción magnética en la bobina de un instrumento de medida, la inducción magnética deseada determina la diferencia de potencial magnético requerida en el entrehierro en el que se halla colocada la bobina. Luego, a fin de reducir al mínimo los flujos de pérdidas, las áreas de las superficies que no contribuyen al flujo en el entrehierro y la diferencia media de potencial magnético entre ellas deberá tener el mínimo valor compatible con las restricciones que pueda imponer el diseño práctico. En general, esta disposición se logra manteniendo el generador de fuerza magnetomotriz (bobina o imán permanente) lo más cerca posible del entrehierro. Con cierta experiencia como guía, se puede estimar la fuerza magnetomotriz requerida con una tolerancia del 10 %. Las estimaciones del cociente entre el flujo de pérdidas y el flujo útil no deben presentar un error superior al 20 %. Tales valores son suficientemente aproximados para muchos fines.

* 11. EJEMPLO DE CÁLCULO DEL FLUJO DE PÉRDIDAS DEL CIRCUITO MAGNÉTICO DE UN OSCILÓGRAFO

La estructura magnética de la figura 14 representa una simplificación del circuito magnético de un oscilógrafo de tres elementos. Los pequeños bloques de hierro dulce *A*, *B*, *C*, *D* tienen, cada uno de ellos, una sección recta cuadrada de 3,2 cm² y una longitud de 2,5 cm. Cada entrehierro tiene una longitud de 0,25 cm. El yugo de acero de fundición tiene una sección recta cuadrada de 13 cm² y una longitud equivalente de 45 cm. La bobina imanadora tiene 2 000 espiras y conduce una corriente de 6 A.

Con el método de las aproximaciones sucesivas, despreciando la pérdida, el flujo del circuito resulta ser de 65 000 Mx. El problema que se presenta es estimar la corrección de este resultado calculando el flujo de pérdidas y obtener, así, una comparación aproximada entre el flujo de la bobina y el flujo en el entrehierro.

Solución: Las partes paralelas del yugo se considerarán cilindros paralelos. La separación entre sus ejes será, tomando $\sqrt{13} = 3,60$

$$2a = 10,75 + 3,60 = 14,35 \text{ cm} \quad (28)$$

Los radios de los cilindros se calculan de manera que la circunferencia del cilindro sea igual al perímetro de la sección recta del yugo

$$r = \frac{4 \times 3,60}{6,28} = 2,3 \text{ cm} \quad (29)$$

La longitud axial de un cilindro se toma igual a la longitud axial de uno de los lados paralelos del yugo:

$$l = \frac{45 - 10,75 - 3,60 - 3,60}{2} + 3,60 = 17 \text{ cm} \quad (30)$$

La reluctancia entre los cilindros paralelos es

$$\mathcal{R} = \frac{\ln \frac{14,35}{2,3}}{17\pi} = \frac{1,7}{17\pi} = \frac{1}{10\pi} \text{ uem} \quad (31)$$

El flujo de pérdida es

$$\phi_l = \frac{0,4\pi NI}{\mathcal{R}} = 39,4NI \approx 39NI \text{ Mx} \quad (32)$$

Siendo *NI* la caída media de potencial magnético entre los cilindros, expresada en ampere-espira. El procedimiento consiste, ahora, en suponer valores del flujo en el en-

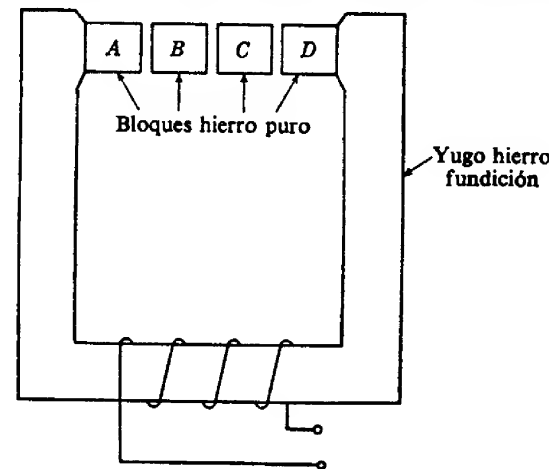


Fig. 14. Circuito magnético equivalente del oscilógrafo de tres elementos.

trehierro, calcular la diferencia de potencial magnético correspondiente entre los puntos medios de los cilindros paralelos y calcular el flujo de pérdidas, el flujo de la bobina y la caída reluctiva en el yugo en el tramo que atraviesa la bobina uniendo los centros de los cilindros paralelos. Se repite el procedimiento hasta que la caída reluctiva total del circuito se aproxime suficientemente a la fuerza magnetomotriz de la bobina.

Es interesante hacerlo. Como primer valor del flujo en el entrehierro se toma 65 000 Mx. El área corregida del entrehierro es

$$A_e = (1,79 + 0,25)(1,79 + 0,25) = 4 \text{ cm}^2 \quad (33)$$

La inducción magnética en el entrehierro será $65\,000/4 = 16\,250$ G; la inducción magnética en los bloques será $65\,000/3,2 = 20\,300$ G; la inducción magnética en el yugo en los extremos del entrehierro será $65\,000/13 = 5\,000$ G, la cual se supone constante para la mitad de la longitud axial de los cilindros hipotéticos, es decir, para 8,5 cm. Los entrehierros requieren $(10^7/4\pi) \times 1,625 \times 0,75 \times 10^{-3} = 9\,600$ ampere-espira. Los bloques requieren $24\,400 \times 0,10 = 2\,440$ ampere-espira. La parte del yugo considerada requiere $330 \times 0,17 = 56$ ampere-espira. Estas cifras totalizan algo más de 12 000 ampere-espira, simplemente porque la precisión de la solución que daba 65 000 Mx despreciando el flujo de pérdidas es considerada satisfactoria cuando la caída reluctiva calculada superaba a la fuerza magnetomotriz disponible en 200 para 12 000 ampere-espira. Luego, para

todos los fines prácticos, se podrán tomar los 12 000 ampere-espira entre los centros de los cilindros, en primera aproximación. El flujo de pérdidas es, entonces, $39 \times 12\,000 = 468\,000$ Mx. La inducción magnética en la parte del yugo que se extiende a través de la bobina será, pues, $(468\,000 + 65\,000)/13 = 41\,000$ G. Evidentemente, esta cifra es absurda, pero sirve para poner de relieve la gran influencia del flujo de pérdidas.

Como segundo ensayo, se considerará en el entrehierro un flujo de 30 000 Mx. Para esta suposición, la inducción magnética en el entrehierro será $30\,000/4 = 7\,500$ G; la inducción magnética en los bloques será $30\,000/3,2 = 9\,375$ G; la inducción magnética en los extremos del yugo tocando al entrehierro será $30\,000/13 = 2\,307$ G. Los entrehierros requieren $(10^7/4\pi) \times 0,7500 \times 0,75 \times 10^{-2} = 4\,430$ ampere-espira; los bloques requieren $160 \times 0,10 = 16$ ampere-espira; los extremos del yugo requieren $206 \times 0,17 = 35$ ampere-espira. La caída de potencial magnético entre los centros de los cilindros es de unos 4 480 ampere-espira. El flujo de pérdida es de $39 \times 4\,480 = 175\,000$ Mx y la inducción magnética en la parte del yugo que se extiende a través de la bobina es $(175\,000 + 30\,000)/13 = 15\,800$ G = 1,58 T. La caída reluctiva en esta parte del yugo es de $3\,920 \times 0,275 = 1\,080$ ampere-espira. El total de 5 560 ampere-espira es demasiado pequeño. Nuevos ensayos llevan al resultado de 38 000 Mx de flujo en el entrehierro, 222 000 Mx de flujo de pérdidas y 260 000 Mx de flujo en el núcleo, resultado muy diferente de la cifra de 65 000 Mx obtenida despreciando el flujo de pérdidas.

El trabajo experimental realizado para verificar este método de cálculo del flujo de pérdidas o de entrehierro largo no es suficiente para permitir apreciar la precisión del método. Tal vez habría que aumentar la longitud axial de los cilindros para tener en cuenta los efectos de los extremos. No obstante, la idea fundamental parece buena y el empleo del método dará, probablemente, resultados que pueden estar más próximos al verdadero que los obtenidos al no hacer la corrección del flujo de pérdidas. Un ulterior estudio experimental puede dar reglas generales para el ajuste de las dimensiones y separación de los cilindros hipotéticos de manera que se tengan tolerancias conocidas para los resultados obtenidos.

12. CÁLCULO DE LA CURVA DE IMANACIÓN DE UNA DINAMO

Aun cuando los métodos e hipótesis simplificadoras descritos en los apartados anteriores dan, para muchos problemas, resultados de precisión de igual orden que la que puede obtenerse en la mayoría de datos ferromagnéticos, existen muchos problemas en los cuales las formas de las estructuras de núcleos exigen el perfeccionamiento de estos métodos y un buen criterio técnico para lograr una solución aceptable. Los dispositivos en donde intervienen esas formas de núcleos son las dinamos, algunos instrumentos de precisión, relés magnéticos especiales, etc. Debido a la gran importancia de la dinamo en la técnica y a los costos de construcción de las unidades mayores, se ha dedicado, en los últimos años, una atención especial al problema de la predicción exacta del funcionamiento de una máquina de diseño propuesto, con el resultado de haberse establecido métodos satisfactorios para tratar el problema. Para ilustrar ciertos aspectos importantes del tratamiento de este problema, se describirá brevemente el cálculo de la curva de imantación de una dinamo. Fácilmente se podrán aplicar a otros problemas los principios que intervienen en este ejemplo.

En la figura 15 puede verse el circuito magnético de una dinamo bipolar. El órgano central ranurado es el rotor o inducido, y en las ranuras lleva alojado el

devanado del rotor. Suele estar constituido por láminas troqueladas de chapa de acero con un 1 ó 2 % de silicio. El órgano exterior es la estructura de la excitación, siendo la parte cilíndrica la armadura que, frecuentemente, es de hierro o acero

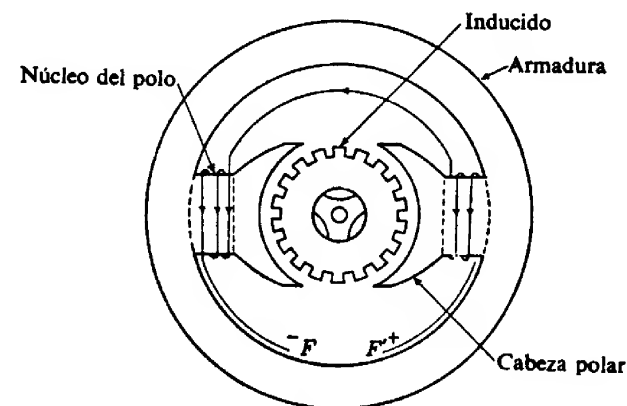


FIG. 15. Circuito magnético de una dinamo.

de fundición, o acero laminado en frío. Las partes salientes de la estructura de la excitación son los polos, cuyos núcleos suelen ser de chapa de acero laminada.

Aplicando una tensión continua a los terminales FF' del devanado de la excitación, la intensidad estacionaria de la corriente inductora quedará determinada por la magnitud de la tensión aplicada y la resistencia del circuito de excitación. Para la polaridad que se indica, el devanado de la excitación crea una fuerza magnetomotriz en el sentido de establecer un flujo magnético de izquierda a derecha a través de los polos, entrehierros e inducido. El camino del flujo se cierra por la armadura. En la figura 16 se ha vuelto a dibujar esquemáticamente el circuito magnético, indicándose los caminos del flujo mediante líneas finas con puntas de flecha.

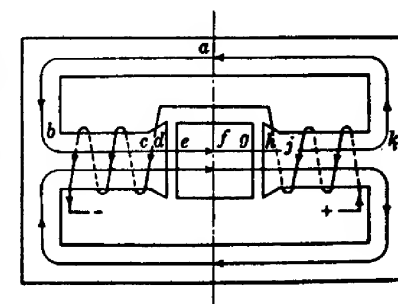


FIG. 16. Esquema equivalente de la figura 15.

El grado de precisión con que se pueden calcular las constantes del circuito magnético de una máquina depende, en gran manera, de la cantidad de esfuerzo y tiempo que se pueda dedicar al trabajo. Si se traza un plano del campo para el circuito magnético completo, lo que entraña invariablemente el método de prueba y error y por tanto, el empleo mucho tiempo, se puede lograr un resultado bastante aproximado. El trabajo que representa este procedimiento lo hace impracticable para el diseño de las máquinas menos importantes, si bien las representaciones gráficas para obtener la distribución del flujo en ciertas partes críticas de los circuitos magnéticos tales como los dientes, entrehierros y caminos del flujo de pérdidas suelen dibujarse frecuentemente constituyendo parte del diseño de las máquinas mayores o de aquellas en

que se desee alguna característica especial. Frecuentemente conviene hacer una aproximación del circuito magnético verdadero, con la cual se pueda realizar el cálculo más fácilmente.

Con el fin de determinar las partes del circuito magnético cuyas propiedades predominan en el diseño y de que sirva como guía para realizar aproximaciones justificables, se ha trazado en la figura 17 una gráfica del potencial magnético relativo en distintos puntos a lo largo del circuito. Para este fin se considera como plano de potencial magnético nulo, un plano perpendicular al papel en la figura 16 y que corte a la armadura por la mitad, en f , dejando a uno y otro lado las piezas polares, quedando simétricas las dos partes de la estructura. En una máquina que tenga más de un par de polos, este plano sería equidistante de los polos adyacentes. Se considera primeramente la caída de potencial magnético U a lo largo del circuito en el sentido del flujo. La caída de a a b , representada por U_{ab} , será

$$U_{ab} = \int_a^b \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}. \quad (34)$$

Si, de momento se considera despreciable el flujo de pérdidas y es constante el área de la sección recta del camino, la intensidad del campo magnético H será constante entre a y b , con lo que

$$U_{ab} = H_{ab} l_{ab}, \quad (35)$$

donde l_{ab} representa la longitud efectiva del tramo entre a y b . La curva de la variación del potencial magnético entre a y b es la de punto y trazo de la figura 17. De b a c y de c a d valen las mismas condiciones, si bien la intensidad del campo magnético en cada parte del núcleo, será probablemente diferente a causa de la diferencia de material o de inducción magnética. Así, pues, las curvas de estas partes tendrán diferentes pendientes. El entrehierro ofrece una caída análoga, pero debido a su gran reluctancia, la curva entre d y e tiene una pendiente extraordinariamente grande. Si se completa la gráfica para el resto del camino, volviendo a a , la caída reluctiva total resulta ser igual al segmento aA de la figura.

Para que exista la caída aA , deberá haber en alguna parte del circuito una elevación igual de potencial magnético. Esta elevación de potencial viene establecida por la fuerza magnetomotriz de los devanados de excitación, siendo la magnitud de la contribución de cada uno de ellos la mitad de aA , o sea cF . La curva de trazos muestra la elevación de potencial dada por los devanados y la curva de trazo continuo, la suma de las elevaciones y caídas a lo largo del circuito. La curva de trazo continuo, pues, da el potencial magnético real de cada punto respecto al punto a .

Del estudio de la gráfica de la figura 17, se deducen varios hechos importantes. El primero es que los puntos a y f están al mismo potencial magnético; es decir, la caída reluctiva a lo largo de la mitad del circuito $abcdef$ está equilibrada por la fuerza magnetomotriz de la bobina del polo, situado entre b y c . La bobina del polo situado entre j y k , suministra la fuerza magnetomotriz para la porción restante $fghjka$. Por tanto, como ambos caminos son iguales, todos los cálculos pueden realizarse sobre la sección de a a f .

La curva resultante de la figura 17, muestra también que todos los puntos de

la armadura, parte bak , se hallan casi al mismo potencial, siendo la máxima diferencia de potencial, la existente entre b y k , solamente de $2(bB)$. Por tanto, el flujo de pérdidas entre b y k a través del aire (o entre dos puntos cualesquiera de la armadura), es relativamente pequeño. Sin embargo, para el resto del circuito el flujo de pérdidas no será pequeño en todas partes. La figura 17 indica que de b a c y de j a k ,

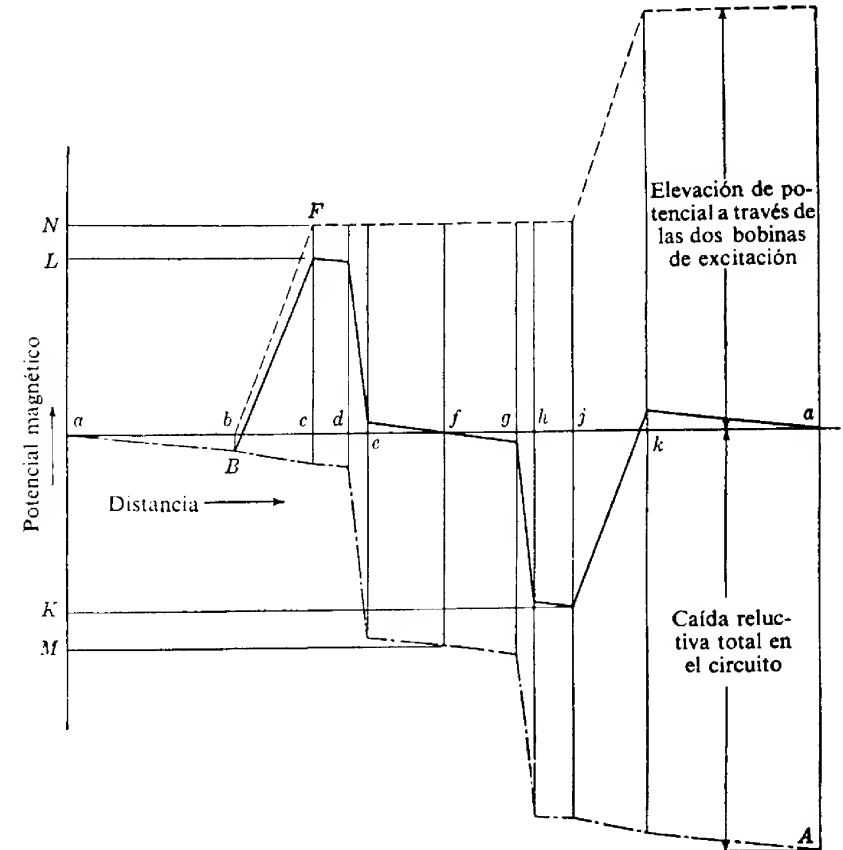


Fig. 17. Representación gráfica de los potenciales magnéticos del circuito magnético de la fig. 16.

la diferencia de potencial aumenta hasta que alcanza un valor igual a $L-K$ entre las partes superiores de las cabezas polares. Como la diferencia de potencial magnético entre una cabeza polar y la siguiente, es decir, U_{ab} es casi igual a la que existe entre las uniones de las cabezas polares con los núcleos polares, y la distancia entre las puntas de las cabezas polares adyacentes es relativamente pequeña, el flujo de pérdidas de una cabeza polar a otra puede ser apreciable.

En los cálculos prácticos, el flujo de pérdidas de una cabeza polar a la siguiente constituye la mayor parte del flujo de pérdidas de magnitud suficiente para que entre en los cálculos. En un nuevo diseño se puede calcular su magnitud a partir

del experimento anterior realizado con máquinas análogas o con un plano del campo. Este flujo de pérdidas alcanza frecuentemente el 10 ó el 20 % del flujo útil del polo al inducido. En la práctica, el cociente entre el flujo a través del núcleo del polo y el flujo útil a través del entrehierro, se utiliza para especificar la pérdida y recibe el nombre de *coeficiente de dispersión*. Este cociente suele determinarse para el flujo a plena carga y, aun cuando varía ligeramente con el grado de saturación, se supone que se mantiene constante en todo el dominio normal de excitación. Una vez conocido el coeficiente de dispersión, puede determinarse el flujo en todas las partes del circuito y la caída reluctiva requerida para cada sección.

Problema de interés para el diseñador es la determinación de la curva de la tensión generada en función de la intensidad de la corriente de excitación, es decir, la curva de imanación o alguno de sus puntos. En cualquier texto de máquinas de corriente continua⁴, se demuestra que la relación entre la tensión generada y el flujo en el entrehierro es

$$E_a = \frac{Z}{a} \frac{n}{60} p \phi \times 10^{-8} \quad (36)$$

donde

$Z \equiv$ número total de inductores activos sobre el inducido

$p \equiv$ número de polos de excitación de la máquina

$a \equiv$ número de caminos de la corriente en el devanado inducido

$n \equiv$ velocidad en revoluciones por minuto

$\phi \equiv$ flujo magnético que atraviesa el entrehierro de una cabeza polar al inducido, en maxwell

$E_a \equiv$ tensión generada entre los terminales del inducido, en volt

Para una máquina dada, son fijos todos los factores excepto E_a , ϕ y n . Por tanto

$$E_a = K \phi n, \quad (37)$$

donde

$$K \equiv \frac{Zp10^{-8}}{a60}. \quad (38)$$

De la ecuación (37) puede calcularse ϕ para cada valor de E_a . Este valor de ϕ es el flujo útil que penetra en el inducido procedente de un polo inductor. Será, por tanto, el flujo en el entrehierro y en los dientes del inducido.

El núcleo del polo no solamente transporta el flujo en el entrehierro sino también el flujo de pérdidas y por tanto es atravesado por un flujo igual al producto de ϕ por el coeficiente de dispersión. En la armadura $a-b$, el flujo es igual a la mitad del que hay en el núcleo del polo inductor. Así, se podrá calcular el flujo en cada parte del circuito magnético para cualquier valor dado de E_a . Conocido el flujo en cada parte del circuito, podrán calcularse la inducción magnética y la caída reluctiva de cada parte. La parte más difícil de este cálculo es la determinación del área y longitud que hay que emplear para el entrehierro. Como, en la mayoría de los problemas, esta sección

⁴ Por ejemplo: ROYCE G. KLOEFFLER, JESSE L. BRENNEMAN, RUSSELL M. KERCHNER, *Direct-Current Machinery* (New York: The Macmillan Company, 1934); ALEXANDER S. LANGSDORF, *Principles of Direct-Current Machines* (5a. ed., New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1940).

del circuito lleva consigo más del 80 % de la caída reluctiva total, se deberá determinar con toda la precisión posible la caída en ella.

Una simplificación justificable del problema consiste en suponer que la cara polar es una superficie equipotencial. Esta simplificación es permisible debido a que la distribución del flujo en las partes de hierro del circuito es prácticamente uniforme sobre toda sección perpendicular al campo, y porque la baja reluctancia del camino ferromagnético hace que cualquier falta de uniformidad, no demasiado grande, en la distribución sobre cualquier sección tenga muy poca influencia sobre la caída reluctiva. A veces, puede hacerse la misma hipótesis para la superficie del inducido situada bajo un polo, pero en este tratamiento la superficie del inducido en las raíces de los dientes se considera como superficie equipotencial. La distribución del flujo entre estas superficies equipotenciales, sin embargo, no es uniforme y por tanto exige un estudio especial.

En la figura 18 puede verse una sección de un polo y el inducido. Al considerar la caída reluctiva en el entrehierro, surgen dos dificultades. La primera es que las ranuras del inducido hacen que la longitud del entrehierro sea diferente en los distintos puntos de la superficie. La segunda es que estas ranuras hacen difícil la definición del área de la cara del diente de manera que tenga en cuenta la dispersión. El problema se complica aún más al hacer el entrehierro más largo en la punta del polo que en su centro. La razón de que haga esto puede hallarse en cualquier libro de maquinaria de corriente continua⁵.

Un método eficaz para tener en cuenta el efecto de las ranuras es el ideado por F.W.CARTER⁶. Este supone que las puntas de los dientes y la cara polar son planos paralelos y que las ranuras tienen profundidad infinita. Estas hipótesis encajan en la mayoría de problemas con precisión aceptable si se consideran las ranuras por pequeños grupos o individualmente, ya que la curvatura de las superficies es pequeña y la profundidad de la ranura tan grande frente a la longitud del entrehierro que muy poco flujo penetrará en las profundidades de la ranura. CARTER demostró que el flujo que atraviesa un entrehierro de longitud δ (fig. 18) a través de una sección d que abarque la ranura s es igual al flujo que atraviesa un entrehierro de igual longitud pero de anchura $(d - \sigma s)$ donde σ viene dada por

$$\sigma = \frac{2}{\pi} \left\{ \arctg \frac{s}{2\delta} - \frac{\delta}{s} \ln \left[1 + \left(\frac{s}{2\delta} \right)^2 \right] \right\}. \quad (39)$$

Así, la presencia de la ranura hace disminuir el flujo hasta una fracción $\frac{d - \sigma s}{d}$ del valor calculado para una superficie lisa de anchura d y sin ranura. Como la per-

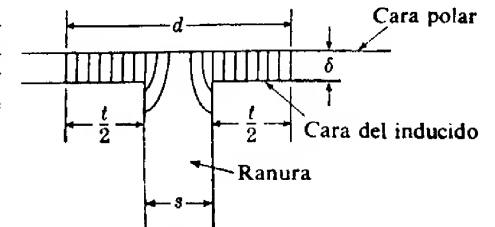


FIG. 18. Dimensiones del entrehierro dentado utilizando las fórmulas de Carter.

⁵ ROYCE G. KLOEFFLER, JESSE L. BRENNEMAN, RUSSELL M. KERCHNER, *Direct-Current Machinery* (New York: The Macmillan Company, 1934); ALEXANDER S. LANGSDORF, *Principles of Direct-Current Machines* (5a. ed., New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1940).

⁶ F. W. CARTER, «Air-Gap Induction», *Electrical World and Engineer*, 38 (1901), 884-888.

meabilidad del aire es constante, en el entrehierro B es proporcional a H ; luego se obtiene el mismo resultado multiplicando la longitud del entrehierro δ por el recíproco de la anterior relación para dar una longitud δ' del entrehierro equivalente y suponiendo que éste es uniforme sobre toda la anchura d . Si se toma d igual a la anchura de una ranura más la de un diente, el coeficiente por el que se multiplica δ se convierte en

$$\frac{d}{d - \sigma s} = \frac{t + s}{t + s - \sigma s} \quad (40)$$

$$= \frac{t + s}{t + s(1 - \sigma)} = C, \quad (41)$$

con lo que

$$\delta' = C\delta. \quad (42)$$

El factor C definido por esta ecuación recibe el nombre de coeficiente de Carter. La ecuación 39 indica que σ depende solamente del cociente s/δ . La curva de la figura 19 es la representación gráfica de esta ecuación y de ella puede sacarse el valor de σ para diferentes valores del cociente entre la anchura de la rendija y la longitud del entrehierro.

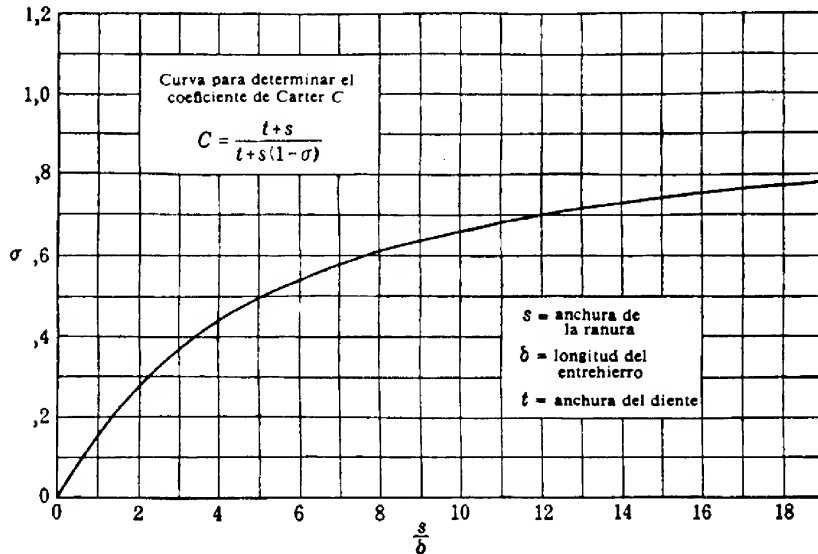


Fig. 19. Curva para obtener el coeficiente de Carter para un entrehierro dentado.

Hasta ahora, el tratamiento solamente tiene en cuenta la dispersión del flujo en los dientes del inducido. A causa de la dispersión en la cabeza polar y la variación de longitud del entrehierro que suele introducirse, la valoración de la reluctancia total podrá realizarse mejor con ayuda de un plano aproximado del campo en la región. Como la construcción suele ser simétrica respecto al eje polar, bastará considerar la región comprendida entre el eje polar y el plano medio entre polos adyacentes. Suele obtenerse un plano del campo suficientemente bueno si se divide la super-

ficie del inducido interior a esta región en ocho o diez secciones iguales. Frecuentemente, la anchura de cada sección puede hacerse igual a un paso de ranura según indican las líneas de trazos del esquema de la figura 20. No obstante, las ranuras no tienen por qué estar indicadas en la gráfica, ya que su efecto se halla ya contenido en el coeficiente C . A continuación se dibujan las líneas de flujo que van al centro de cada sección, prescindiendo de nuevo de las ranuras, por los métodos de trazado del flujo ordinarios. Se mide entonces la longitud de cada línea de flujo y se considera como longitud δ del entrehierro de la sección correspondiente. Se divide entonces la anchura de cada ranura por δ y con la curva de la figura 19 se determina el valor de σ para cada sección. Las ecuaciones 41 y 42 determinan, respectivamente, el valor del coeficiente C y la longitud del entrehierro equivalente.

Si se incrementan ahora las secciones del entrehierro 1, 2, 3, ..., n de longitudes $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n$, respectivamente, hasta los valores $\delta'_1, \delta'_2, \delta'_3, \dots, \delta'_n$, de las longitudes de las secciones del entrehierro equivalente y entre los extremos de las líneas se traza una curva regular, se obtiene un inducido de superficie lisa con un entrehierro cuya reluctancia aparente es equivalente a la del inducido original. La curva de trazos que pasa por las puntas de los dientes en la figura 20 indica la forma aproximada de la superficie de este inducido equivalente.

El entrehierro equivalente no tiene longitud uniforme. Su reluctancia aparente puede obtenerse ahora con facilidad mediante un nuevo esquema del flujo dibujado entre la cara polar y la cara del inducido equivalente, considerando ambas caras como superficies equipotenciales. No obstante, para simplificar el trabajo eliminando la necesidad de dibujar el flujo, se sustituye el entrehierro de longitud no uniforme por otro de longitud uniforme igual a δ'_1 en el centro del polo y de anchura circular que da la misma reluctancia que el entrehierro verdadero.

Para comprender el procedimiento de determinación de la anchura circular de este entrehierro equivalente de longitud uniforme δ'_1 habrá que considerar el camino del flujo de una de las secciones de la figura 20. Como la diferencia de potencial magnético del entrehierro es la misma para todos los caminos y las áreas de las secciones rectas de los caminos son iguales, el flujo de cada camino será inversamente proporcional a la longitud del camino. Si se disminuye la longitud del camino de δ'_n a δ'_1 , su anchura deberá disminuirse en la razón δ'_1/δ'_n a fin de mantener fija la reluctancia. La anchura total del entrehierro equivalente de longitud uniforme δ'_1 deberá, pues, reducirse multiplicándola por el factor

$$\frac{1}{n} \left[\frac{\delta'_1}{\delta'_1} + \frac{\delta'_1}{\delta'_2} + \frac{\delta'_1}{\delta'_3} + \dots + \frac{\delta'_1}{\delta'_n} \right] = \frac{\delta'_1}{n} \sum \frac{1}{\delta'} = P \quad (43)$$

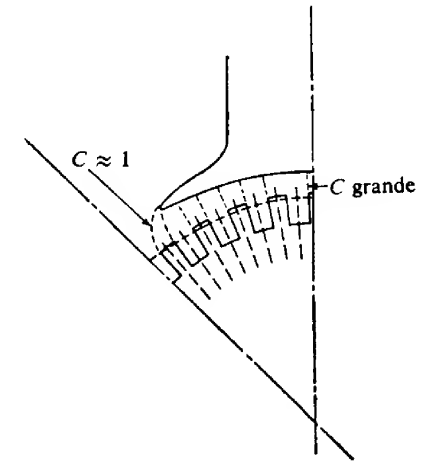


Fig. 20. Trazado del flujo en el entrehierro para obtener el entrehierro equivalente con caras lisas.

donde n es el número de caminos del flujo de igual anchura y P es la llamada *constante del polo*. Según puede verse de la deducción, equivale a la razón de la reluctancia de un entrehierro de longitud δ'_1 y anchura del paso polar (separación angular de los ejes de los polos adyacentes) uniformes a la reluctancia del entrehierro real. Esta razón es igual a la razón del flujo del entrehierro real al flujo del entrehierro de longitud δ'_1 y anchura del paso polar uniformes, para caídas de potencial magnético iguales. Si el entrehierro real fuera de longitud uniforme y tan corto que en los bordes de la cabeza polar fuera despreciable la dispersión, la constante del polo sería igual a la razón del arco polar al paso polar.

Para sistematizar el trabajo, se sugiere una forma tabular de solución como la indicada en la tabla IV.

TABLA IV

Camino	δ	s/δ	σ	C	$\delta' = \delta C$	$1/\delta'$
1						
2						
3						

Muchas veces se utiliza una aproximación consistente en calcular el coeficiente de Carter y δ'_1 en el centro del polo, entonces se dibuja la cabeza polar y se localiza el inducido mediante un círculo de radio tal que el entrehierro tenga longitud δ'_1 . Se dibujan, entonces, los caminos del flujo y se miden sus longitudes. La suma de los recíprocos de estas longitudes se toma entonces como la $\sum 1/\delta'$ de la ecuación (43).

La longitud axial eficaz del entrehierro es igual a la longitud axial real de los polos corregida de dispersión en los extremos y de los efectos de los conductos de ventilación. La corrección de dispersión suele considerarse como una prolongación igual a $2\delta_1$ y la corrección debida a los conductos de ventilación como un acortamiento igual a $\sigma_d D$, donde D es la anchura del conducto y σ_d se determina tomando en la curva de la figura 19 el punto correspondiente al valor de D/δ_1 . Así,

$$\text{Longitud axial eficaz} = \text{longitud real} + 2\delta_1 - \sigma_d D \quad (44)$$

Las dimensiones a utilizar para el entrehierro equivalente de una dinamo de p polos, longitud axial l y diámetro del inducido d son, para la longitud del entrehierro:

$$l_a = \delta'_1, \quad (45)$$

y para el área del entrehierro:

$$A_a = \frac{\pi d P}{p} (l + 2\delta_1 - \sigma_d D). \quad (46)$$

Una vez determinadas las dimensiones del entrehierro equivalente y realizada una estimación del flujo de pérdidas en la punta de los polos utilizando un coeficiente de dispersión basado en la experiencia, por el método del apartado 11, o empleando un esquema del flujo, el resto del problema de cálculo de la curva de imanación igual a los procedimientos descritos en los apartados anteriores.

PROBLEMAS

- Un anillo de hierro de fundición de sección recta circular uniforme de diámetro interno 125 mm y diámetro externo 175 mm tiene devanadas 500 espiras.
 - ¿Qué flujos crean las corrientes de intensidad: a), 1 A? b), 2 A? c), 4 A? ¿Se duplica el flujo al duplicar la intensidad de la corriente?
 - ¿Qué intensidades de corriente continua se precisarán para crear en el hierro los siguientes valores del flujo: d), 50 000 Mx? e), 25 000 Mx? f), 10^{-4} Wb?
 - ¿Qué flujos producen los siguientes valores de la intensidad del campo magnético creado por la bobina: g), 2 400 L? h), 30 Oe no racionalizados? i), 30 Oe racionalizados?

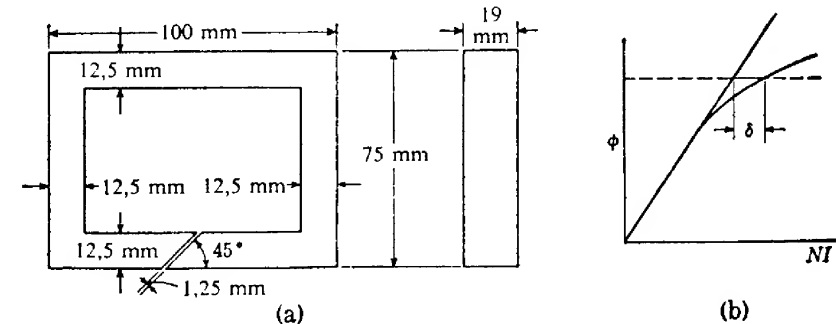


FIG. 21. Circuito magnético para el problema 2.

- En el diseño de bobinas de audiofrecuencia se interrumpe la continuidad del circuito ferromagnético con un entrehierro a fin de que la curva de imanación del circuito

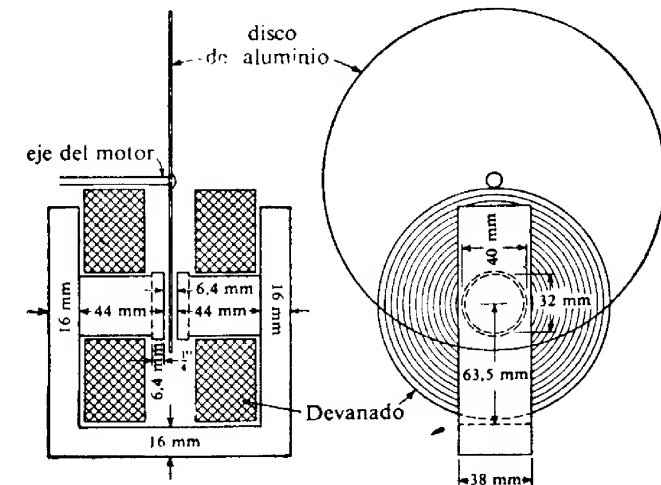


FIG. 22. Freno por corrientes de Foucault del problema 3.

sea más lineal. El núcleo está constituido por chapas de acero Radio A-3 (transformador 72) con factor de apilamiento 0,9; las dimensiones son las de la figura 21a.

¿Cuál es el flujo máximo ϕ_{max} al que puede funcionar este núcleo si la desviación δ de la curva de imanación debe mantenerse inferior al 5 %, respecto al valor NI que tendría si la curva de imanación fuese una recta como la de la figura 21b?

3. En la figura 22 puede verse un freno por corrientes de Foucault utilizado para medir la potencia mecánica que desarrolla un motor. El momento del par ejercido sobre el eje del motor es función de la inducción magnética en el entrehierro y de la velocidad del disco de aluminio que gira entre los polos del electroimán. La estructura que cons-

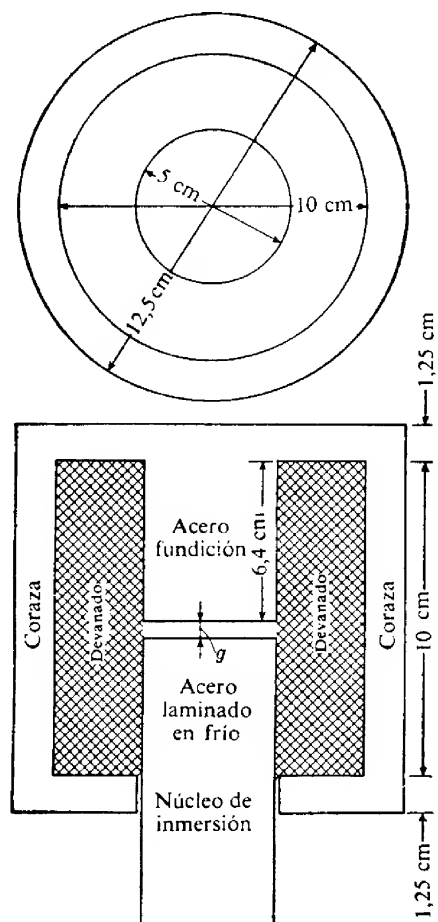


FIG. 23. Núcleo de inmersión del problema 4.

tituye el circuito magnético es de acero macizo laminado en frío. Las dos bobinas de 700 espiras cada una están conectadas en serie.

Hallar la inducción magnética aproximada en el entrehierro cuando la intensidad de la corriente que circula por el devanado es de 2,5 A.

La velocidad del disco es tal que la fuerza magnetomotriz desimanadora creada por las corrientes del disco es de 2 000 ampere-espira.

4. El electroimán acorazado de la figura 23 se utiliza para disparar disyuntores, accionar válvulas, y para otras aplicaciones en las que se aplica una fuerza relativamente grande a un órgano que se mueva a lo largo de una distancia relativamente corta. Cuando no circula corriente por el devanado, el núcleo de inmersión se apoya en un tope de tal manera que el entrehierro g es de 12,5 mm. Cuando por el devanado circula una corriente de intensidad suficiente, el núcleo de inmersión se eleva hasta que choca con otro tope que fija el entrehierro g en 2,5 mm. El núcleo de inmersión está soportado de manera que pueda moverse libremente en la dirección axial. El entrehierro entre la coraza y el núcleo de inmersión puede considerarse uniforme e igual a 0,25 mm.

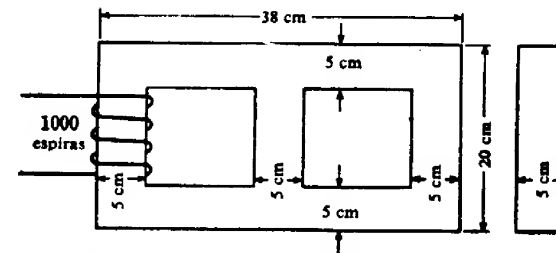


FIG. 24. Núcleo magnético del problema 5.

Si el devanado tiene 1 000 espiras y transporta una corriente de 2 A, ¿cuáles son las inducciones magnéticas existentes entre las caras activas de la coraza y el núcleo de inmersión para entrehierros g de 2,5 mm, 5,0 mm y 12,5 mm?

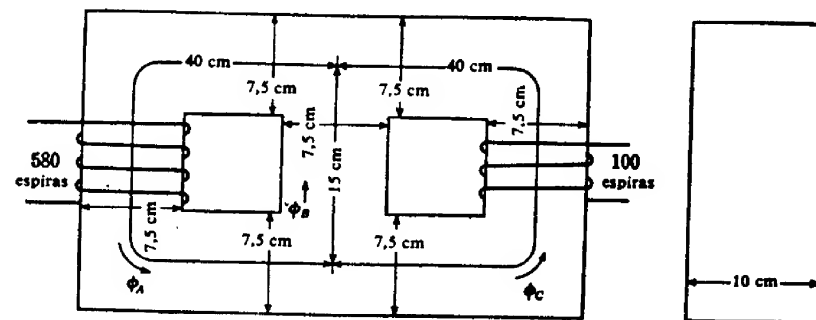


FIG. 25. Núcleo magnético del problema 6.

5. El circuito magnético de la figura 24 está construido con acero eléctrico y tiene un factor de apilamiento de 0,9. ¿Cuántos amperes se requieren en el devanado para crear un flujo de 0,0014 Wb en la rama de la derecha?

6. El núcleo magnético de la figura 25 está construido con acero de transformador (curva 3 de la figura 1). El factor de apilamiento es 0,9. Cuando los flujos son $\phi_A = 10^{-3}$ Wb, $\phi_B = 4 \times 10^{-3}$ Wb y $\phi_C = 6 \times 10^{-3}$ Wb, ¿cuántos amperes deberán circular por cada devanado y en qué sentido?

7. Si la corriente que penetra por el terminal superior del devanado de la izquierda de la figura 25 del problema 6, tiene una intensidad de 0,20 A, ¿qué intensidad y qué sentido deberá tener la corriente del devanado de la derecha a fin de que sea nulo el flujo ϕ_C ?

8. En la figura 26 puede verse el circuito magnético de una dinamo pequeña especial. El rotor (inducido) es de hierro puro; el estator es de acero de fundición y tiene sección recta cuadrada.

¿Cuántos ampere-espira necesita el devanado del estator para crear en el entrehierro una inducción magnética media de 1 T?

9. Desarrollese una fórmula para la permeancia del camino de pérdidas entre

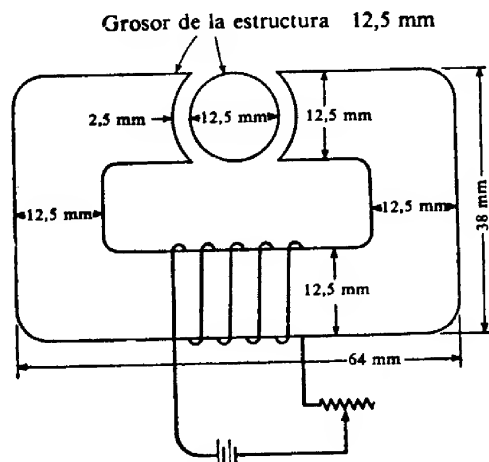
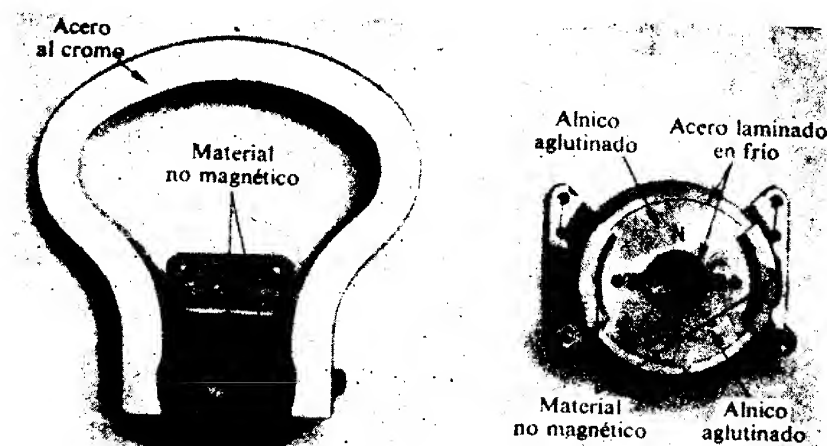


FIG. 26. Circuito magnético de la dinamo pequeña especial del problema 8.

dos cilindros largos paralelos de material ferromagnético. El radio de cada cilindro es r y la distancia entre los ejes de ambos $2a$, que es grande frente a r . La permeancia deberá expresarse en weber por ampere-espira, por cada metro de longitud de cilindro.

Imanes permanentes y energía del campo magnético

Las mejoras logradas en los últimos años en las propiedades magnéticas de los materiales magnéticamente duros han hecho posible una extensión considerable de la utilización práctica de estos materiales. En algunas aplicaciones modernas, se utilizan imanes en vez de electroimanes los cuales presentan una pérdida de energía en su devanado de excitación. En otras muchas aplicaciones, los dispositivos tales como altavoces de radio, instrumentos de medida, motores y generadores de potencia inferior a 1 CV y relojes eléctricos, no sólo se ha logrado hacerlos más compactos sino que han variado totalmente su aspecto al emplear las nuevas aleaciones que poseen mayor energía magnética por unidad de masa o de volumen.



La utilización de Alnico aglutinado en los instrumentos de medida modernos en lugar del acero al cromo ha obligado a un cambio radical de la forma y tamaño del circuito magnético. (Cortesía de General Electric Co.)

Todos los materiales que presentan las propiedades convenientes para imán permanente tienen en común una característica: que están constituidos de manera que los momentos magnéticos de sus dominios se pueden orientar de nuevo con relativa dificultad. La imanación inicial de estos materiales requiere fuerzas magnetomotrices relativamente grandes que, afortunadamente, sólo es necesario aplicarlas durante poco tiempo. Las curvas de imanación normal y los ciclos de histeresis de los materiales aptos para imanes permanentes están indicados en las figuras 15a y 15b del capítulo I. El estado cristalino que da la condición de dureza magnética se obtiene mediante tratamientos metalúrgicos que, frecuentemente, originan dureza física o fragilidad del material¹. La fragilidad es notable en las aleaciones aluminio-níquel-cobalto tales como el Alnico, que no pueden trabajarse satisfactoriamente, por lo que suelen fundirse inicialmente moldeándolas en la forma deseada y limándolas donde sea necesario un ajuste preciso.

¹ J. O. ADAMS, «Alnico—Its Properties and Possibilities», *G. E. Rev.*, 41 (1938), 518-523.

Un método empleado corrientemente para imanar simultáneamente grupos de imanes circulares o en forma de U consiste en colocar un conductor grande que pase por el centro de varios de ellos y hacer pasar por el conductor un pulso de corriente que tenga un valor máximo de varios millares de ampere. Durante la operación, se patea el extremo abierto de cada imán —es decir, su entrehierro— con un trozo de material ferromagnético, con lo que casi toda la fuerza magnetomotriz aplicada se emplea en vencer la reluctancia del propio imán. Al quitar el puente, disminuye el flujo en una cantidad que depende de las dimensiones del imán y su entrehierro, de la retentividad, coercitividad y de la forma de la curva de desimanación del material. Si vuelve a cerrarse el entrehierro, el flujo podrá aumentar algo, pero no volverá a alcanzar el valor que tenía antes de quitar por primera vez el puente. No obstante, la apertura y cierre subsiguientes del entrehierro no originan cambio permanente apreciable del flujo. Solamente se produce una variación cíclica y se considera que el imán ha alcanzado su estado permanente. Cuando el imán es una barra recta, se puede imanar colocándolo entre los polos de un electroimán adecuado, o dentro de un solenoide.

Las dimensiones de la sección y longitud apropiadas de un imán permanente que tenga que mantener un campo magnético determinado en un entrehierro dado se pueden prefijar con una aproximación satisfactoria para la mayoría de los fines ². Las dimensiones dependen de: a) la longitud y área de la sección recta del entrehierro, b) la inducción magnética que se desea tener en el entrehierro, c) las propiedades magnéticas del material en cuestión y d) otros factores cuyo significado se verá en este capítulo.

1. CIRCUITOS MAGNÉTICOS QUE CONTIENEN IMANES PERMANENTES

Las propiedades magnéticas de una aleación suelen venir dadas en forma de curva de desimanación obtenida experimentalmente por un método equivalente al ensayo de una muestra del material constituyendo un circuito magnético cerrado de sección

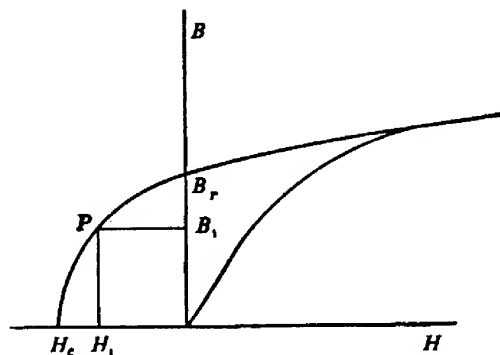


FIG. 1. Curva de un material de imán permanente imanado hasta la saturación y luego des- imanado.

² S. EVERSHED, «Permanent Magnets in Theory and Practice», I. E. E. J., 58 (1920), 780-837, y 63 (1925), 725-821.

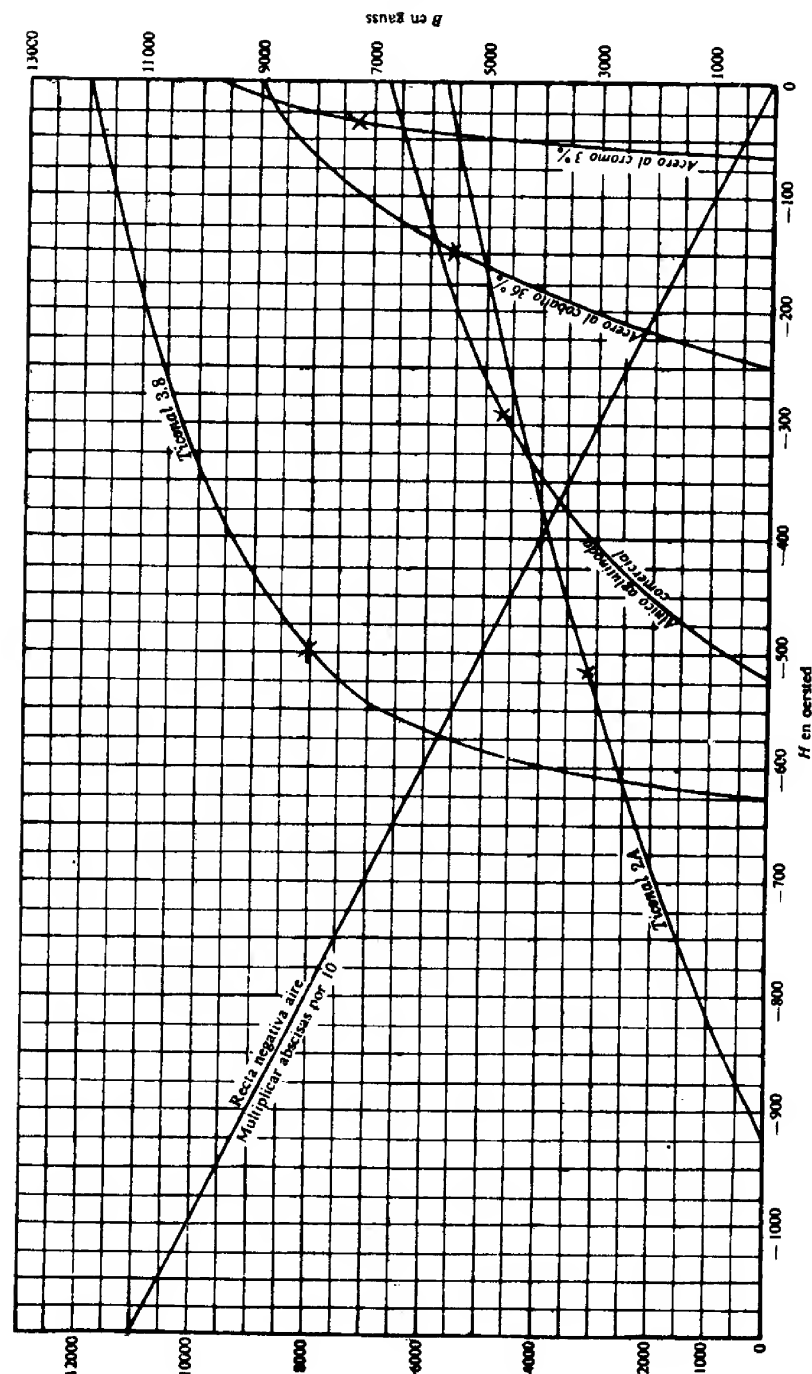


FIG. 2. Curvas de desimanación de materiales para imanes permanentes. Las cruces indican puntos en los cuales es máximo (BH).

recta uniforme y sin entrehierro. Se aplica a la muestra una fuerza magnetomotriz suficientemente grande para alcanzar la saturación y luego se halla la rama descendente de la curva en la forma descrita en el apartado 5 del capítulo I. Las curvas de la figura 1 representan la relación existente entre la inducción magnética y el campo magnético durante el proceso de imanación. La intersección con el eje B es la retentividad B_r y la intersección con el eje de abscisas es la coercitividad H_c . La parte de curva descendente comprendida entre estas dos intersecciones recibe el nombre de *curva de desimanación*; los puntos de funcionamiento asociados a un material para imán permanente suelen hallarse sobre esta curva o cerca de ella. En la figura 2 pueden verse curvas de aleaciones utilizadas como material para imanes permanentes.

El método para hallar el flujo o la inducción magnética en el entrehierro de un imán permanente puede ilustrarse mejor haciendo referencia a un circuito magnético simple de sección recta uniforme de área A_m y longitud l_m con un entrehierro corto de longitud l_a . En este estudio previo se desprecian los flujos de dispersión y de pérdida. Ponteando temporalmente el entrehierro con un pedazo de hierro dulce, se manda al devanado imanador una corriente de intensidad suficiente para saturar el circuito magnético (véase fig. 3). Una vez anulada la fuerza magnetomotriz, la inducción magnética permanece al valor de la retentividad B_r mientras el circuito magnético esté cerrado por el puente de hierro dulce. Al quitar el puente, la fuerza magnetomotriz aplicada al circuito sigue siendo nula y la inducción magnética se reduce aún más hasta alcanzar un valor tal que la elevación del potencial magnético U_m o $H_m l_m$ siguiendo el imán en el sentido de las agujas del reloj del polo negativo al positivo sea igual a la caída de potencial magnético U_a en el entrehierro. Esta condición viene representada por el punto de funcionamiento $P(-H_r, B_r)$ de la figura 1. El cálculo específico solamente indicaría cómo se halla este punto para el caso de un imán de dimensiones dadas.

El imán de la figura 3 está constituido por acero con un 36 % de cobalto con una sección recta de área $1,6 \text{ cm}^2$ y longitud 15 cm . La longitud del entrehierro es de $1,3 \text{ mm}$. ¿Cuál es el flujo en el entrehierro?

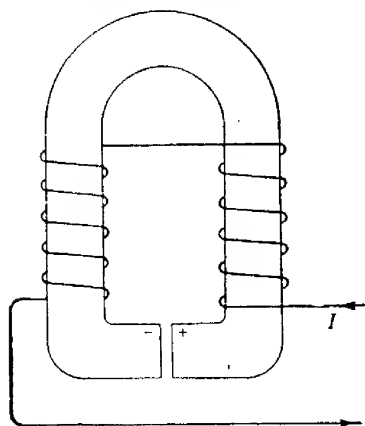


FIG. 3. Imán permanente con su devanado imanador.

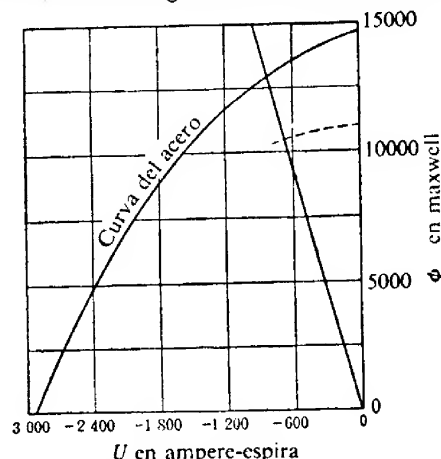


FIG. 4. Solución gráfica para hallar el flujo en el entrehierro de un imán permanente.

El método de solución es el descrito en el apartado 4 del capítulo III, y puede consistir en un proceso gráfico directo en el que la curva del flujo en función de la elevación de potencial magnético $H_m l_m$ en el imán se representa en la forma indicada en la figura 4. Esta curva es igual que la del acero al cobalto de la figura 2, con la diferencia que la escala de abscisas de la figura 2 está multiplicada por la longitud del camino en el acero, 15 cm , y la escala de ordenadas está multiplicada por el área de la sección recta del acero, $1,6 \text{ cm}^2$. La recta negativa del entrehierro se ha trazado con pendiente negativa igual a la permeancia del entrehierro que, en un sistema mixto de unidades, es igual a $15,95 \text{ G/A-espa}$. La intersección de la recta negativa del entrehierro con la curva da para el flujo en el circuito magnético un valor de $13\,000 \text{ Mx}$.

También puede obtenerse la solución por el método de prueba y error evitando, de esta manera, la necesidad de construir curvas adicionales. Sin la ayuda de la solución anterior, parecería razonable un primer ensayo de $7\,500 \text{ G}$, ya que el entrehierro es corto y no hará caer mucho la inducción a lo largo de la curva. A los $7\,500 \text{ G}$ corresponde en el acero al cobalto un campo magnético de 82 Oe . La elevación de potencial magnético en el acero al cobalto será, pues, como $1 \text{ Oe} = 79,58 \text{ L} = 0,15 \times 82 \times 79,58 = 980 \text{ ampere-espira}$. En el entrehierro, el campo magnético es de $7\,850 \text{ Oe}$ y la caída de potencial será $0,0013 \times 7\,850 \times 79,58 = 810 \text{ ampere-espira}$ que no concuerda con los $980 \text{ ampere-espira}$ en el acero. Una inducción mayor incrementaría la caída de potencial en el entrehierro y la disminuiría en el acero. Cuando la estimación final sea de $7\,800 \text{ G}$, la elevación en el acero será de $0,15 \times 70 \times 79,58 = 836 \text{ ampere-espira}$. La caída en el entrehierro sería $0,0013 \times 8\,150 \times 79,58 = 843 \text{ ampere-espira}$ que constituye una buena comprobación.

Al principio de este apartado se dijo que algunas de las aleaciones modernas son superiores a los materiales antiguos tales como los aceros al wolframio y al cobalto. Sería interesante hallar qué flujo habría si el imán del ejemplo anterior fuera de Alnico en vez de acero al cobalto. La recta negativa del entrehierro es la misma de antes y la curva para la parte de Alnico es análoga a la curva del Alnico de la figura 2 sin más que multiplicar sus abscisas por $0,15 \times 79,58$ y sus ordenadas por $1,6$. En la figura 4 se ha trazado punteada la parte útil de esta curva y corta a la recta negativa del entrehierro en un punto al que corresponde un flujo de $10\,500 \text{ Mx}$. El imán será más débil, pues, cuando se construya con Alnico que cuando se construya con acero al cobalto. El fallo reside en el empleo inadecuado del Alnico en el nuevo diseño, según se verá en el apartado siguiente.

2. DISEÑO PARA EMPLEAR LA MÍNIMA CANTIDAD DE MATERIAL MAGNÉTICO

El costo relativamente elevado de los materiales para imanes permanentes y la necesidad de ahorrar espacio en muchas aplicaciones hacen deseable un diseño que requiera el menor volumen posible de material. Un imán de la forma de la figura 3, que tenga una longitud l_m y una sección recta de área A_m , tiene un volumen $l_m A_m$. La elevación del potencial magnético en el imán $H_m l_m$ es igual a la caída en el entrehierro, o sea

$$l_m = \frac{U_a}{H_m}, \quad (1)$$

y, despreciando la pérdida, el flujo ϕ_a en el entrehierro es igual al flujo en el imán, de donde,

$$A_m = \frac{\phi_a}{B_m}. \quad (2)$$

El volumen del material magnético viene dado por el producto de las ecuaciones (1) y (2),

$$l_m A_m = \frac{U_a \phi_a}{H_m B_m}. \quad (3)$$

La caída en el entrehierro U_a se puede expresar en función de las dimensiones del entrehierro y de ϕ_a en la forma:

$$U_a = H_a l_a = \frac{B_a l_a}{\mu_a} = \frac{\phi_a l_a}{\mu_a A_a}, \quad (4)$$

y la sustitución de este valor de U_a en la ecuación (3) da

$$l_m A_m = \frac{l_a \phi_a^2}{\mu_a A_a H_m B_m} = \frac{\phi_a^2}{P_a H_m B_m}, \quad (5)$$

donde P_a es la permeancia del entrehierro.

► Para un circuito magnético con un entrehierro de área A_a y longitud l_a dadas y que tenga en dicho entrehierro un flujo dado ϕ_a , el volumen del material magnético será mínimo cuando el producto energético $H_m B_m$ sea máximo. ◀

Las curvas de desimanación de la figura 2 indican que el producto energético es nulo en cada una de las dos intersecciones con los ejes y que alcanza un máximo en algún punto intermedio de la curva. Para cada uno de los materiales consignados, se ha indicado con una cruz el punto $(B_m H_m)_{max}$. Con estos valores de B_m y H_m se pueden ahora hallar las dimensiones óptimas del imán a partir de las ecuaciones (1) y (2). Utilizando las ecuaciones (4), la ecuación (1) queda en la forma:

$$l_m = \frac{B_a l_a}{\mu_a H_m} = \frac{\phi_a l_a}{\mu_a A_a H_m} = \frac{\phi_a}{P_a H_m}. \quad \blacktriangleright (6)$$

Las relaciones que se acaban de desarrollar tienen en cuenta el hecho de que los entrehierros y el imán pueden tener secciones de diferente área, como ocurre en los diseños de las figuras 7 y 8. Las ecuaciones permiten, también, una corrección para la dispersión en el entrehierro.

Diseñemos de nuevo los imanes del apartado 1 para que den en el entrehierro el mismo flujo de antes, 13 000 Mx. En primer lugar, la inducción magnética óptima B_m para el acero al cobalto (correspondiente al punto marcado con x sobre la curva de la figura 2), es de 5 700 G y H_m vale 145 Oe. De las ecuaciones (2) y (6),

$$A_m = \frac{13\,000}{5\,700} = 2,28 \text{ cm}^2 \quad (7)$$

$$l_m = \frac{13\,000 \times 0,13}{1 \times 2,28 \times 145} = 5,14 \text{ cm} \quad (8)$$

El volumen del material magnético se ha reducido de $15 \times 1,6 = 24 \text{ cm}^3$ a $5,14 \times 2,28 = 11,7 \text{ cm}^3$ al elegir adecuadamente el punto de funcionamiento sobre la curva de desimanación.

El mejor valor de B_m para el imán de Alnico es, según la figura 2, 4 350 G y el valor correspondiente de H_m es 315 Oe. El área de la sección es $13\,000/4\,350 = 3 \text{ cm}^2$ y la longitud del imán es $(13\,000 \times 0,13)/(1 \times 3 \times 315) = 1,8 \text{ cm}$. El nuevo volumen de Alnico es $5,4 \text{ cm}^3$ que es, aproximadamente, la quinta parte del que se tenía en el diseño inicial que daba solamente 10 500 Mx, en el entrehierro en vez de los 13 000 Mx, de este diseño.

Surge ahora la cuestión de cómo utilizar prácticamente, en un circuito magnético las piezas de material magnético de estas dimensiones óptimas. Aun cuando pueda

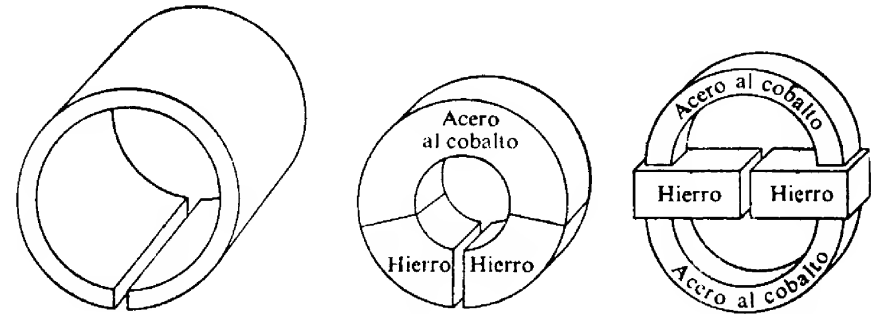


Fig. 5. Pequeña capa cilíndrica de acero al cobalto. Fig. 6. Imán de acero al cobalto con polos de hierro dulce. Fig. 7. Imán con dos secciones en paralelo de acero al cobalto.

construirse una capa cilíndrica de 5 cm de circunferencia media y 2 cm^2 de sección, tal como la indicada en la figura 5, este imán no tendría la distribución de flujo conveniente para la aplicación particular a que se destine. Las piezas polares pueden tener sección de forma cuadrada o redonda si se introduce hierro dulce en el circuito en la forma indicada en las figuras 6 y 7. En estos diseños, la inducción magnética en el hierro es tan baja que puede despreciarse la caída de potencial magnético. En la figura 6, la longitud y sección recta del acero al cobalto corresponden a los valores óptimos. El diámetro del anillo se toma de manera que corresponda a los requisitos prácticos de la aplicación. Cuando se emplee el diseño de la figura 7, la sección recta del acero al cobalto es la mitad de la calculada y la longitud de cada mitad es 5 cm.

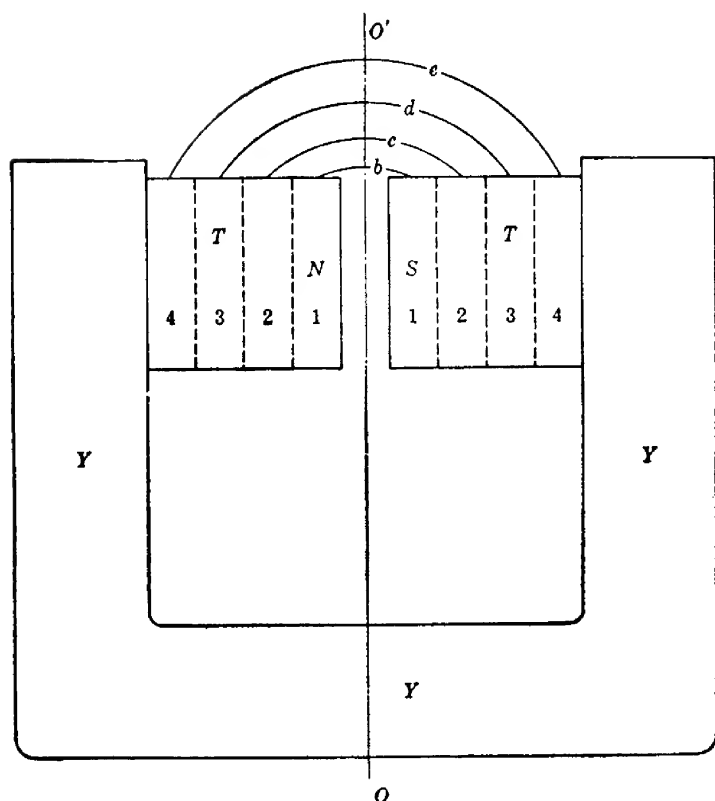
Si la aplicación particular requiere una inducción magnética de 7 800 G en lugar de un flujo total de 13 000 Mx, se puede hacer terminar en punta las piezas polares de manera que den una sección de entrehierro de $1,5 \text{ cm}^2$ en lugar de 2 cm^2 . Si se mantiene el flujo total en 13 000 Mx, el área de la sección recta del acero al cobalto será la misma de antes, pero su longitud deberá aumentarse algo a causa de la disminución de permeancia del entrehierro.

Si, en el nuevo diseño, se utiliza Alnico, puede seguirse aprovechando la disposición de la figura 6, pero deberán intercambiarse el hierro dulce y el material magnético a fin de reducir la pérdida de flujo, según se verá en el apartado siguiente.

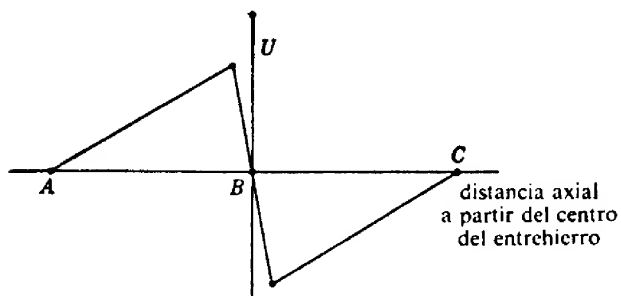
3. DISPERSIÓN Y PÉRDIDA³

Los métodos estudiados en los apartados del 6 al 11 del capítulo III para tener en cuenta los flujos de dispersión y pérdida en los electroimanes, pueden utilizarse también para los imanes permanentes. En el caso de entrehierro corto, el área de

³ A. TH. VAN URK, «The Use of Modern Steels for Permanent Magnets», *Philips Tech. Rev.*, 5 (1940), 29-35.



(a) se han dividido los polos en secciones para calcular los flujos de pérdida b , c , d y e .



(b) distribución del potencial magnético a lo largo del eje polar

Fig. 8. Imán permanente con polos T de Ticonal y armadura Y de hierro dulce.

la sección recta deberá tomarse algo mayor que el área de las caras polares, tal como se indicaba en el apartado 7 del capítulo III. Cuando la longitud del entrehierro sea mayor que la quinta parte de la menor dimensión del polo, o cuando el flujo de pérdida entre otras partes del circuito magnético sea considerable, se deberán aplicar los principios del apartado 10 del capítulo III. Con un ejemplo podrá verse mejor cómo se utilizan dichos principios en un diseño específico.

Diseñemos el circuito magnético de la figura 8 para que dé una inducción magnética de 4 500 G entre los polos. El instrumento que utilice este circuito magnético requerirá un entrehierro de 0,5 cm con un área polar de 4,8 cm². El material para imán permanente se utilizará para construir las piezas polares T , las cuales estarán soportadas por una armadura de hierro dulce Y en la cual será despreciable, a la inducción magnética requerida, la caída de potencial magnético. Las curvas de desimancación de la figura 2 indican que el acero al cobalto tiene su punto óptimo de trabajo a una inducción magnética ligeramente inferior a los 6 000 G, pero, debido a lo relativamente bajo que es el campo magnético, los polos deberán ser más largos de lo que deberían ser si fueran de Alnico, Ticonal 2A, o Ticonal 3,8. Con Alnico, el diseño emplearía el volumen mínimo de material si creara una inducción magnética de 4 200 G en el Alnico, estando creada la inducción magnética necesaria en el entrehierro por piezas polares troncocónicas P de hierro dulce colocadas en la forma indicada en la figura 9. No obstante, la dispersión entre las superficies cónicas es tan grande que los requisitos del entrehierro se lograrán con mayor economía de material si se elige un punto de funcionamiento sobre la curva del Alnico situado algo más arriba que el punto señalado por la cruz. Otra posibilidad sería buscar un material más adecuado para trabajar a inducciones más elevadas. Podrían emplearse algunos tipos de Alnico de fundición⁴ (no indicados en la lámina de curvas). El material llamado Ticonal 3,8 (titanio, cobalto, níquel, aluminio y hierro) es evidentemente mejor que todos los demás representados en la figura 2 y será

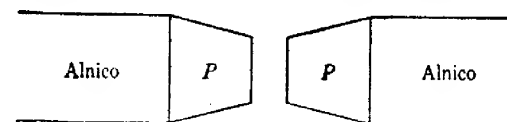


Fig. 9. Polos de alnico con piezas polares de hierro dulce ahusadas.

el que se utilice en este diseño. Se eligen polos cilíndricos de 2,54 cm de diámetro (5,065 cm² de sección) y su longitud se determinará en el proceso de cálculo de las relaciones para el flujo y potencial magnéticos.

En la figura 8a puede verse un esquema en el que se han dibujado aproximadamente las direcciones de algunas líneas de flujo que penetran en la superficie cilíndrica de las piezas polares. El plano OO' de simetría normal al eje de los polos, es el plano de potencial magnético cero. En la figura 8b puede verse la distribución del potencial a lo largo del eje polar, trazada a igual escala horizontal que la utilizada en la figura 8a.

La caída de potencial en el entrehierro es:

$$U = 0,005 \times 4\,500 \times 79,58 = 1\,790 \text{ ampere-espira} \quad (9)$$

⁴ B. M. SMITH, «Alnico, Properties and Equipment for Magnetization and Test», *G. E. Rev.*, 45 (1942), 210-213.

ya que el valor de H en el aire correspondiente a una inducción de 4 500 G es 4 500 Oe, o sea $4\,500 \times 79,58$ L. La ecuación 9 da la diferencia de potencial magnético que deben vencer los imanes permanentes y es uno de los factores más importantes en la determinación de la longitud polar.

En los imanes de Ticonal el flujo crece con la distancia contada a partir del entrehierro a consecuencia del gran flujo inútil que penetra por las superficies cilíndricas de los polos. Se puede realizar un cálculo preciso y teóricamente lógico de este flujo, aunque llevaría consigo un trabajo enorme, si es factible la construcción de un mapa o plano del flujo para esta configuración de potenciales magnéticos. Se tendría una buena aproximación examinando las líneas de flujo, materializadas con limaduras de hierro, en la proximidad de los polos adyacentes de dos barras imanadas colocadas extremo con extremo y separadas por un entrehierro. Dicho examen revela que los caminos se pueden aproximar bastante bien mediante arcos de círculos concéntricos cuyos centros se hallen en el punto medio del entrehierro, según indican b , c , d y e en la figura 8a. Se supondrán caminos del flujo de esta naturaleza y se calculará el flujo extraño.

Considérense dos polos cilíndricos iguales, de radio r , con caras planas paralelas de polaridad opuesta tal como indica la figura 10. En primer lugar se hallará la reluctancia de una capa esférica delgada, de espesor t y radio medio a . El elemento dife-

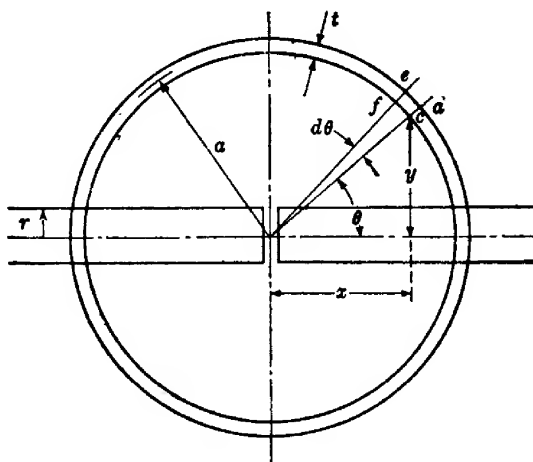


FIG. 10. Corte de polos cilíndricos con camino de dispersión.

rencial es una capa obtenida haciendo girar el área diferencial $cdef$ en torno al eje de los imanes. La longitud de la capa en la dirección del flujo es $ad\theta$, y su sección recta es perpendicular al flujo e igual a $2\pi yt$. La reluctancia de este elemento es:

$$dR = \frac{ad\theta}{\mu 2\pi yt} \quad (10)$$

y, como

$$-d\theta = \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}}, \quad (11)$$

la reluctancia total de la capa delgada es:

$$\begin{aligned} R &= \frac{a}{\pi \mu t} \int_r^a \frac{dy}{y \sqrt{a^2 - y^2}} \\ &= -\frac{1}{\pi \mu t} \left[\arg \operatorname{ch} \frac{a}{y} \right]_r^a \\ &= \frac{1}{\pi \mu t} \arg \operatorname{ch} \frac{a}{r}, \end{aligned} \quad (12)$$

y la permeancia es el recíproco de la reluctancia, o sea,

$$P = \frac{\pi \mu t}{\arg \operatorname{ch} \frac{a}{r}}. \quad (13)$$

A continuación se utilizará este resultado para el diseño del imán de la figura 8.

Se hallan las caídas de potencial magnético en los polos dividiéndose en cuatro rebanadas iguales (cada una tendrá 0,635 cm) e introduciendo en dichas rebanadas el flujo de pérdida. La inducción magnética en las primeras secciones sería casi igual a la existente en el entrehierro si no fuera por la gran concentración de flujo de dispersión en los bordes de los polos.

Aplicando la corrección de dispersión, la inducción magnética B_1 en la primera mitad de cada primera sección, se toma igual a 4 500 $\left(\frac{3,04}{2,54} \right)^2 = 6\,300$ G. El valor correspondiente de H en el Ticonal es, según la figura 2, 560 Oe $\approx 44\,600$ L. La caída de potencial magnético entre el entrehierro y los puntos medios de las dos secciones interiores es $0,00635 \times 44\,600 = 280$ ampere-espira. La diferencia de potencial a lo largo del camino b entre dichos puntos medios es:

$$U_b = 1\,790 - 280 = 1\,510 \text{ ampere-espira} \quad (14)$$

La permeancia del camino de pérdida b se halla sustituyendo en la ecuación (13) los valores

$$r = 1,27 \text{ cm} \quad (15)$$

$$a = \sqrt{(0,5675)^2 + (1,27)^2} = 1,39 \text{ cm} \quad (16)$$

$$t = 0,635 \times \frac{0,5675}{1,39} = 0,259 \text{ cm} \quad (17)$$

$$\arg \operatorname{ch} a/r = \arg \operatorname{ch} (1,094) = 0,435.$$

$$P_b = \frac{3,14 \times 1 \times 0,259}{0,435} = 1,87 \text{ uem} \quad (18)$$

que en unidades Giorgi será $1,87 \times 10^{-8}$.

El flujo en el camino b es:

$$\phi_b = 1\,510 \times 1,87 \times 10^{-8} = 2\,800 \times 10^{-8} \text{ Wb} = 2\,800 \text{ Mx} \quad (19)$$

Este flujo de pérdida penetra a través de las superficies cilíndricas de los polos por la primera sección. La suma de este flujo de pérdida y del que penetra por los extremos del entrehierro de la primera sección es el flujo total

$$\phi_2 = 2\,800 + 6\,300 \times 5,065 = 34\,700 \text{ Mx} \quad (20)$$

que penetra en las segundas secciones. La inducción magnética en las segundas secciones es $34\,700/5,065 = 6\,900 \text{ G}$. El valor correspondiente de H es 550 Oe o sea, $43\,800 \text{ L}$. La caída de potencial entre los centros de las primeras y las segundas secciones será $0,0127 \times 43\,800 = 560 \text{ ampere-espira}$. La caída de potencial a lo largo del camino c es entonces

$$U_c = 1\,510 - 560 = 950 \text{ ampere-espira.} \quad (21)$$

Para el camino c la permanencia vale:

$$P_c = \frac{3,14 \times 1 \times (0,635 \times 0,69)}{0,85} = 1,58 \text{ uem} \quad (22)$$

que en unidades Giorgi será $1,58 \times 10^{-8}$.

El flujo de pérdida en el camino c será:

$$\phi_c = 950 \times 1,58 \times 10^{-8} = 1\,500 \times 10^{-8} \text{ Wb} = 1\,500 \text{ Mx} \quad (23)$$

y penetrará a través de las superficies cilíndricas de las segundas secciones, haciendo que el flujo total ϕ_3 que pene en las terceras sea $34\,700 + 1\,500 = 36\,200 \text{ Mx}$. Esto da una inducción magnética en las terceras secciones de $7\,200 \text{ G}$. El valor correspondiente de H es 540 Oe , o sea, $43\,000 \text{ T}$. La caída entre los puntos medios de las secciones segunda y tercera es $0,0127 \times 43\,000 = 546 \text{ ampere-espira}$.

$$U_d = 950 - 546 = 404 \text{ ampere-espira} \quad (24)$$

$$P_d = \frac{3,14 \times 1 \times (0,635 \times 0,821)}{1,17} = 1,40 \text{ uem} \quad (25)$$

$$\phi_d = 404 \times 1,40 = 570 \text{ Mx.} \quad (26)$$

$$\phi_4 = 36\,200 + 570 = 36\,800 \text{ Mx.} \quad (27)$$

$$B_4 = 36\,800/5,065 = 7\,400 \text{ G.} \quad (28)$$

$$H_4 = 527 \text{ Oe} = 41\,900 \text{ L.} \quad (29)$$

La caída de potencial que queda entre los puntos medios de las terceras secciones y la armadura es, solamente, de $404 \text{ ampere-espira}$. Ello requiere $404/41\,900 = 0,00964 \text{ m}$, o sea, $9,64 \text{ mm}$ de Ticonal para ambos polos. El flujo de pérdida a lo largo de los restantes $(0,96/2) - 0,318 = 0,10 \text{ cm}$ de superficie cilíndrica es tan pequeño que no es preciso calcularlo.

La longitud total de Ticonal (ambos polos) es la longitud total a lo largo de la cual se calculan las caídas de potencial; esta suma es $0,635 + 1,270 + 1,270 + 0,964 = 4,14 \text{ centímetros}$.

El flujo extraño total es $(6300 - 4500) \times 5,065 + 2800 + 1500 + 570 = 13900 \text{ Mx}$, que es el $13\,900 \times 100/22\,500 = 62 \%$ del flujo entre caras polares.

La importancia de estos métodos de estimación del efecto del flujo extraño no reside, ciertamente, en la precisión con que puedan predecir resultados correctos sino, simplemente, en su capacidad de proporcionar una noción de las magnitudes aproximadas que intervienen. Lo más importante para un diseñador es su experiencia con los circuitos con que ha trabajado anteriormente y los principios de la teoría de modelos desarrollada en el capítulo VII, y rara vez deberá realizar cálculos como los que se acaban de ver.

Si en lugar de las piezas polares del circuito de la figura 8, se usaran como miembros verticales imanes de Ticonal, el flujo de pérdida sería mucho mayor. El peor diseño que puede tener dicho imán desde el punto de vista del rendimiento en la utilización del material magnético es el del tipo indicado en la figura 11, en el cual el imán permanente se halla lo más lejos posible del entrehierro. En este caso, las superficies de los polos y los miembros verticales tienen la diferencia de potencial magnética máxima y el flujo de pérdida es varias veces mayor que el útil.

Muy a menudo, cuando el diseño lleva consigo un gran flujo de pérdida como es el caso del imán del contador de watt-hora de la figura 12, se obtiene el empleo más económico del material dando al imán una forma tal que la sección sea tanto

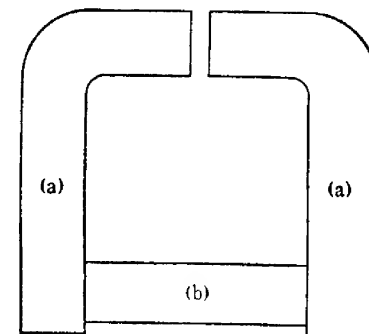


FIG. 11. Imán permanente con flujo de pérdida excesivamente grande: a) hierro dulce, b) material del imán.

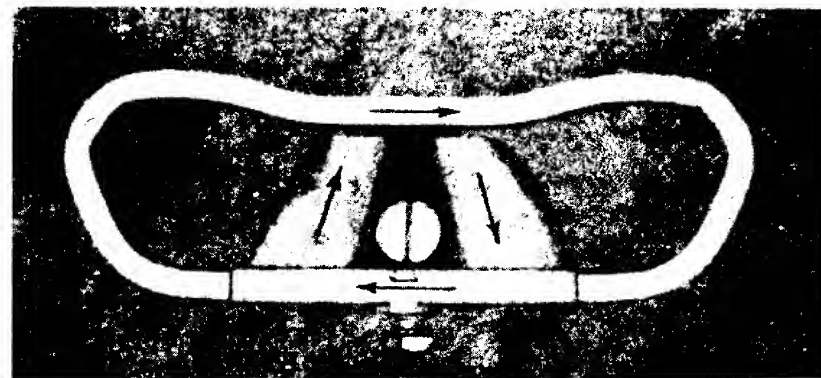


FIG. 12. Vista posterior del conjunto de imanes de un contador eléctrico de watt-hora. Las piezas polares de Alnico son solidarias a la placa base de acero laminado en frío; esta unidad se suelda por resistencia a la armadura de acero laminado en frío que regula al entrehierro y actúa como blindaje magnético contra los campos desimantadores extraños. (Cortesía de General Electric Company.)

mayor cuanto más alejada esté del entrehierro, permitiendo así que todo el material de imán permanente trabaje con inducción magnética óptima. Se determina primeramente el flujo requerido en los extremos del imán, llamado flujo principal, y luego

se calcula la longitud del imán como si no hubiera flujo de pérdida, soliéndose realizar este diseño partiendo de la base de una inducción magnética óptima. El flujo principal ocupa un camino de sección recta constante y el de pérdida ocupa el material adicional al que se da el nombre de *capa de pérdida*, según puede verse en la figura 13.

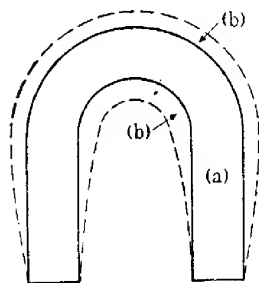


FIG. 13. Esquema donde puede verse el aumento de sección necesario para mantener constante la inducción magnética: a) camino principal, b) capa de pérdida.

4. ESTABILIZACIÓN DE IMANES PERMANENTES

Los anteriores criterios de diseño para imanes permanentes son bastante satisfactorios cuando hay que diseñar los imanes con la condición de emplear un volumen mínimo de aleación y estar sometidos a la influencia desimanadora única de un entrehierro fijo. En muchos casos, no existe esta situación ideal. Por ejemplo, el material magnético puede estar sometido a una influencia desimanadora tal como la originada por la corriente alterna que circula por la bobina de un receptor telefónico o por un conductor próximo al imán de freno de un contador eléctrico de watt-hora. Estas corrientes crean fuerzas magnetomotrices alternas.

Después del proceso de imanación inicial y de quitar del entrehierro el puente de hierro dulce, queda determinado un punto P_1 de funcionamiento en la intersección de la recta negativa del entrehierro y la curva representativa del flujo en función de la elevación de potencial magnético en la aleación, tal como se indica en la figura 14. Si se aplica ahora al circuito una fuerza magnetomotriz desimanadora F , el nuevo punto de funcionamiento deberá ser tal que, en el sentido del flujo, la elevación de potencial en la aleación quede equilibrada por la caída de potencial en el entrehierro y la fuerza magnetomotriz negativa F . El nuevo flujo es ϕ_2 y corresponde a una elevación U_2 en la aleación y a una caída $U_2 - F$ en el entrehierro. Cuando se suprime la influencia desimanadora, la recuperación del flujo en función de la elevación de potencial en la aleación no asciende siguiendo la curva de desimanación inicial, sino la P_2P_3 correspondiente a la permeabilidad incremental del material en el punto P_2 . Tras este hemicyclo de fuerza magnetomotriz desimanadora, el punto de funcionamiento se halla en P_3 . Al invertir F se convierte en fuerza magnetomotriz imanadora y lleva al punto de funcionamiento a lo largo del lazo pequeño hasta P_4 en donde el flujo es ϕ_4 , la elevación de potencial en la aleación es U_4 y la caída en el entrehierro es $U_4 + F$. Al suprimir la fuerza magnetomotriz F se tiene como punto

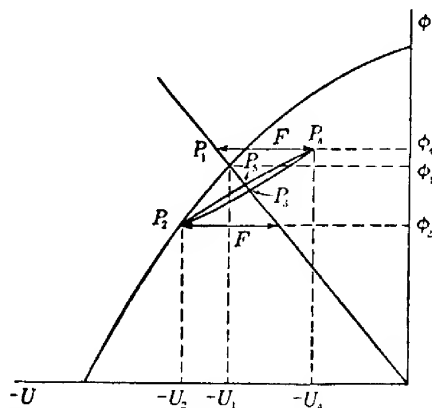


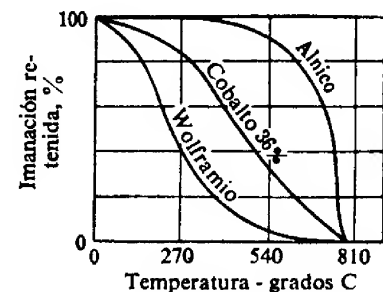
FIG. 14. Diagrama indicador del efecto desimanador de una fuerza magnetomotriz alterna sobre un imán permanente.

de funcionamiento el P_5 . Un ciclo completo de fuerza magnetomotriz alterna debilita al imán dejándolo en la condición representada por P_5 . Un segundo ciclo análogo al primero hace que el punto de funcionamiento descienda hasta P_2 aproximadamente y luego recorra de nuevo el lazo pequeño.

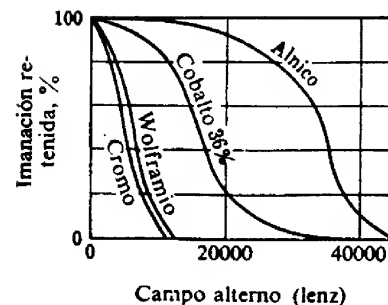
► Si se desimana un imán permanente aplicándole una fuerza magnetomotriz alterna de valor máximo F , a partir de ese momento no sufrirá desimanación apreciable si se le somete a fuerzas magnetomotrices alternas inferiores a F .

El funcionamiento subsiguiente se estabiliza en la pequeña región próxima a P_3 y P_5 . Los imanes como los de la figura 12 se emplean para crear el par de freno en los contadores de watt-hora. Se someten a una desimanación por corriente de magnitud considerable y pasan, también, por ciclos definidos de temperatura y pruebas de vibraciones.

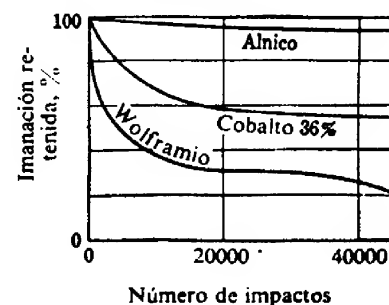
El estudio anterior indica que cuando se tienen en cuenta factores tales como los campos alternos, hay que modificar los criterios de diseño. Pueden aumentarse la longitud y el área de la sección recta del imán de manera que el punto de funcionamiento corresponda al punto medio del segmento P_3P_5 con el flujo requerido en el entrehierro, pero dicho punto no será, necesariamente, el punto óptimo de funcionamiento que dé el volumen mínimo de aleación. El nuevo punto de funcionamiento



(a) resistencia a los efectos del calentamiento



(b) resistencia a los efectos de un campo extraño



(c) resistencia a los efectos de las vibraciones

FIG. 15. Efectos de la temperatura (a), campo alterno (b), y vibración (c) sobre los imanes permanentes.

se puede llevar a la curva de desimánación del material y entonces se puede determinar, mediante construcción gráfica, el lugar geométrico de los puntos análogos obtenidos al variar las dimensiones del imán. Para obtener el punto óptimo sobre la nueva curva, puede utilizarse un procedimiento análogo al explicado para la curva inicial suponiendo que no existe ninguna influencia desimanadora. Las curvas de la figura 15a, b y c indican que el efecto sobre la intensidad del imán parece ser el mismo tanto si el agente desimanador es una fuerza magnetomotriz, como si es una vibración mecánica o la agitación térmica.

El empleo de una longitud mayor, y un área de la sección recta menor, que las indicadas por el producto máximo de B y H da un imán que está menos afectado por una magnitud dada de agente desimanador que otro imán cuyas longitudes y área de la sección recta correspondan al punto de $(BH)_{max}$. Es decir, la variación porcentual de B debida a una variación dada de H es menor cuando se toma el punto de funcionamiento en la parte superior de la curva de desimánación. Por esta razón, los imanes antiguos no se diseñaban para cociente óptimo de dimensiones sino, más bien, para mayor permanencia de flujo. El shunt magnético colocado entre los polos de un imán, mientras no se usa, es efectivamente un dispositivo para llevar el estado magnético a lo largo de la línea P_2P_4 extendida hasta cerca del eje B de manera que las influencias desimanadoras tengan menos probabilidad de llevarlo hacia atrás y abajo por la curva de desimánación, originando un debilitamiento permanente. Con las aleaciones modernas no son necesarios, en general, los shunts magnéticos a causa de la mayor estabilidad de imanación que presentan estas aleaciones, según se desprende de la forma achatada de sus curvas de desimánación. Las curvas de la figura 15a, b y c ponen de manifiesto las características relativas de estabilidad de diversas aleaciones para imanes permanentes.

En la producción en gran escala de un dispositivo magnético, las variaciones de la composición de la aleación, de la efectividad de la soldadura entre partes distintas del circuito magnético, del proceso de imanación y del montaje del producto acabado, parecen hacer imposible un buen control de la calidad. Una prueba del 3 % de 319 000 imanes de contador ⁵ del tipo indicado en la figura 12 revela que el 1 % de ellos tenían una desviación del flujo igual al 5 % del valor medio. Este éxito en el control de calidad y la permanencia de los imanes después de su fabricación constituyen logros científicos de importancia tan grande como los otros elementos del proceso de diseño.

5. ENERGÍA DEL CAMPO MAGNÉTICO

La existencia de un campo eléctrico o magnético indica siempre una acumulación de energía. La teoría de Maxwell enseña que ambos campos son mutuamente dependientes y que doquiera se establezcan, se suministra energía a la región en que existen. En ciertas condiciones, que dependen de las propiedades del medio de la región, la energía entregada a la región cuando se establecen los campos vuelve al sistema inicial cuando los campos se suprimen. En el vacío, el proceso es totalmente reversible.

En toda pieza de un aparato en la que existan los campos eléctrico y magnético,

J. H. Goss, «Permanent Magnets», *Metals and Alloys*, 15 (1942), 576-582.

los procesos de acumulación y liberación de energía no son totalmente reversibles. Cierta cantidad de energía se disipa siempre en forma de calor en el medio ocupado por el campo y, aun cuando sea despreciable la magnitud de esta energía en ciertos medios, en otros es apreciable. Aún cuando se puedan desarrollar las relaciones de la energía almacenada en un campo magnético para el problema más general, es igualmente satisfactorio y menos confuso, a efectos de este estudio, considerar una configuración sencilla tal como un circuito magnético toroidal. Considérese que las dimensiones del núcleo de la figura 16 son tales que el espesor T del núcleo sea pequeño frente al diámetro medio D del toroide o, en otras palabras, que las longitudes de los caminos de flujo concéntricos sean esencialmente iguales. Se supone que el núcleo está constituido por material de resistividad infinita, con lo cual serán despreciables las corrientes circulatorias inducidas en el material por la variación del flujo. Estas corrientes circulatorias o corrientes de Foucault se estudian con mayor detalle en el capítulo V y deberán ser débiles, pues su presencia significa una energía disipada en el núcleo en forma de calor y que no puede devolverse al circuito de excitación que suministra la energía.

Si se distribuye uniformemente en torno al núcleo el devanado de excitación, siendo despreciable el flujo magnético de pérdida, podrá considerarse que todo el flujo ϕ abraza a cada una de las N espiras del devanado de excitación. Además, si se considera despreciable la resistencia de la bobina, o se considera localizada fuera de los terminales a y b de la figura 16, la diferencia de potencial que aparece entre a y b será la generada a consecuencia de la velocidad de variación del flujo $d\phi/dt$. Por tanto, si en un instante dado cualquiera circula por el devanado una corriente de intensidad i y, a consecuencia de la fuerza magnetomotriz que produce, aparece en el núcleo un flujo ϕ , la tensión instantánea e vendrá dada por

$$e = N \frac{d\phi}{dt}, \quad (30)$$

donde e y ϕ tienen los sentidos indicados en la figura 16. La potencia instantánea p_{ab} entregada en los terminales a y b es

$$p_{ab} = ei = Ni \frac{d\phi}{dt}. \quad (31)$$

Para las condiciones estipuladas, esta potencia es totalmente absorbida por el campo magnético y, según sean las propiedades del medio, o se almacenará toda y por tanto será recuperable, o parte se disipará y parte se recuperará y por tanto será sólo parcialmente recuperable.

Por razones cuya importancia se pondrá de manifiesto en el capítulo V, conviene

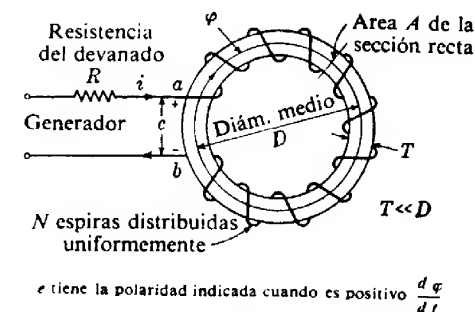


FIG. 16. Combinación de circuitos eléctricos y magnéticos para el estudio de las relaciones de energía del apartado 5.

expresar p_{ab} en función de H , B y de las dimensiones del núcleo en vez de en función del número de espiras del devanado en cuestión, la intensidad de la corriente que por él circula y el flujo en el núcleo φ . Como el grosor del núcleo es pequeño frente al diámetro del toroide, podrá considerarse uniforme la inducción magnética en toda la sección recta. Por tanto,

$$\varphi = AB \quad (32)$$

y

$$\frac{d\varphi}{dt} = A \frac{dB}{dt}, \quad (33)$$

donde A es el área constante de la sección recta del núcleo. Además,

$$H = \frac{4\pi Ni}{l}, \quad (34)$$

que, en un sistema de unidades racionalizadas será:

$$H = \frac{Ni}{l} \quad (34 \text{ bis})$$

o sea,

$$Ni = \frac{Hl}{4\pi}, \quad (35)$$

que, en unidades racionalizadas sería:

$$Ni = Hl \quad (35 \text{ bis})$$

en donde l es igual a πD , longitud media del núcleo.

Sustituyendo en la ecuación (31) las (33) y (35), se tiene:

$$p_{ab} = \frac{HlA}{4\pi} \frac{dB}{dt} = \frac{\mathcal{V}}{4\pi} H \frac{dB}{dt}, \quad (36)$$

o, en unidades racionalizadas:

$$p_{ab} = \mathcal{V} H \frac{dB}{dt} \quad (36 \text{ bis})$$

donde $\mathcal{V} = lA$ es el volumen del núcleo.

En un tiempo pequeño cualquiera dt , la energía entregada al campo magnético dW es:

$$dW = p_{ab} dt = \frac{\mathcal{V}}{4\pi} H \frac{dB}{dt} dt = \frac{\mathcal{V}}{4\pi} H dB. \quad (37)$$

o, en unidades racionalizadas,

$$dW = \mathcal{V} H dB. \quad (37 \text{ bis})$$

Las ecuaciones (37) indican que la energía dW no depende del tiempo que tarda B en variar una cantidad dB . Es decir, dW depende solamente de la variación de B y no de la velocidad con que se produce dicha variación. En general, la energía W entre-

gada al campo cuando varía B desde un valor B_1 cualquiera a otro valor cualquiera B_2 es

$$W = \frac{\mathcal{V}}{4\pi} \int_{B_1}^{B_2} H dB, \quad (38)$$

que, en unidades racionalizadas es

$$W = \mathcal{V} \int_{B_1}^{B_2} H dB \quad (38 \text{ bis})$$

luego, la energía por unidad de volumen será:

$$w = \frac{1}{4\pi} \int_{B_1}^{B_2} H dB \quad (39)$$

o, en unidades racionalizadas:

$$w = \int_{B_1}^{B_2} H dB. \quad (39 \text{ bis})$$

Para realizar las integraciones indicadas es preciso conocer H en función de B para la variación de inducción magnética que se considere. Por ejemplo, si B verifica una variación cíclica y la región ocupada por el campo es un material ferromagnético, se necesitará la curva de imanación del material del núcleo para todo el ciclo. Las variaciones cíclicas de H y B se estudian, en forma general, en el capítulo siguiente. Ahora, pueden deducirse ciertos resultados interesantes suponiendo constante la permeabilidad del medio.

Si se considera constante la permeabilidad, la histeresis deberá, en consecuencia, considerarse despreciable y

$$H = \frac{B}{\mu}. \quad (40)$$

La ecuación (39) se convierte entonces en:

$$w = \frac{1}{4\pi\mu} \int_{B_1}^{B_2} B dB = \frac{B_2^2 - B_1^2}{8\pi\mu}. \quad (41)$$

o, en unidades racionalizadas,

$$w = \frac{B_2^2 - B_1^2}{2\mu}. \quad (41 \text{ bis})$$

Luego la energía absorbida por unidad de volumen del campo magnético cuando se establece a partir de cero una inducción magnética B es:

$$w = \frac{B^2}{8\pi\mu}. \quad (42)$$

o, en unidades racionalizadas,

$$w = \frac{B^2}{2\mu} \quad \blacktriangleright (42 \text{ bis})$$

Esta energía queda almacenada en el campo magnético y se devuelve al circuito de excitación al anular la inducción magnética. Como se verá en el capítulo siguiente, cuando el medio presente fenómenos de histeresis, no toda la energía se devuelve al circuito de excitación.

Si en el circuito magnético toroidal de la figura 16 se practica un entrehierro, la inducción magnética en él es prácticamente igual a la existente en el hierro, a menos que el entrehierro sea largo. A las inducciones de funcionamiento corrientes, la permeabilidad del hierro puede ser unas 2 000 veces mayor que la del aire. Luego, como la energía almacenada por unidad de volumen es inversamente proporcional a la permeabilidad, la energía almacenada por unidad de volumen en el entrehierro será unas 2 000 veces mayor que la almacenada en el hierro. Si el volumen del entrehierro es tan sólo un 1 % del volumen del hierro, predominará la energía almacenada en el entrehierro. Esta condición hace que sea relativamente sencillo obtener expresiones aproximadas de las fuerzas magnéticas que actúan sobre las caras de hierro de un entrehierro, tema que se trata en el apartado siguiente.

6. FUERZA ATRACTIVA MAGNÉTICA

Considérese el circuito magnético de la figura 17. Ya se sabe que las dos caras férreas que limitan el entrehierro se atraen cuando se imana el núcleo. De los resultados del apartado anterior puede deducirse una expresión aproximada de las fuerzas magnéticas que actúan sobre las dos caras del entrehierro. En muchos problemas prácticos, la aproximación representada por la expresión es buena, según puede apreciarse al considerar las hipótesis en las que se basa la expresión.

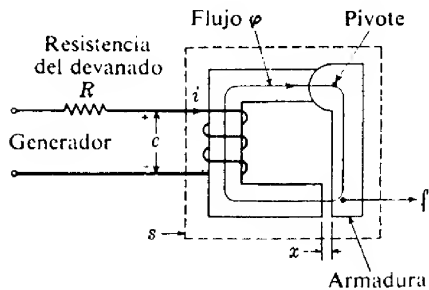


FIG. 17. Circuito magnético con entrehierro variable para el estudio de la fuerza atractiva que se ejerce entre polos.

Se puede calcular la fuerza f requerida para desplazar la armadura contra la fuerza de atracción magnética aplicando el principio de la conservación de la energía al sistema s encerrado por la línea de trazos. Si en este sistema se produjeran cambios en la energía total, deberían estar de acuerdo con la ecuación de la conservación de la energía, que es:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Energía} \\ \text{eléctrica} \\ \text{(suministrada)} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Energía} \\ \text{mecánica} \\ \text{(suministrada)} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Aumento de} \\ \text{la energía} \\ \text{almacenada} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Energía convertida} \\ \text{irreversiblemente} \\ \text{en otras formas} \end{array} \right) \quad (43)$$

Considérese término por término la ecuación 43 cuando se aumenta el entre-

hierro en dx durante un tiempo dt a causa de una fuerza f . La energía eléctrica suministrada dW_e es:

$$dW_e = ei dt = N \frac{d\varphi}{dt} i dt = Ni d\varphi, \quad (44)$$

donde e es la diferencia de potencial que aparece entre los terminales de la bobina a consecuencia de la variación de flujo $d\varphi/dt$, variación debida al aumento de reluctancia del camino del flujo, y $d\varphi$ es la variación total de flujo durante el tiempo dt .

La energía mecánica suministrada dW_m es:

$$dW_m = f dx. \quad (45)$$

La energía W_s almacenada en el sistema s lo es en forma de energía magnética. El incremento dW_s se compone de dos componentes, primero el incremento dW_{si} en el hierro, y segundo el incremento dW_{sa} en el aire del entrehierro. En virtud de la ecuación (37),

$$dW_{si} = \frac{\mathcal{V}_i}{4\pi} H_i dB_i, \quad (46)$$

y en virtud de la (37 bis), se tiene para unidades racionalizadas

$$dW_{si} = \mathcal{V}_i H_i dB_i \quad (46 \text{ bis})$$

donde \mathcal{V}_i , H_i y B_i son, respectivamente, el volumen del hierro, H en el hierro y B en el hierro. El incremento dW_{sa} se debe tanto a la variación de la inducción magnética en el entrehierro B_a como a la variación del volumen \mathcal{V}_a del entrehierro. La mejor manera de obtenerlo es derivando respecto a x la expresión de la energía total almacenada en el entrehierro [de las ecuaciones (42) o (42 bis), multiplicada por \mathcal{V}_a]. Así,

$$\frac{dW_{sa}}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\mathcal{V}_a B_a^2}{8\pi\mu_0} \right) = \frac{B_a^2}{8\pi\mu_0} \frac{d\mathcal{V}_a}{dx} + \frac{2\mathcal{V}_a B_a}{8\pi\mu_0} \frac{dB_a}{dx}, \quad (47)$$

que si se utilizan unidades racionalizadas sería

$$\frac{dW_{sa}}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\mathcal{V}_a B_a^2}{2\mu_0} \right) = \frac{B_a^2}{2\mu_0} \frac{d\mathcal{V}_a}{dx} + \frac{2\mathcal{V}_a B_a}{2\mu_0} \frac{dB_a}{dx}, \quad (47 \text{ bis})$$

siendo μ_0 la permeabilidad del aire en el sistema de unidades que se emplea en el cálculo. Como $\mathcal{V}_a = A_a x$, siendo A_a el área de la sección recta del entrehierro, el almacenamiento diferencial de energía en el entrehierro al alargarlo en dx será igual a la expresión de las ecuaciones (47) o (47 bis) multiplicadas por dx ; es decir,

$$dW_{sa} = \frac{dW_{sa}}{dx} dx = \frac{B_a^2 A_a}{8\pi\mu_0} dx + \frac{\mathcal{V}_a B_a}{4\pi\mu_0} dB_a. \quad (48)$$

$$dW_{sa} = \frac{dW_{sa}}{dx} dx = \frac{B_a^2 A_a}{2\mu_0} dx + \frac{\mathcal{V}_a B_a}{\mu_0} dB_a. \quad (48 \text{ bis})$$

Como $B_a/\mu_0 = H_a$, campo magnético en el entrehierro, las ecuaciones (48) y (48 bis) pueden ponerse en la forma,

$$dW_{sa} = \frac{H_a B_a A_a}{8\pi} dx + \frac{\mathcal{V}_a}{4\pi} H_a dB_a, \quad (49)$$

y empleando unidades racionalizadas

$$dW_{sa} = \frac{1}{2} H_a B_a A_a dx + \mathcal{V}_a H_a dB_a. \quad (49 \text{ bis})$$

El cuarto término de la ecuación (43), es decir, la energía convertida irreversiblemente en otras formas contiene la conversión en calor de la energía magnética o eléctrica a causa de la histeresis y las corrientes de Foucault y dichos efectos se consideraron despreciables en el enunciado del problema. Por tanto, consideraremos nulo al cuarto término, lo cual representa una aproximación razonable en la mayoría de los casos.

Puede ahora escribirse la ecuación (43) con terminología matemática, utilizando las anteriores expresiones para los diferentes términos. Se tiene así,

$$dW_e + dW_m = dW_{st} + dW_{sa} + 0, \quad (50)$$

o sea,

$$Ni d\varphi + f dx = \frac{\mathcal{V}_l}{4\pi} H_l dB_l + \frac{H_a B_a A_a}{8\pi} dx + \frac{\mathcal{V}_a}{4\pi} H_a dB_a. \quad (51)$$

y empleando unidades racionalizadas:

$$Ni d\varphi + f dx = \mathcal{V}_l H_l dB_l + \frac{1}{2} H_a B_a A_a dx + \mathcal{V}_a H_a dB_a \quad (51 \text{ bis})$$

La ecuación (51) ó (51 bis) puede parecer complicada pero, si se expresa $Ni d\varphi$ en función de los volúmenes, campos magnéticos e inducciones magnéticas en el hierro y el entrehierro, se obtiene un resultado sencillo. Obsérvese que,

$$4\pi Ni = U_l + U_a = H_l l_l + H_a x, \quad (52)$$

o sea,

$$Ni = \frac{1}{4\pi} (H_l l_l + H_a x), \quad (53)$$

y si se hubieran empleado unidades racionalizadas sería:

$$Ni = H_l l_l + H_a x, \quad (53 \text{ bis})$$

donde U_l y U_a son las caídas de potencial magnético en el hierro y en el aire respectivamente, y l_l es la longitud del camino del flujo en el hierro. Además

$$d\varphi = A dB_l = A_a dB_a. \quad (54)$$

Multiplicando por la ecuación (54) las ecuaciones (53) y (53 bis) se tienen las expresiones de los primeros términos de las ecuaciones (51) y (51 bis),

$$\begin{aligned} Ni d\varphi &= \frac{1}{4\pi} (A l_l H_l dB_l + A_a x H_a dB_a) \\ &= \frac{1}{4\pi} (\mathcal{V}_l H_l dB_l + \mathcal{V}_a H_a dB_a). \end{aligned} \quad (55)$$

$$Ni d\varphi = \mathcal{V}_l H_l dB_l + \mathcal{V}_a H_a dB_a. \quad (55 \text{ bis})$$

Sustituyendo en las ecuaciones (51) y (51 bis) las ecuaciones (55) y (55 bis), respectivamente, se tienen las siguientes expresiones que contienen f y los parámetros del campo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} (\mathcal{V}_l H_l dB_l + \mathcal{V}_a H_a dB_a) + f dx &= \frac{1}{4\pi} (\mathcal{V}_l H_l dB_l \\ &+ \mathcal{V}_a H_a dB_a) + \frac{H_a B_a A_a}{8\pi} dx, \end{aligned} \quad (56)$$

$$\mathcal{V}_l H_l dB_l + \mathcal{V}_a H_a dB_a + f dx = \mathcal{V}_l H_l dB_l + \mathcal{V}_a H_a dB_a + \frac{1}{2} H_a B_a A_a dx \quad (56 \text{ bis})$$

que, reduciendo términos semejantes y dividiendo por dx , dan,

$$f = \frac{H_a B_a A_a}{8\pi}, \quad (57)$$

$$f = \frac{1}{2} H_a B_a A_a \quad (57 \text{ bis})$$

que pueden ponerse en la forma,

$$f = \frac{B_a^2 A_a}{8\pi\mu_0}. \quad (58)$$

$$f = \frac{1}{2\mu_0} B_a^2 A_a \quad (58 \text{ bis})$$

Las ecuaciones (58) y (58 bis) dan la fuerza atractiva que se ejerce entre las caras adyacentes de un entrehierro en un circuito magnético.

Empleando el sistema de unidades electromagnéticas cegesimales no racionalizadas, la ecuación (58) se convierte en

$$f = 0,0398 B_a^2 A \quad \blacktriangleright (59)$$

donde

$f \equiv$ es la fuerza expresada en dinas,
 $B_a \equiv$ la inducción magnética en el entrehierro expresada en gauss,
 $A \equiv$ el área de la sección recta del entrehierro, expresada en centímetros cuadrados.

Si se empleara el sistema Giorgi, se tendría:

$$f = 398\,000 B_a^2 A \quad \blacktriangleright (60)$$

donde,

$f \equiv$ es la fuerza expresada en newton,
 $B_a \equiv$ es la inducción magnética en el entrehierro expresada en tesla,
 $A \equiv$ es el área de la sección recta del entrehierro expresada en centímetros cuadrados,

y si se quiere tener la fuerza en kilopond expresando B_a en tesla y A en centímetros cuadrados, se tendrá,

$$f = 4,06 B_a^2 A \quad \blacktriangleright (61)$$

Antes de discutir las limitaciones de la ecuación (58), convendrá considerar el significado físico de los diversos términos de la ecuación (56) ó (56 bis). Los términos del paréntesis del primer miembro representan la energía eléctrica suministrada y se destruyen con términos idénticos del segundo miembro, los cuales dan la componente de la variación de energía acumulada que se tendría al variar la inducción magnética sin alterar la longitud del entrehierro. El término $\int dx$, que representa la energía mecánica suministrada, será igual al término restante en el segundo miembro, el cual representa la energía en el volumen adicional $A dx$ de entrehierro originado por el alargamiento dx del entrehierro.

Si se examina la generalidad de la ecuación 58, se observa que la principal fuente de imprecisión es el haber considerado uniforme la inducción magnética en el entrehierro. Para los entrehierros de longitud pequeña frente a las dimensiones transversales de las caras, la aproximación es buena. Para otros casos, el cálculo de un resultado preciso es un problema complicado que requiere métodos más laboriosos.

La reducción de la ecuación (58) supone que el camino del flujo en el hierro tiene sección recta uniforme. Esta restricción no limita la generalidad del resultado, ya que tal hipótesis se hizo solamente para simplificar las expresiones. Si en las ecuaciones (46) y (53) se sustituye el término del hierro por una suma de términos obtenida dividiendo el hierro en partes separadas, cada una de sección recta uniforme y escribiendo un término para cada una de ellas, el resultado final es la ecuación (58), porque los mismos términos adicionales aparecerán en ambos miembros de la ecuación correspondiente a la (56) y se destruirán entre sí.

Así, pues, la ecuación (58) es aplicable a las caras de un entrehierro cualquiera de un núcleo de hierro, siempre que pueda considerarse uniforme la inducción magnética en el entrehierro y siempre que sean despreciables las pérdidas por corrientes de Foucault y por histeresis en el núcleo. También da resultado correcto en el caso de sistemas que contengan imanes permanentes con o sin devanados eléctricos, si bien ello no se demostrará en esta obra. No obstante, es lógico que así ocurra, ya que la ecuación (58) para la fuerza contiene solamente condiciones en el entrehierro y nada que concierna al hierro o al devanado en los que se consideran despreciables las pérdidas.

PROBLEMAS

1. Dos imanes permanentes de acero al wolframio en forma de U que tienen una sección recta de 12,5 mm × 25 mm y una longitud media de 185 mm, se colocan con sus caras polares planas en contacto y se iman a saturación. Se separan luego los imanes de manera que dejen en cada par de polos un entrehierro de 1,5 mm. Hallar la inducción magnética en el entrehierro. No hay que tener en cuenta el flujo de pérdida pero hay que aplicar la corrección de dispersión.

A continuación se separan totalmente los imanes y se encuentra que la inducción magnética en el punto medio de la U, es decir, la inducción magnética en el yugo, se reduce a 2,5 kG. Si se llevan de nuevo los imanes a la posición de entrehierro de 1,5 mm, ¿cuál será la inducción magnética en el yugo?

Los datos de la curva de desimantación son los siguientes:

B (kilogauss)	10,5	9,8	9,5	8,3	6,0	2,9	0
H (oersted)	0	11	16	25,5	32	35	37

La permeabilidad incremental de recuperación, definida como $\Delta B/\Delta H$ es de 50 G/Oe en el punto de funcionamiento del imán abierto.

2. Entre dos piezas polares de hierro dulce se fija con tornillos, para formar un imán, un cilindro de revolución recto de Alnico V de 2,5 cm de diámetro y 2,5 cm de longitud, en la forma indicada en la figura 18. El Alnico se imana a saturación colocando el conjunto, con la armadura colocada, entre los polos de un potente electroimán. Siguiendo el proceso de imanación, se separa la armadura, con cuidado, de las caras polares, dejando dos entrehierros de 0,25 mm cada uno. ¿Cuál será la inducción magnética aproximada en el entrehierro? Se tolera 0,1 mm como longitud de los dos entrehierros en las uniones del Alnico y hierro dulce.

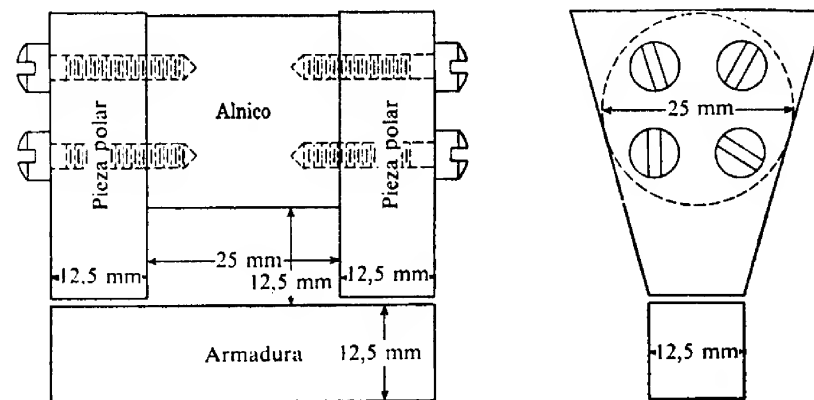


FIG. 18. Imán de Alnico con gran flujo de pérdida.

3. Si se hubiera de diseñar el imán descrito en el apartado 3, poniendo el Ticonal en los miembros verticales, ¿cuál debería ser el volumen de Ticonal requerido? Las dimensiones y flujo del entrehierro han de ser iguales en ambos diseños. La distancia entre los miembros verticales ha de ser de 5 cm.

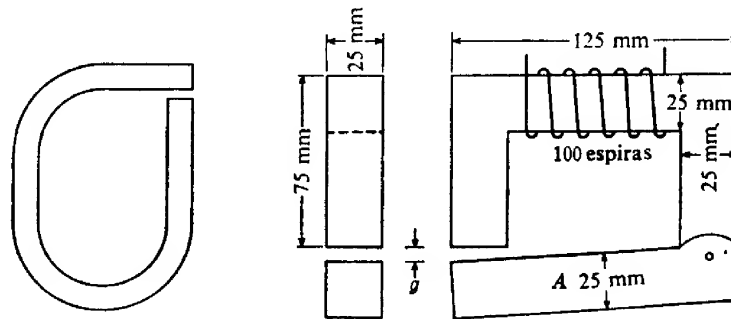


FIG. 19. Imán permanente hecho con una tira de acero.

FIG. 20. Imán de relé del problema 6.

4. Se curva una tira de acero al cromo de sección recta $20 \text{ mm} \times 5 \text{ mm}$ en la forma indicada en la figura 19. Mientras se imana a saturación la tira, se coloca una pieza de hierro dulce en el entrehierro de $1,7 \text{ mm}$. La longitud del camino del flujo en el acero es de 20 cm . ¿Qué flujo, incluido el de dispersión, habrá en el entrehierro una vez quitado el puente de hierro dulce?

a) Despréciase el flujo de pérdida.

b) Explíquese cuáles de los métodos descritos en el texto son adecuados para el cálculo del flujo de pérdida en torno a esta estructura.

5. a) ¿Qué fuerza se ejerce sobre el núcleo de inmersión del imán de la figura 23, del capítulo III, para cada una de las longitudes g de entrehierro del problema 4, capítulo III?

b) ¿Qué trabajo puede realizar este imán en cada carrera?

c) Si el cobre del devanado ocupa la mitad del espacio bruto del devanado, y si el solenoide disipa aproximadamente $0,001 \text{ W}$ por grado centígrado de elevación de temperatura y por centímetro cuadrado del área de la capa exterior, ¿cuál es la elevación de temperatura de la bobina si conduce continuamente?

6. La figura 20 representa el circuito magnético de un disyuntor de c.c. Para iniciar el movimiento de la armadura A cuando la longitud media g del entrehierro es de $2,5 \text{ mm}$ se precisa una fuerza de 45 N . En el extremo de la armadura donde se halla el gozne se tiene un entrehierro de longitud constante igual a $0,25 \text{ mm}$.

a) ¿Qué intensidad deberá tener la corriente que circula por la bobina de disparo para poner en movimiento la armadura cuando la longitud g del entrehierro es de $0,25 \text{ milímetros}$?

b) Con la intensidad hallada en a), ¿cuál es la fuerza atractiva magnética que se ejerce sobre la armadura cuando la longitud g del entrehierro es de $0,25 \text{ mm}$?

Pérdidas en núcleos magnéticos que contengan flujos variables con el tiempo

En los capítulos anteriores se ha indicado el amplio uso que se hace de materiales ferromagnéticos en la construcción de aparatos tanto de corriente continua como de corriente alterna. En los dispositivos magnéticos que trabajan con flujo constante, no se produce calentamiento alguno en los materiales del núcleo. Un electroimán de grúa o un relé accionados por corriente continua, por ejemplo, no tienen casi pérdidas en su circuito magnético a menos que se excite y desexcite muy frecuentemente. Los inducidos de dinamos y motores de continua, los inducidos de generadores y motores sincrónicos, los motores de inducción (tanto el rotor como el estator), los transformadores de potencia y de audiofrecuencia, las bobinas de choque con núcleo de hierro y los dispositivos accionados por corrientes alternas tienen flujos alternos en sus circuitos magnéticos y estos flujos dan lugar a corrientes que calientan el hierro o acero.

Las pérdidas en el metal se deben a dos causas: a) la tendencia del material a conservar su imanación o a oponerse a una variación de imanación, que ocasiona las llamadas *pérdidas por histéresis*, y b) el calentamiento por efecto Joule que aparece en el material a consecuencia de las corrientes de Foucault que se inducen en él al ser variable el flujo con el tiempo; esto constituye las *pérdidas por corrientes de Foucault*. Las pérdidas por histéresis se deben a la tendencia de la característica $B(H)$ del material de recorrer un lazo cuando se aplica a dicho material un campo magnético cíclico. En las figuras 14a y 15b del capítulo I y en la figura 1 de este capítulo pueden verse algunos lazos típicos. Es importante distinguir entre histéresis y pérdidas por histéresis. El fenómeno conocido por el nombre de histéresis es el resultado de la propiedad del material de conservar su imanación o de oponerse a una variación del estado magnético. La pérdida por histéresis es la energía convertida en calor a causa del fenómeno de la histéresis y, según suele interpretarse, está asociada solamente a una variación cíclica de fuerza magnetomotriz. Esta interpretación es el resultado de la amplia utilización técnica del material sometido a campos magnéticos cíclicos y de la relativamente gran importancia de los datos de pérdidas representativos de esta forma de utilización. Las *pérdidas por corrientes de Foucault* están originadas por corrientes en el material magnético, y estas corrientes están producidas por fuerzas electromotrices inducidas por los flujos variables. La suma de las pérdidas por histéresis y por corrientes de Foucault recibe el nombre de *pérdida total en el núcleo*¹.

1. PÉRDIDA POR HISTÉRESIS

La aparición de pérdidas por histéresis está íntimamente asociada al fenómeno por el cual una región atravesada por un campo magnético, absorbe energía. Si la región no es el vacío, tan sólo una parte de la energía tomada del circuito eléctrico

¹ Corrientemente se les llama también *pérdidas en el hierro* ($N.$ del $T.$)

se almacena y recupera totalmente de la región, al suprimir el campo magnético. El resto de la energía se convierte en calor a causa del trabajo realizado sobre el material en el medio cuando responde a la imanación. En el apartado 5 del capítulo IV

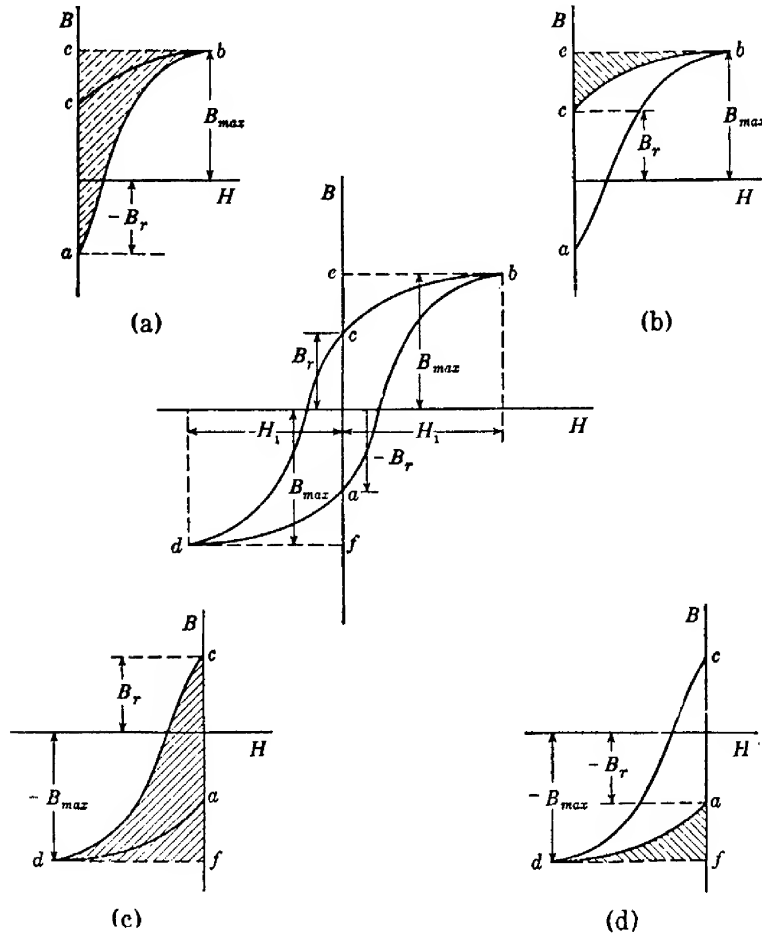


FIG. 1. Lazo de histéresis. Las áreas sombreadas de a) y c) representan la energía absorbida; las de b) y d) la energía devuelta por el acero

se vio que cuando la inducción magnética en una región crece de un valor B_1 a otro B_2 , la región absorbe energía. La magnitud de la energía absorbida por unidad de volumen viene dada por las ecuaciones (39) y (39 bis) del capítulo IV,

$$w = \frac{1}{4\pi} \int_{B_1}^{B_2} H dB. \quad (1)$$

que en unidades racionalizadas es

$$w = \int_{B_1}^{B_2} H dB. \quad (1 \text{ bis})$$

Esta integral es proporcional al área limitada por la curva $B(H)$ de dicha región, el eje B y las rectas paralelas al eje H que representan las constantes B_1 y B_2 , respectivamente. Luego, su valor dependerá de los valores de B_1 y B_2 y de la forma de la curva entre B_1 y B_2 . Si se disminuye la inducción magnética desde un valor dado cualquiera a otro valor menor, el signo algebraico de w es negativo y la energía será cedida por el material.

Cuando la región considerada está constituida por material ferromagnético, la curva de imanación entre dos valores cualesquiera B_1 y B_2 correspondiente a valores decrecientes de H es diferente de la curva correspondiente a valores crecientes. Según se indicó en el apartado 4 del capítulo I, los valores de la inducción magnética en un material ferromagnético son mayores, para un campo magnético H dado, cuando H disminuye que cuando crece, si bien, para una variación cíclica de H , los valores extremos de B son los mismos para cada ciclo una vez el material ha alcanzado el estado estacionario. La diferencia entre las dos curvas que, para la condición cíclica, constituyen realmente las dos ramas de un lazo cerrado, indica que la energía absorbida por el material cuando crece la inducción magnética de B_1 a B_2 es mayor que la devuelta cuando la inducción magnética disminuye de B_2 a B_1 . La diferencia entre estas energías es la magnitud de la pérdida por histéresis. El cálculo gráfico de la integral de la ecuación (1) para un ciclo completo de imanación permite determinar la pérdida de energía por ciclo debida a la histéresis magnética.

Como ejemplo del proceso de integración gráfica, vamos a considerar la energía almacenada en el toroide de la figura 13a del capítulo I. El devanado de excitación está recorrido por una corriente alterna, con lo que el campo magnético se invierte cíclicamente entre los límites $+H_1$ y $-H_1$. La relación entre B y H es la indicada por el lazo de histéresis de la figura 1. Durante la parte ab del ciclo, la energía magnética absorbida por el núcleo por unidad de volumen será (utilizando el sistema Giorgi racionalizado):

$$w_1 = \int_{-B_r}^{B_{max}} H dB = \text{área } abea \text{ indicada así} \quad \text{en la figura 1a.} \quad (2)$$

Como unidad de superficie se toma la de un rectángulo de base igual a 1 T sobre la escala y de altura igual a 1 L. Si la escala de H es tal que cada centímetro representa K' tesla, y la de B cada centímetro K'' lenz, se tendrá:

$$w_1 = K'K'' \times (\text{área } abea \text{ en centímetros cuadrados}).$$

El área se puede determinar contando cuadrados, empleando un planímetro o por otros procedimientos.

Durante la parte bc del ciclo, la energía absorbida magnéticamente por unidad de volumen es, en virtud de la ecuación (1 bis),

$$w_2 = \int_{B_{max}}^{B_r} H dB. \quad (3)$$

Como $B_r < B_{max}$ y H es positivo, la integral es negativa; es decir, el campo magnético cede energía que vuelve al circuito de excitación. La energía absorbida es, pues,

$$w_2 = -K'K'' \times (\text{área } bceb \text{ representada así en figura 1b}). \quad (4)$$

Análogamente, durante la parte cd del ciclo, la energía absorbida magnéticamente es igual a

$$w_3 = K'K'' \times (\text{área } cdfe \text{ representada así en figura 1c}). \quad (5)$$

Durante la parte da del ciclo, el campo magnético devuelve energía al circuito eléctrico. La energía absorbida será, pues, negativa y vendrá dada por

$$w_4 = -K'K'' \times (\text{área } dafd \text{ representada así en figura 1d}). \quad (6)$$

La energía total w_h absorbida por el campo magnético por unidad de volumen para un ciclo completo es

$$w_h = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = K'K'' \times (\text{área del lazo de histéresis } abcd). \quad (7)$$

Esta energía se disipa en forma de calor en el material durante cada ciclo. La disipación recibe el nombre de pérdida por histéresis. Su existencia tiene una gran influencia sobre el rendimiento, la elevación de temperatura y por tanto sobre los valores nominales de las magnitudes de los dispositivos electromagnéticos.

Aun cuando el área de un lazo de histéresis cerrado indica la cantidad de energía disipada en el núcleo por unidad de volumen y por ciclo a causa de la histéresis, no indica en qué parte del ciclo se produce la disipación. Por ejemplo, durante la parte ab del ciclo la unidad de volumen del núcleo absorbe una cantidad de energía w_1 dada por la ecuación (2). No obstante, este estudio no indica qué cantidad de esta energía absorbida se disipa en forma de calor durante esta parte del ciclo, ni cuánto se almacena, para ser disipada durante la parte bc del ciclo.

Si un volumen V de material magnético que tiene el flujo distribuido uniformemente en todos sus puntos y del cual se conoce su lazo de histéresis se somete a una variación cíclica de frecuencia f hertz, la disipación de energía en unidad de tiempo debida a la histéresis (*pérdida de potencia por histéresis*) será:

$$P_h = Vf \times (\text{área del lazo}). \quad (8)$$

Las expresiones de (1 bis) a (8) son aplicables para cualquier sistema consistente de unidades racionalizadas. Si el sistema no estuviera racionalizado, bastaría dividir por 4π los segundos miembros de todas estas ecuaciones. En el sistema Giorgi racionalizado, P_h vendrá dado en watt, V en metros cúbicos, H en tesla y B en lenz. En el sistema de unidades electromagnéticas no racionalizado, P_h vendría dado en erg/segundo, V en centímetros cúbicos, H en oersted y B en gauss, siendo la expresión

$$P_h = \frac{Vf}{4\pi} \times (\text{área del lazo}). \quad (9)$$

Se entiende que el área del lazo viene expresada como producto de las unidades de H y B empleadas. De la ecuación (8) se tiene como pérdida por histéresis en watt

$$P_h = VfK'K'' \times (\text{área del lazo en cm}^2), \quad (10)$$

donde la inducción magnética viene dada en lenz, el campo magnético en tesla y el volumen en metros cúbicos. La constante K' es el número de lenz correspondiente a 1 cm de la escala de campos magnéticos y K'' es el número de tesla correspondiente a 1 cm de la escala de inducciones magnéticas.

Si se conoce el lazo de histéresis para la inducción magnética máxima dada B_{max} , se podrá calcular la pérdida por histéresis por ciclo con ayuda de las relaciones anteriores, pero la manera de variar esta pérdida en función de B_{max} sólo podrá determinarse repitiendo el cálculo para lazos de histéresis de diversos valores de B_{max} . Empíricamente, STEINMETZ¹ halló, tras un gran número de medidas, que el área del lazo de histéresis normal de muestras de distintos hierros y aceros empleados corrientemente en la construcción de aparatos electromagnéticos de su tiempo era aproximadamente proporcional a la potencia 1,6 de la inducción magnética máxima en el dominio de inducciones comprendido entre 1 000 G y 12 000 G. Desde que STEINMETZ realizó sus medidas se han desarrollado, a consecuencia de las investigaciones sobre materiales magnéticos, numerosos aceros magnéticos de propiedades ampliamente variables. El exponente 1,6 ya no puede dar, hoy en día, el área de los lazos con suficiente precisión. La expresión empírica de la pérdida de energía por unidad de volumen por ciclo viene dada con mayor propiedad por la expresión

$$w_h = \eta B_{max}^n, \quad (11)$$

donde n y η tienen valores que dependen del material. Deberá tenerse cuidado al utilizar la ecuación (11), porque el valor de η que puede estar comprendido entre 1,5 y 2,5 para los materiales actualmente existentes, puede no ser constante para un material dado. Para algunos materiales, una expresión de la forma de la ecuación (11) podrá no ser suficientemente precisa para ser generalmente útil. Por tanto, estas constantes se deberán evaluar para un cierto dominio de B_{max} y utilizarse luego solamente para valores de B_{max} comprendidos en este dominio.

Tomando logaritmos en la ecuación (11),

$$\log w_h = n \log B_{max} + \log \eta, \quad (12)$$

existiendo una relación lineal, según se ve, entre $\log w_h$ y $\log B_{max}$. Experimentalmente se podrán obtener varios valores de $\log w_h$ que pueden representarse en ordenadas, tomando en abscisas los valores correspondientes de $\log B_{max}$. Estos puntos estarán situados sobre una recta de pendiente igual al exponente n y ordenada en el origen igual a $\log \eta$. Evidentemente, con dos puntos bastará para determinar los valores de n y η , pero, tomando varios puntos, la rectitud de la curva que los une indicará el grado de precisión de la ecuación (11) en el dominio que se considere. Si los puntos no caen sobre una recta, el tipo de ecuación con exponente constante no será adecuado².

¹ C. P. STEINMETZ, «On the Law of Hysteresis», *Trans. A. I. E. E.*, 9 (1892), 3-51.

² P. G. AGNEW, «A Study of The Current Transformer with Particular Reference to Iron Loss», *Bull. Nat. Bur. Stand.*, 7 (1911), 423-474.

Los valores de w_h y B_{max} de la ecuación (11) pueden darse en un sistema cualquiera de unidades, si se toma el valor correspondiente del coeficiente η . La pérdida total por histeresis en un volumen V en el que la inducción magnética sea uniforme en todos sus puntos y que varíe cíclicamente con una frecuencia de f hertz se puede entonces expresar empíricamente por

$$P_h = \eta V f B_{max}^n \quad (13)$$

Hasta ahora, se ha estudiado en este apartado el ciclo de histeresis simétrico en que B varía entre valores iguales positivos y negativos y en el cual no hay lacitos secundarios tales como el efe de la figura 13b del capítulo I. No obstante, en todos los casos se podrá calcular la pérdida por histeresis por ciclo y por unidad de volumen mediante la ecuación (10) utilizando el verdadero ciclo de histeresis. Si la curva tiene lacitos secundarios, sus áreas deberán sumarse a la del lazo principal, contándose así dos veces dichas áreas. Si se utiliza un planímetro para determinar el área siguiendo la curva en forma continua como si se estuvieran siguiendo realmente las transformaciones en el plano $B(H)$, las áreas de los lacitos secundarios quedarán automáticamente sumadas a la del ciclo principal. Cuando el ciclo es asimétrico o contiene ciclos secundarios no son aplicables³ las relaciones de las ecuaciones (11) y (13).

El análisis cuantitativo de las pérdidas que hemos desarrollado hasta ahora, supone que el flujo experimenta sólo una variación de magnitud en una dirección fija en un circuito magnético tal como sería, por ejemplo, el núcleo de un transformador. La imanación suele estar dirigida aproximadamente a lo largo del núcleo. Su valor crece continuamente en una dirección hasta alcanzar un máximo; luego disminuye, se anula, se invierte y repite la variación en sentido contrario. En estos

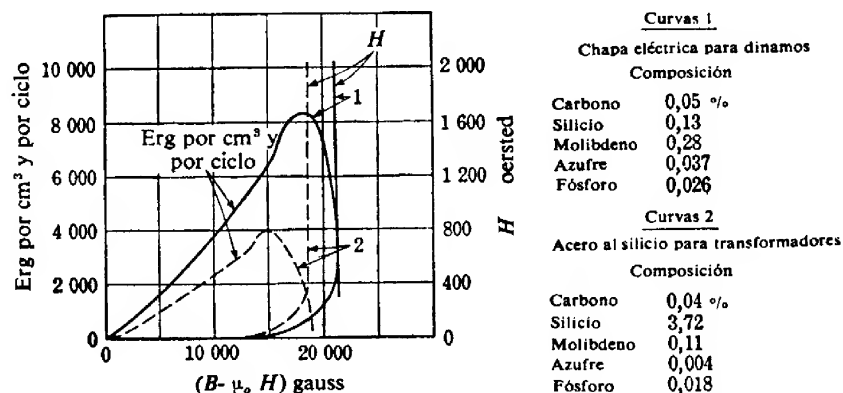


FIG. 2. Pérdida por histeresis rotatoria y curvas de imanación. (De la referencia 5).

ejemplos, la imanación en un volumen cualquiera está dirigida según un eje fijo en el espacio, y la pérdida por histeresis que se produce en este proceso recibe el nombre de *pérdida por histeresis alterna*. Sin embargo, puede producirse otra pérdida a causa de otro modo de variación del estado de imanación. Si se mantiene constante el

³ J. D. BALL, «The Unsymmetrical Hysteresis Loop» *A. I. E. E. Trans.*, 34 (1915), 2693-2715.

valor del campo pero se varía su dirección, variando la dirección de H respecto al volumen del material o viceversa, aparece otra pérdida por histeresis llamada *pérdida por histeresis rotatoria*. El valor de la pérdida en un volumen de material sometido a una variación rotatoria de flujo es diferente de la que se produce en un mismo cuerpo al someterlo a una alternancia en el valor de B aun cuando B_{max} sea la misma en ambos casos. La figura 2 indica la forma de la variación de esta pérdida con B_{max} para dos calidades típicas de chapa de acero. La pérdida por histeresis rotatoria tiende a cero al acercarse el cuerpo a su saturación magnética.

En las aplicaciones técnicas se utilizan muchos dispositivos en los cuales la imanación no sólo varía cíclicamente en valor y signo, sino también de dirección en el espacio, conteniendo por tanto las histeresis alterna y rotatoria. La variación del flujo en el núcleo del inducido de una máquina rotatoria constituye un ejemplo de esta condición, indicado en la figura 3. Las flechitas indican aproximadamente el valor y dirección de la inducción magnética en una serie de puntos situados algo por debajo de las raíces de los dientes situados bajo un polo. Bajo polos inductores adyacentes, la distribución del flujo es análoga, pero la dirección de imanación es la opuesta a la indicada para cada punto homólogo bajo el polo representado. Al girar el inducido más allá de las piezas polares, la inducción magnética varía en módulo y dirección en todas las partes del material del núcleo. En los dientes, la *dirección* de la imanación es esencialmente normal a la circunferencia del inducido, pero en toda otra porción del resto del núcleo la imanación *toma sucesivamente todas las direcciones indicadas en la figura* en las partes

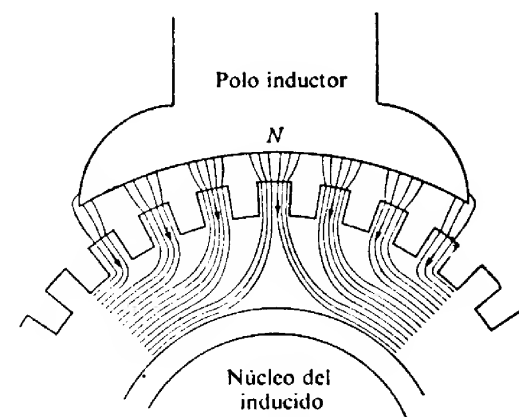


FIG. 3. Distribución aproximada del flujo en el hierro de la armadura bajo un polo de una máquina rotatoria trabajando en vacío.

del núcleo situadas en forma análoga respecto a los dientes. La variación de dirección —es decir, la rotación de la imanación en estas partes del núcleo— es un fenómeno cíclico y se repite el segundo hemicyclo bajo el polo siguiente en el cual la imanación tiene el sentido opuesto. La histeresis que tiene lugar en los dientes es esencialmente una histeresis alterna, pero la que tiene lugar en el resto del núcleo en estas condiciones, es una combinación de histeresis alterna y rotatoria. Como la forma en que varía la imanación en esta parte del núcleo es diferente de aquella en que varía en los dientes, los dos fenómenos no obedecen a las mismas leyes.

La histeresis rotatoria fue estudiada concienzudamente por F. G. BAILEY⁴ en 1895 y sigue estudiándose en la actualidad⁵ esperando poder explicar el fenómeno

⁴ F. G. BAILEY, «The Hysteresis of Iron and Steel in a Rotating Magnetic Field» *Phil. Trans.* 187 (1896), 715-746.

⁵ F. BRAILSFORD, «Rotational Hysteresis Loss in Electrical Sheet Steels», *I. E. E. J.*, (1938), 566-575.

Las pérdidas por histeresis rotatoria a inducciones magnéticas empleadas normalmente en la maquinaria eléctrica es varias veces mayor que la existente para un campo alterno equivalente. Sin embargo, a saturaciones muy elevadas, por encima de los 18 000 a 20 000 G, la pérdida disminuye y tiende rápidamente a un valor pequeño, según indican las curvas de la figura 2. Cuando varía el flujo en magnitud y dirección, la pérdida es menor que la existente en el caso en que sólo exista variación rotatoria del flujo con el mismo valor máximo de la inducción magnética. En el tipo usual de máquina eléctrica, una parte relativamente pequeña de la pérdida se produce en el hierro sometido al campo rotatorio y el error cometido utilizando las pérdidas calculadas para un campo alterno será, por tanto, muy grande en general.

2. CORRIENTES DE FOUCAULT Y EFECTO CORTICAL

Siempre que varíe el flujo magnético en un medio, como consecuencia de la variación del flujo con el tiempo aparece en el medio un campo eléctrico. La integral curvilínea de este campo E a lo largo de un camino cerrado cualquiera que limite la superficie atravesada por el flujo considerado es igual, en virtud de la ley de Faraday para la inducción, a

$$\oint_{abcd} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -d/dt \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} ds \quad (14)$$

donde $abcd$ es el camino cerrado que limita la superficie atravesada por el flujo $\varphi = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} ds$. Cuando el medio es conductor, este camino es asiento de una corriente * generada por la fuerza electromotriz inducida e resultante de la integral del campo eléctrico. Estas corrientes son las llamadas *corrientes de Foucault*. Su presencia origina una pérdida de energía en el material, proporcional a $i^2 R$, llamada *pérdida por corrientes de Foucault*, absorbiéndose dicha energía del circuito que crea el campo y disipándose en forma de calor en el medio.

Como la inducción magnética en los materiales ferromagnéticos suele ser relativamente elevada, y como la resistividad de los materiales no es demasiado grande, las fuerzas electromotrices inducidas, las corrientes de Foucault y las pérdidas asociadas podrán hacerse apreciables si no se proveen los medios para reducir las todo lo posible. Esta pérdida es de gran importancia en la determinación del rendimiento, de la elevación de temperatura y por tanto de los valores de funcionamiento de los aparatos eléctricos de funcionamiento en los cuales varía la inducción magnética.

Para ilustrar las condiciones que suelen concurrir en un núcleo de hierro, consideremos el bloque metálico delgado de la figura 4 atravesado por un flujo alterno φ . Por la ecuación (14), la fuerza electromotriz e inducida a lo largo de un camino $abcd$ que limita una superficie a través de la cual varía el flujo, vendrá dada por

$$e = - \frac{d\varphi}{dt} \quad (15)$$

* En este estudio no consideramos las corrientes de desplazamiento, por ser despreciables sus efectos en este caso.

Esta fuerza electromotriz hace que por el circuito $abcd$ circule una corriente de intensidad i generando una fuerza magnetomotriz en un sentido tal que se oponga a la variación de φ . El efecto de estas corrientes es apantallar o blindar el material del flujo, dando como resultado una inducción magnética menor en la región central del bloque que en su superficie. Dado un flujo total variable periódicamente, la inducción magnética será en el centro menor que la que se obtendría dividiendo el flujo total máximo por el área. Otra manera de describir este efecto es decir que el flujo total tiende a concentrarse hacia la superficie del bloque. Este fenómeno se conoce con el nombre de *efecto cortical* o *efecto pelicular*. En los conductores eléctricos que transportan corriente variable aparece un efecto cortical análogo ⁶, aun cuando están constituidos por materiales de permeabilidad relativa unidad. En dicho conductor, la densidad de corriente eléctrica es máxima en la superficie. Como los efectos corticales eléctrico y magnético son de naturaleza análoga, serán objeto del mismo tipo de estudio. La solución general es algo complicada desde el punto de vista matemático, y se reserva su estudio para la obra de consulta: *The Theory of Transmission Lines, Wave Guides, and Antennas*. No obstante puede ser útil un estudio de las pérdidas por corrientes de Foucault que, arbitrariamente, ignore el efecto cortical, pues resulta sencillo y da unos resultados que tienen suficiente precisión para muchas aplicaciones, especialmente en los dispositivos que poseen núcleos laminados. Daremos a continuación este estudio simplificado, junto con un criterio para el estudio preciso que nos indique cuándo es necesario aplicar éste en un problema determinado.

El estudio simplificado se aplica a un bloque delgado plano de material conductor, cuyo espesor sea el τ indicado en la figura 4. En este bloque se supone distribuido uniformemente un campo magnético cuyo módulo varía con el tiempo y cuya dirección es siempre paralela a la flecha. La hipótesis de una distribución uniforme del campo magnético significa que las fuerzas magnetomotrices de las corrientes de Foucault tienen un efecto despreciable sobre la distribución del flujo y que los recorridos de la corriente tales como el $abcd$ son simétricos respecto a la recta axil que pasa por 0. También, como la altura es mucho mayor que el espesor, el gradiente de potencial es prácticamente uniforme a lo largo de las trayectorias verticales de la corriente excepto en las partes superior e inferior del bloque. Por esta razón, toda

⁶ L. F. WOODRUFF, *Electric Power Transmission and Distribution* (2a. ed., New York: John Wiley & Sons, 1938), cap. iii.

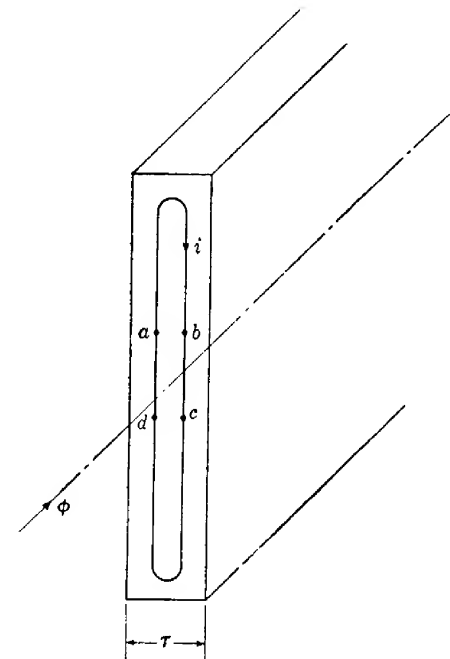


FIG. 4. Sección de una lámina, en la que se muestra un camino de la corriente.

rebanada horizontal de altura unidad que no está demasiado próxima a la parte superior o inferior, tiene prácticamente la misma configuración de gradientes de potencial y densidades de corriente que cualquier otra rebanada horizontal. En la figura 5 puede verse la porción de rebanada considerada; es un paralelepípedo

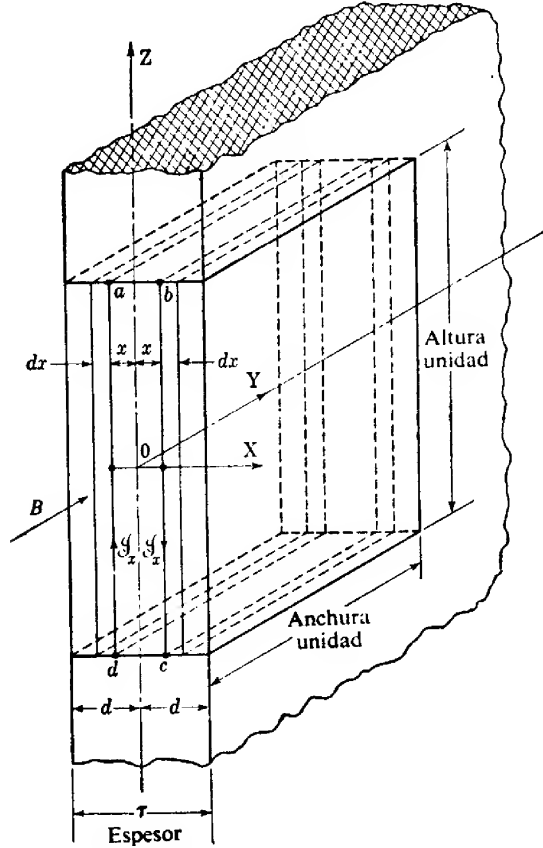


FIG. 5. Elemento unitario de lámina para el cálculo de pérdidas por corrientes de Foucault.

rectángulo de altura unidad, anchura unidad y espesor τ simétrico respecto al eje OY que pasa por el centro del bloque. La cara estrecha que contiene los puntos a , b , c y d es normal a la dirección del flujo. La disminución del módulo de la inducción magnética con el tiempo en la superficie $abcd$ en el sentido indicado induce una fuerza electromotriz a lo largo del camino en el sentido $abcd$.

La aplicación de la ley de Faraday de la inducción al camino $abcd$ en el plano XZ normal a la dirección de B da

$$\oint \mathbf{E}_x \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, ds, \quad (16)$$

donde E_x es el gradiente de potencial vertical a una distancia horizontal x del plano YZ . De acuerdo con el argumento anterior, el valor de la integral curvilínea $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ a lo largo del camino $abcd$ es $2E_x$, ya que el paralelepípedo es de altura unidad. La integral de superficie $\int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, ds$ extendida al plano $abcd$ es $(B) \times (2x) \times (1)$; luego la ecuación (16) podrá escribirse en la forma

$$2E_x = -\frac{d}{dt} (2Bx). \quad (17)$$

Si el material conductor tiene una resistividad ρ , la densidad de corriente J_x a lo largo de bc o da es

$$J_x = \frac{E_x}{\rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (Bx) \quad (18)$$

$$= (-x/\rho) dB/dt \quad (19)$$

ya que x no es función de t . En los dos planos paralelos a las dos caras extensas y que contienen, respectivamente, los segmentos bc y da , la pérdida instantánea de potencia por unidad de volumen es:

$$J_x^2 \rho = \frac{x^2}{\rho} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2. \quad (20)$$

Esta pérdida de potencia se produce a la distancia x del plano central YZ del bloque. La pérdida instantánea de potencia en la lámina elemental de espesor dx es:

$$J_x^2 \rho \, dx = \frac{1}{\rho} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 x^2 \, dx. \quad (21)$$

La pérdida instantánea en el bloque de anchura unidad, altura unidad y espesor $\tau = 2d$ es:

$$2 \int_0^d J_x^2 \rho \, dx = \frac{2}{\rho} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \int_0^d x^2 \, dx = \frac{2}{3} \frac{d^3}{\rho} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2. \quad (22)$$

Un cubo unitario de material laminado constituido por láminas iguales contendrá $1/2d$ de dichos volúmenes; luego la pérdida instantánea por corrientes de Foucault por cubo unitario de material laminado con aislamiento perfecto entre láminas, con lo que no puede existir corriente a través de la laminación, es:

$$\frac{1}{2d} \left[\frac{2}{3} \frac{d^3}{\rho} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \right] = \frac{d^2}{3\rho} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2. \quad (23)$$

La ecuación (23) da la pérdida instantánea de potencia originada por la variación de B con el tiempo. En la maquinaria de corriente alterna, la variación de B suele ser sinusoidal. Llamando b a su valor instantáneo

$$b = B_{\max} \cos \omega t, \quad (24)$$

de donde,

$$\frac{db}{dt} = -\omega B_{max} \sin \omega t, \quad (25)$$

$$\left(\frac{db}{dt}\right)^2 = \omega^2 B_{max}^2 \sin^2 \omega t, \quad (26)$$

y por tanto la pérdida instantánea de potencia es:

$$\frac{d^2 \omega^2 B_{max}^2}{3\varrho} \sin^2 \omega t. \quad (27)$$

Como el valor *medio* de una función seno al cuadrado para un número entero cualquiera de ciclos, o para un intervalo de tiempo suficientemente largo es igual a la mitad de su valor máximo, el *valor medio* de la pérdida de potencia por corrientes de Foucault por unidad de volumen cuando la inducción magnética varía sinusoidalmente con frecuencia f , es:

$$p_F = \frac{d^2 2\pi^2 f^2 B_{max}^2}{3\varrho} = \frac{\pi^2 f^2 \tau^2 B_{max}^2}{6\varrho}, \quad (28)$$

donde τ es el espesor de una lámina.

En un circuito magnético que contenga un volumen \mathcal{V} de material laminado del núcleo sometido a las mismas condiciones magnéticas que el anterior volumen unitario, la pérdida media de potencia por corrientes de Foucault es:

$$P_F = \mathcal{V} p_F = \frac{\pi^2 f^2 \tau^2 B_{max}^2}{6\varrho} \mathcal{V}. \quad (29)$$

Donde \mathcal{V} se expresa en metros cúbicos, f en hertz, τ en metros, B_{max} en tesla y ϱ en ohm-metros; P_F vendrá dado en watt en la ecuación (29).

La hipótesis de que B es uniforme en toda la laminación exige que la fuerza magnetomotriz de las corrientes de Foucault prácticamente no concentre el flujo en las regiones que se apartan del plano central de cada lámina. En el estudio preciso, se tiene en cuenta este efecto de concentración y se demuestra que la pérdida por corrientes de Foucault es igual a,

$$P_F = \frac{\mathcal{V} f B_{max}^2}{12\mu} (ad)^2 \left[1 - \frac{6}{945} (ad)^4 \dots \right], \quad (30)$$

donde μ es la permeabilidad estática del material, que se supone constante, y ad viene dada por

$$ad = \pi \tau \sqrt{\frac{2\mu f}{\varrho}}, \quad (31)$$

y en unidades racionalizadas:

$$ad = \pi \tau \sqrt{\frac{\mu f}{2\pi\varrho}}, \quad (31 \text{ bis})$$

luego,

$$P_F = \frac{\pi^2 f^2 \tau^2 B_{max}^2}{6\varrho} \mathcal{V} \left[1 - \frac{6}{945} (ad)^4 \dots \right]. \quad (32)$$

Cuando el valor de ad es próximo a la unidad, los términos de orden superior de la ecuación (32) son despreciables y la pérdida dada por la ecuación (32) coincide con la dada por la ecuación (29). Para ver la magnitud del efecto de los términos de orden superior, calculemos la pérdida para un material laminado que tiene una permeabilidad estática relativa de 2 500 —es decir, una permeabilidad 2 500 veces mayor que la del aire— una resistividad de 25×10^{-8} ohm-cm y un espesor de 0,014 pulgadas (galga 29). En unidades Giorgi,

$$ad = \pi \times 2,54 \times 14 \times 10^{-5} \sqrt{\frac{2 \times 2\,500 \times 10^{-7} \times f}{25 \times 10^{-8}}} \approx 0,05 \sqrt{f}. \quad (33)$$

Como el primer término que contiene ad dentro del corchete de la ecuación (32) es igual solamente a 0,01 cuando ad vale 1,12, el error cometido en la ecuación (29) es menor que el 1 % para frecuencias de hasta 500 Hz y para los valores supuestos de ϱ , μ y τ .

La relación dada por la ecuación (29) no debe considerarse como medio preciso para determinar la verdadera pérdida por corriente de Foucault de un núcleo cualquiera, sino más bien como un medio para indicar cómo depende de varios factores la pérdida por corriente de Foucault. Mientras ad no sea mucho mayor que la unidad, esta pérdida es proporcional al cuadrado de la frecuencia, al cuadrado del espesor de cada lámina y al cuadrado de la inducción magnética, e inversamente proporcional a la resistividad del material. La pérdida para un material específico cualquiera es preferible escribirla en la forma

$$P_F = k_F f^2 \tau^2 B_{max}^2 \mathcal{V} \quad (34)$$

y, aun cuando teóricamente

$$k_F = \frac{\pi^2}{6\varrho}, \quad (35)$$

los efectos del volumen finito de material, baja resistencia entre láminas y entrehierros en el interior del núcleo hacen más preciso el cálculo de la pérdida por corrientes de Foucault si se determina k_F a partir de medidas de potencia realizadas con una muestra de material y se sustituye luego en la ecuación (34).

De la ecuación (20) puede realizarse una deducción importante. Para todo núcleo, la fuerza electromotriz instantánea e generada magnéticamente en un devanado que rodee al núcleo es proporcional a db/dt . La pérdida instantánea por corrientes de Foucault dada por la ecuación (20) es proporcional a $(db/dt)^2$ y por tanto a e^2 . Por tanto, la pérdida media por corrientes de Foucault es proporcional al valor medio de e^2 . Ahora bien, el valor medio del cuadrado de la tensión instantánea es,

por definición, el cuadrado de la tensión eficaz. Luego, independientemente de la forma de la onda de la tensión alterna generada, la pérdida P_F es proporcional al cuadrado de la tensión eficaz dentro de los límites de validez de la ecuación (20). No debe sacarse la conclusión, sin embargo, de que en todos los casos prácticos P_F sea simplemente una función de e^2 o de $(db/dt)^2$. Por ejemplo, en los inducidos de las máquinas de corriente continua, las variaciones de flujo están muy lejos de ser sinusoidales y la inducción magnética B sufre una variación rotatoria de dirección además de una variación alternada de módulo, cosa que no se ha considerado en el estudio anterior.

3. PÉRDIDA TOTAL EN EL NÚCLEO

La pérdida total de potencia existente en los núcleos de hierro sometidos a un campo magnético de excitación alterno, es la suma de las pérdidas por histéresis y por corrientes de Foucault. De las ecuaciones (10) y (28), la pérdida total de potencia p_n por unidad de volumen está dada por,

$$p_n = p_h + p_F = 10^{-5} f K' K'' (\text{área del lazo}) + \frac{\pi^2 f^2 \tau^2 B_{max}^2}{6\rho}, \quad (36)$$

donde los símbolos tienen el significado que se les dio anteriormente. Si el material del núcleo es tal que la pérdida por histéresis cumple con la relación empírica dada por la ecuación (13), esta pérdida podrá escribirse en la forma

$$p_n = \eta f B_{max}^n + \frac{\pi^2 f^2 \tau^2 B_{max}^2}{6\rho}. \quad (37)$$

Si la inducción magnética media es la misma en todo el volumen \mathcal{V} del núcleo, la pérdida total P_n en este volumen será:

$$P_n = \mathcal{V} p_n. \quad (38)$$

Los dispositivos en los cuales existen materiales ferromagnéticos que transportan flujos alternos tienen casi siempre asociados circuitos eléctricos que abrazan a los circuitos magnéticos. Los transformadores y las bobinas con núcleo de hierro, por ejemplo, tienen núcleos laminados o de polvo prensado en torno a los cuales están devanadas las espiras de una o más bobinas. Las pérdidas en el núcleo están relacionadas con la fuerza electromotriz inducida en dicha bobina por el flujo variable. La ecuación (19) del apartado 7 del capítulo VI, da el flujo máximo ϕ_{max} en función del valor eficaz de la fuerza electromotriz E inducida en una bobina de N espiras como

$$\phi_{max} = \frac{E}{4.44 f N} \quad (39)$$

cuando el flujo, y por tanto la fuerza electromotriz, varían sinusoidalmente. Si la inducción magnética es uniforme en toda la sección recta de área A del núcleo,

$$B_{max} = \frac{\phi_{max}}{A} = \frac{E}{4.44 f N A}. \quad (40)$$

Para una bobina o transformador dado, el número de espiras y el área de la sección recta del núcleo vienen fijados por el diseño. Luego,

$$B_{max} = K \frac{E}{f} \quad (41)$$

que, sustituida en la ecuación (37), da

$$\begin{aligned} p_n &= \eta f \left(\frac{KE}{f} \right)^n + \frac{\pi^2 f^2 \tau^2 K^2 E^2}{6\rho f^2} \\ &= K_1 \frac{E^n}{f^{n-1}} + K_2 E^2. \end{aligned} \quad (42)$$

La ecuación (42) sólo es aplicable cuando la forma de onda sea sinusoidal. Aun cuando la pérdida por histéresis depende de la inducción magnética máxima y no de la forma de onda del flujo mientras el ciclo de histéresis sea simétrico y sin lazos, la relación entre el valor máximo de la inducción magnética y el valor eficaz de la fuerza electromotriz generada sí depende de la forma de la onda. Luego, cuando se exprese en función de la fuerza electromotriz eficaz, la pérdida por histéresis vendrá dada correctamente por el primer término del segundo miembro de la ecuación (42) solamente cuando la forma de la onda sea sinusoidal.

En contraste, el segundo término de la expresión para las pérdidas en el núcleo, ecuación (42), da la pérdida correcta por corriente de Foucault independientemente de la forma de la onda con tal que las frecuencias que intervengan en la onda no sinusoidal no sean suficientemente elevadas para producir un efecto cortical considerable. Cuando la onda del flujo esté constituida por componentes, cada una de éstas induce corrientes de Foucault en el núcleo. La pérdida por corrientes de Foucault creada por cada componente armónica en el flujo es proporcional al cuadrado del mismo armónico de la fuerza electromotriz generada en el devanado. Luego, si E_1, E_2, E_3, \dots son los valores eficaces de los armónicos fundamental y superiores de la fuerza electromotriz generada, la pérdida total por corrientes de Foucault por unidad de volumen es, de acuerdo con el segundo término de la ecuación (42),

$$p_F = K_2 (E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 + \dots). \quad (43)$$

Ahora bien, la suma de $E_1^2, E_2^2, E_3^2, \dots$ es igual al cuadrado de la fuerza electromotriz eficaz E generada. Obsérvese también que la pérdida por corrientes de Foucault, expresada en función de E , es independiente de la frecuencia.

Las variaciones de temperatura que se encuentran en la práctica tienen un efecto despreciable sobre la pérdida por histéresis. La pérdida por corrientes de Foucault disminuye algo al aumentar la temperatura. Para una variación dada de flujo, la pérdida por corrientes de Foucault es inversamente proporcional a la resistividad del material del núcleo, según indica la ecuación (29). La resistividad crece con la temperatura.

Como las ecuaciones (36) y (37) se han deducido basándose en hipótesis que pueden no ser admisibles en la práctica, pueden dar resultados numéricos demasiado pequeños, frecuentemente en un factor 2 o superior. El empleo importante de estas ecuaciones no lo es tanto para el cálculo de la pérdida en casos particulares como para

poner de manifiesto la relación funcional existente entre la pérdida y las variables. Sirven eficazmente como guía para el estudio de datos experimentales y también indican los caminos posibles para modificar la pérdida. Como la validez de las hipótesis depende de las condiciones de utilización de los materiales, resulta conveniente un nuevo enunciado de dichas hipótesis. La deducción del término de la pérdida por histéresis en la ecuación (36) supone que:

- a) Cada lámina es magnéticamente homogénea; es decir, cada uno de sus elementos de volumen tiene las mismas características magnéticas.
- b) La inducción magnética es uniforme en cada lámina; es decir, el efecto de las corrientes de Foucault sobre la distribución del flujo, es despreciable.

Por otra parte, la expresión empírica del término de la histéresis de la ecuación (37) se halla sometida a las hipótesis adicionales siguientes:

- c) El ciclo de histéresis tiene forma simétrica normal sin lazos secundarios. Supuesta satisfecha esta condición, no se ponen restricciones a la manera de variar B con el tiempo a lo largo del ciclo de imanación.
- d) El material, el alcance de inducción magnética máxima y la manera de variar la inducción magnética son tales que puede emplearse, con precisión razonable, un exponente empírico n .

La deducción del término de la pérdida por corrientes de Foucault de las ecuaciones (36) ó (37) presupone que:

- a) El material es homogéneo magnética y eléctricamente. En la práctica, esta condición no se cumple plenamente, ya que ciertos factores tales como el tamaño del grano, la dirección del grano producido por el proceso de laminación y las propiedades magnéticas relativamente pobres de las capas superficiales tienen un efecto apreciable, especialmente en láminas delgadas.
- b) El espesor de las láminas es constante y muy pequeño frente a las otras dimensiones. Esta condición suele cumplirse en la práctica.
- c) La inducción magnética es uniforme a través de todo el espesor de la lámina; es decir, la fuerza magnetomotriz de las corrientes de Foucault es despreciable frente a la fuerza magnetomotriz imanadora que actúa sobre el núcleo. La ecuación (32) indica el orden del error introducido, que suele ser pequeño para láminas delgadas de materiales de gran resistividad sometidos a variaciones cíclicas de al menos 5 000 Hz, pero que pueden ser muy grandes en otras condiciones.
- d) El volumen de núcleo que interviene está sometido a un campo uniforme con lo que en un instante dado cualquiera la inducción magnética es la misma en las distintas láminas.
- e) Las láminas están perfectamente aisladas unas de otras. Esta hipótesis se cumple rara vez en los aparatos comerciales a causa de las considerables presiones que se ejercen sobre las láminas para apretarlas unas contra otras.
- f) La inducción magnética varía sinusoidalmente con el tiempo y está siempre dirigida paralelamente al plano de la lámina. Sin embargo, la hipótesis de variación sinusoidal del flujo con el tiempo no constituye ninguna restricción, pues se ha demostrado que el factor $(fB_{max})^2$ se puede sustituir por el producto de una cons-

tante por E^2 , siendo E el valor eficaz de la fuerza electromotriz inducida en una bobina enlazada por el flujo alterno del núcleo, el cual puede tener cualquier forma de onda.

La tabla I da datos representativos de la pérdida en el núcleo y de la resistividad en diversas muestras de materiales para núcleos, corrientes en el mercado.

TABLA I *
PROPIEDADES REPRESENTATIVAS DE MATERIALES MAGNETICAMENTE BLANDOS

Material	Resistividad, microhm-cm	Pérdida por histéresis, erg por cm ³ y por ciclo	Pérdida total en el núcleo, watt por kg galga 29, 60 Hz
Permalloy (78,5 % Ni).....	16	200	0,75 †
Permalloy (78,5 % Ni 3,8 % Cr)....	65	200
Hipernik (50 % Ni).....	35	220	0,44 †
Mumetal.....	25	200
Perminvar (45-25).....	19
Perminvar (7-70).....	80
Permendur.....	7	12000
Permendur con 2 % V.....	26	6000
Acero al silicio (4,25 % Si).....	60	1340 †	1,3 †
Acero al silicio (1,0 % Si).....	24	2640 †	2,57 †
Armco o hierro noruego.....	11	5000 †	excesiva

* Datos del mismo origen que los de la tabla I del capítulo I.

† Estos valores corresponden a $B_m = 10\ 000$ G; los otros, a la saturación.

4. REDUCCIÓN DE LA PÉRDIDA TOTAL EN EL NÚCLEO; CONSIDERACIONES DE DISEÑO

Con un núcleo de configuración dada y condiciones de utilización determinadas, la pérdida por histéresis puede hacerse pequeña utilizando un material para el núcleo que tenga un ciclo de histéresis de área pequeña. La pérdida por corrientes de Foucault puede reducirse utilizando láminas delgadas de material que tenga gran resistividad y aislándolas entre sí. Frecuentemente se mezcla Permalloy pulverizado ⁷, cuyo ciclo de histéresis es muy estrecho, con un aglutinante aislador y se comprime formando un núcleo macizo de la forma deseada. Este material presenta a menudo resistividades de hasta 50 Ω -cm. Las calidades de acero al silicio de uso frecuente tienen resistividades comprendidas entre 20 y 60 $\mu\Omega$ -cm, para un contenido de silicio comprendido entre el 1 % y el 4 %. Puede considerarse que las distintas propiedades deseables se pueden alcanzar en forma satisfactoria aleando convenientemente el material y sometándolo a un tratamiento térmico adecuado. Los detalles de estos procesos se salen del ámbito de este estudio.

Teóricamente, las pérdidas por corrientes de Foucault pueden reducirse empleando

⁷ W. J. SHACKELTON y I. G. BARBER. «Compressed Powdered Permalloy» A. I. E. E. Trans., 47 (1928), 429-436.

láminas muy delgadas, con tal que éstas estén adecuadamente aisladas entre sí y que en la región donde exista campo magnético variable no hayan pernos, mordazas, u otras piezas de metal. Sin embargo, el empleo de láminas muy delgadas encaja la fabricación y aumenta el tamaño del aparato disminuyendo el factor de apilamiento. Si en los núcleos de transformadores se hiciera apreciable la disminución del factor de apilamiento, el factor de acoplo, que conviene sea lo más próximo a la unidad posible, podría quedar reducido a valores inadmisibles. El espesor permisible de lámina viene también determinado por el equilibrio económico entre el costo de fabricación correspondiente al empleo de láminas delgadas y el costo de la

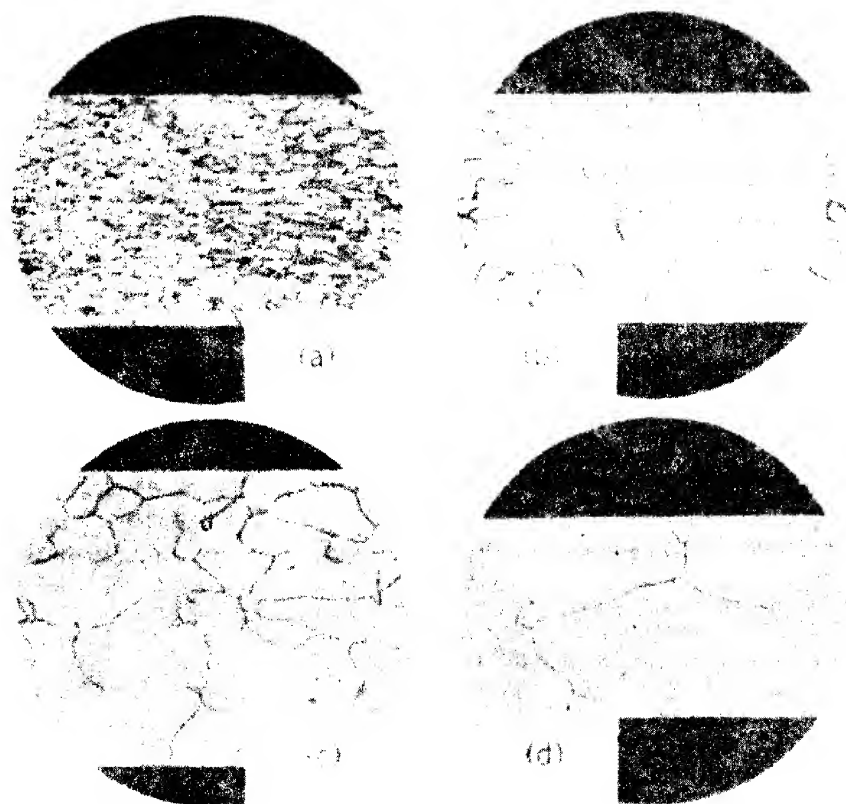


FIG. 6. Microfotografías que muestran el tamaño del grano de aceros que contienen diversas cantidades de silicio. a) Acero eléctrico laminado en caliente, no recocido. b) Acero eléctrico recocido. c) Acero para motores, recocido. d) Acero para transformadores recocido.

energía perdida u otra reducción en las cualidades de funcionamiento originada por las corrientes de Foucault.

La pérdida por histeresis también está relacionada con el tamaño del grano y, en general, cuando éste es mayor, la pérdida es menor. Sin embargo, si una chapa ha

de ser resistente mecánicamente, deberá tener un espesor de varios cristales, por lo menos. Las microfotografías de la figura 6 indican el tamaño relativo del grano en varias muestras de acero al silicio. El acero de la figura 6a es de la calidad llamada en los Estados Unidos acero eléctrico con un 1 % de silicio, laminado en caliente y no recocido. La figura 6b muestra el mismo acero recocido. La resistividad es de $24 \mu\Omega\text{-cm}$ y la pérdida total en el núcleo $2,57 \text{ W/kg}$. La figura 6c muestra un acero para motores con un contenido del 2,5 % de silicio y recocido. La resistividad es $40 \mu\Omega\text{-cm}$ y la pérdida en el núcleo de $2,22 \text{ W/kg}$. El acero para transformadores, de la figura 6d, tiene un 4 % de silicio y está recocido; su resistividad está comprendida entre 50 y $62 \mu\Omega\text{-cm}$ y su pérdida en el núcleo es de $1,54 \text{ W/kg}$.

Suele lograrse un equilibrio satisfactorio entre estos factores para los materiales de que se dispone en el mercado y en vista de sus costos actuales, utilizando chapa de acero al silicio recocido de espesor comprendido entre $0,3$ y $0,7 \text{ mm}$ en los núcleos de los aparatos que trabajan a frecuencias comerciales de potencia. En los Estados Unidos el espesor más común es el de $0,014$ pulgadas ($0,35 \text{ mm}$). Para aparatos de radiofrecuencia se emplean comunmente chapas de $0,03$ a $0,08 \text{ mm}$ o núcleos de Permalloy o de polvo de hierro prensado. El acero al silicio tiene las ventajas de un costo global relativamente reducido, resistividad comparativamente elevada, ciclo de histeresis bastante estrecho y permeabilidad elevada (aunque no constante) y puede troquelarse obteniéndose láminas de la forma que se quiera. Las láminas suelen someterse a tratamiento térmico o por lo menos se recuecen una vez troqueladas para eliminar los esfuerzos internos introducidos en el troquelado.

Como las corrientes de Foucault, a las frecuencias empleadas para la transmisión de energía, pueden reducirse fácilmente a un valor relativamente bajo empleando láminas delgadas de material de gran resistividad, mientras que la reducción de las pérdidas por histeresis presenta la mayor dificultad de encontrar un material magnético que tenga un ciclo de histeresis pequeño, a estas frecuencias la pérdida por histeresis suele ser grande frente a la pérdida por corrientes de Foucault. En los transformadores de potencia para 60 Hz la pérdida por histeresis suele estar comprendida entre los dos tercios y los tres cuartos de la pérdida total en el núcleo. En el apartado 7 se describe un método para repartir la pérdida entre las dos componentes.

La división de la pérdida total entre las componentes de la histeresis y de las corrientes de Foucault en los transformadores de potencia es relativamente fácil de controlar, ya que la forma de onda es esencialmente sinusoidal y las variaciones de flujo y tensión tienen valores máximos prácticamente constantes. En cambio, en los aparatos para telecomunicación las condiciones son muy diferentes. La frecuencia se halla comprendida entre límites muy amplios a causa de las peculiaridades de las formas de onda que intervienen, que constituyen la inteligencia. También las amplitudes varían entre límites muy amplios. Como norma general, la cuestión de las pérdidas en los pequeños transformadores para telecomunicación tiene más importancia para tener en cuenta su efecto sobre las características técnicas de funcionamiento del transformador que para tener en cuenta su disipación de energía. No obstante, en los grandes transformadores de los amplificadores de potencia, especialmente en las emisoras de radio y aplicaciones análogas, el aspecto de la disipación de la energía adquiere mayor importancia.

5. MEDIDA DE LA PÉRDIDA TOTAL EN EL NÚCLEO

A fin de que los fabricantes y usuarios de plancha de acero ferromagnético puedan entenderse en lo relativo a las propiedades de estos aceros, la «American Society for Testing Materials» ha dictado una serie de procedimientos a seguir para los ensayos de pérdidas totales en los núcleos. Describiremos detalladamente el ensayo utilizado para planchas de acero comerciales a las frecuencias empleadas en la distribución de energía. La descripción de los métodos de obtención de las pérdidas a inducciones magnéticas débiles o a 1 000 Hz, puede hallarla el lector en la última edición de la circular A-34 de la A.S.T.M.

En la figura 7 puede verse el dispositivo de Epstein utilizado en el ensayo comercial. Está construido de manera que primario y secundario estén colocados uno sobre otro a lo largo de cuatro secciones solenoidales largas dirigidas según los lados de un cuadrado. La longitud del devanado de cada una de las secciones es de 42 cm y las bobinas están devanadas sobre soportes de sección cuadrada cuyas dimensiones interiores son 4×4 cm. El secundario de 150 espiras por sección se devana uniformemente en primer lugar sobre toda la longitud del soporte y luego se devana encima el primario de igual número de espiras. Los cuatro devanados primarios se conectan en serie sumando sus efectos, y los cuatro secundarios se conectan en forma similar.

Las muestras para ensayo consisten en 10 kg de tiras de acero de 50 cm de longitud y 3 cm de anchura. Estas tiras se apilan constituyendo pilas de 2,5 kg cada una, formando cuatro paquetes que hay que colocar en el interior de los solenoides. La mitad de las tiras se cortan con su longitud paralela a la dirección de laminación y la otra mitad perpendicularmente a esta dirección. Las muestras iguales se colocan

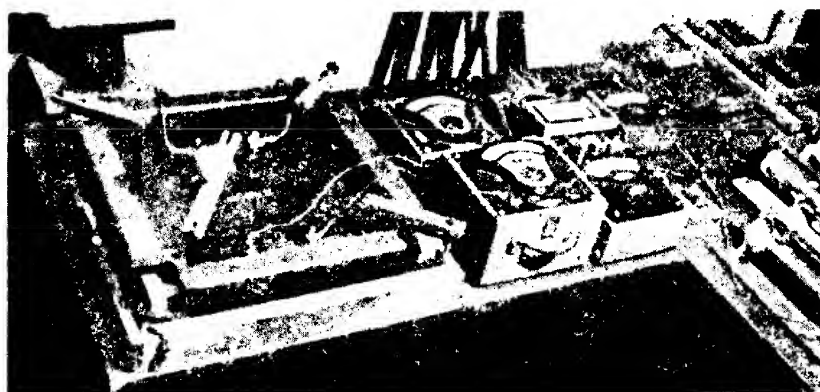


Fig. 7. Aparato Epstein para pérdidas en el núcleo del Laboratorio de Medidas Eléctricas del Massachusetts Institute of Technology.

en lados opuestos del cuadrado. Si hay que utilizar el acero en aplicaciones tales como los transformadores «spirakore» e «hipersil», en los que la dirección del grano juega un papel importante en la acción del dispositivo, deberán cortarse todas las tiras de manera que en el ensayo el flujo tenga la misma relación con la dirección de laminado que en el producto acabado.

En la figura 8 puede verse el esquema de conexiones para este ensayo de pérdidas en el núcleo. Los primarios del dispositivo de Epstein se designan con la letra *P* y los secundarios con *S*. Para el ensayo a 60 Hz, el generador debe poder suministrar una onda de tensión sinusoidal variable hasta unos 160 V a 60 Hz. La tensión debe ser ajustable, debiendo intercalarse para el ajuste un autotransformador de baja impedancia. Si existiera alguna posibilidad de variar la frecuencia, deberá conectarse en paralelo con la línea, un frecuencímetro *F*.

El amperímetro *A* mide la intensidad eficaz de la corriente que pasa por el primario. Esta corriente del primario es la corriente de excitación del transformador descrita en el capítulo VI y es no sinusoidal. Si la forma de las ondas del flujo en el núcleo y de la fuerza electromotriz inducida en los devanados ha de ser sinusoidal, las caídas de tensión *IZ* en el generador y en los cables de conexión entre generador y primario deben mantenerse bajas. Cumpliéndose estas condiciones, la tensión eficaz inducida en el secundario es una medida de la inducción magnética máxima en el núcleo según indica la ecuación (39),

$$E = 4,44 N f \phi_{\max} = 4,44 N f A B_{\max} \quad (44)$$

Supongamos, por ejemplo, que hay que realizar una medida de pérdida en el núcleo a 60 Hz con una inducción magnética máxima de 1 T en una muestra de acero al silicio al 4 %. El área de la sección recta del acero, 6,5 cm² se obtiene dividiendo la

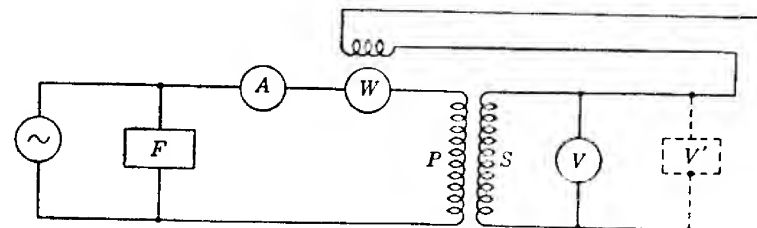


Fig. 8. Esquema de conexiones para el ensayo de pérdidas en el núcleo de Epstein.

masa total 10 000 g por la densidad, 7,5 g/cm³ y por la longitud total del núcleo, 200 cm. El valor máximo requerido de la inducción magnética se obtendrá en la muestra cuando el voltímetro *V* señale una tensión eficaz de

$$E = 4,44 \times 600 \times 60 \times 6,5 \times 10^{-4} \times 1 = 103,8 \text{ V.} \quad (45)$$

La pérdida total en el núcleo viene ahora indicada por el watímetro *W*, y su lectura en watt, corregida de las pérdidas del instrumento, dividida por la masa de la muestra (10 kg) da el resultado en watt por kilogramo. Para una inducción magnética distinta, puede deducirse la lectura necesaria de *V* a partir de la ecuación 44 y en el watímetro se lee la pérdida correspondiente.

El área de la sección recta de la muestra debe calcularse en la forma indicada anteriormente, tomándose para los aceros con un contenido de silicio no superior a un 2 % una densidad de 7,7 g/cm³ y una densidad de 7,5 g/cm³ si el contenido de silicio supera al 2 %.

A menudo no es posible crear una variación sinusoidal de inducción magnética

en la muestra, sea por no disponer de un generador de onda sinusoidal de capacidad adecuada, o sea porque la inducción magnética conveniente para el ensayo es tan elevada que exige una corriente excitadora muy intensa. Cuando se deforma la onda de la inducción magnética, el valor eficaz de la fuerza electromotriz inducida no mide el valor de B_{max} . En estas condiciones puede utilizarse otro tipo de voltímetro, llamado a veces voltímetro de flujo⁸. El diseño de este instrumento se basa en el siguiente estudio teórico.

La fuerza electromotriz instantánea inducida en el secundario es:

$$e = N \frac{d\phi}{dt}. \quad (46)$$

Integrando esta ecuación para un semiperíodo de la onda de fuerza electromotriz,

$$\int_{t_1}^{t_2} e dt = N \int_{-\phi_{max}}^{+\phi_{max}} d\phi = 2N\phi_{max} = 2NAB_{max}, \quad (47)$$

donde se ve que el flujo máximo o la inducción magnética máxima es, independientemente de la forma de la onda, proporcional al valor medio de un hemicírculo positivo (o negativo) de la fuerza electromotriz inducida, o sea,

$$B_{max} = \frac{e_{med}(t_2 - t_1)}{2NA}, \quad (48)$$

donde $t_2 - t_1$ es el semiperíodo constante $1/2f$ de la onda. Como el voltímetro de corriente continua tipo D'Arsonval mide el valor medio, uno de estos instrumentos utilizado junto con un rectificador de onda completa⁹ constituye un voltímetro de flujo satisfactorio. Para emplearlo en el ensayo de Epstein, se conecta en paralelo con el voltímetro de tensiones eficaces indicado en la figura 8 con la línea de trazos y se calibra para que señale lo mismo que el instrumento para tensiones eficaces cuando la onda es sinusoidal. Cuando no lo sea, el instrumento señalará $1,11e_{med}$, ya que 1,11 es el *factor de forma*, o razón de la tensión eficaz a la tensión media para una onda sinusoidal. El valor que hay que tener en el voltímetro de flujo para un valor fijo cualquiera de B_{max} es, según la ecuación 48,

$$E' = 1,11e_{med} = 4,44fNAB_{max} \quad (49)$$

como antes, pero, si la onda de flujo no es sinusoidal, la lectura V del voltímetro de tensiones eficaces es mayor que la lectura V' del voltímetro de flujo. El factor de forma de la onda de flujo es 1,11 multiplicado por la razón V/V' .

Las bobinas de intensidad de los instrumentos utilizados en este ensayo deben tener una resistencia extraordinariamente baja¹⁰ y las bobinas de tensión deben

⁸ G. CAMILLI, «A Flux Voltmeter for Magnetic Tests», *A. I. E. E. Trans.*, 45 (1926), 721-728.

⁹ En el apartado 2b, capítulo VI, del tomo de electrónica técnica de la serie «Principles of Electrical Engineering Series», se describe este tipo de rectificador.

¹⁰ Véase también: B. M. SMITH y C. CONCORDIA, «Measuring Core Loss at High Densities», *E. E.*, 51 (enero 1932), 36-38.

tener una resistencia muy elevada a fin de que no puedan consumir demasiada potencia. El watímetro debería ser del tipo de factor de potencia bajo.

Los datos de las curvas que se dan en el próximo apartado han sido obtenidos del ensayo tipo de Epstein.

6. CURVAS DE PÉRDIDA EXPERIMENTALES, COEFICIENTES EXPERIMENTALES

Para todos los cálculos en que se precise un conocimiento exacto de la pérdida en el núcleo, los únicos datos fidedignos son los obtenidos experimentalmente en muestras del verdadero material que va a emplearse. Si hay que considerar dominios de frecuencias y de inducciones magnéticas, estos datos podrán expresarse en forma conveniente en forma de curvas representativas de la pérdida total en el núcleo como las de las figuras 9 y 10, aplicables a una calidad de acero al silicio para transformadores que contiene aproximadamente un 1 % de silicio.

En la figura 9, se da la pérdida total en watts por libra en función de la frecuencia para varios valores diferentes de la inducción magnética máxima B_{max} . En la figura 10 se presentan los mismos datos en función de B_{max} para valores diferentes de la frecuencia y, en la figura 20 del capítulo VI, en escala más ampliada, para el dominio de inducciones magnéticas y frecuencias utilizadas en las aplicaciones de potencia. De estas curvas puede obtenerse la pérdida total por kilo para una amplia variedad de condiciones. Las escalas son logarítmicas.

Las formas de las curvas en escalas log-log sugieren unas expresiones relativamente sencillas para representar la pérdida. Las curvas de p_n en función de B_{max} de la figura 10 para distintas frecuencias son casi rectas paralelas, lo que indica empíricamente que la pérdida total varía, en el dominio indicado, como una cierta potencia de B_{max} . Comparando los datos de las rectas de trazos de la figura 9 con los dados por las curvas, se ve que la pérdida total puede suponerse que varía proporcionalmente a una cierta potencia de la frecuencia f entre 30 y 500 Hz con un error no mayor de 10 %. Luego, se sugiere como expresión empírica de la pérdida total por unidad de volumen una expresión de la forma

$$p_n = Cf^n(B_{max})^m \quad (50)$$

donde C , n y m dependen de las propiedades del material en cuestión. La medida de las pendientes en las figuras 9 y 10, en que las escalas de abscisas y de ordenadas son las mismas, da aproximadamente los valores de n y m que resultan ser:

$$1,36 \text{ y } 1,71$$

para f en hertz y B_{max} en gauss.

Para una inducción magnética máxima de 10 000 G y una frecuencia de 60 Hz, el valor del coeficiente C para las unidades empleadas y para material de espesor 14 milésimas de pulgada, galga 29, es:

$$C = \frac{0,60}{60^{1,36} 10\,000^{1,71}} = \frac{0,60}{261 \times 6,91 \times 10^6} = 3,32 \times 10^{-10},$$

o sea,

$$p_n = 3,32 \times 10^{-10} f^{1,36} B_{max}^{1,71} \text{ watt por libra} \quad (51)$$

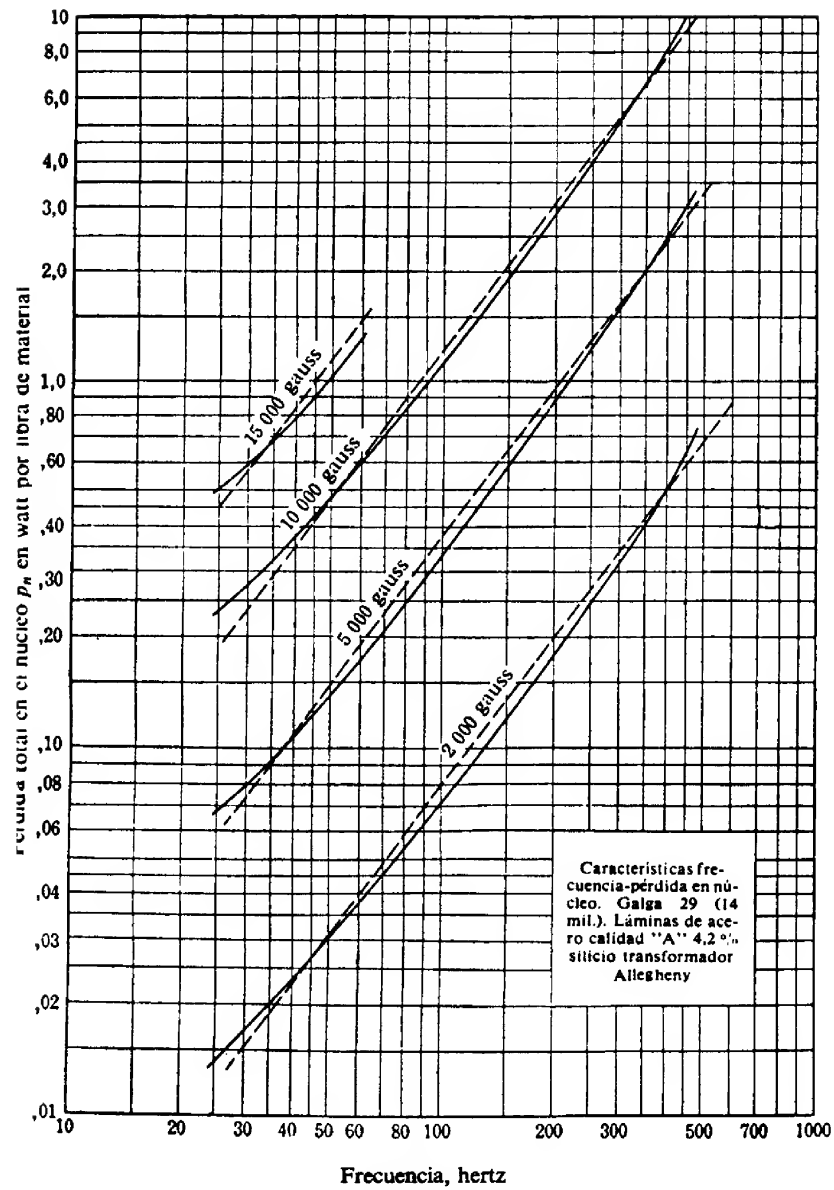


FIG. 9.

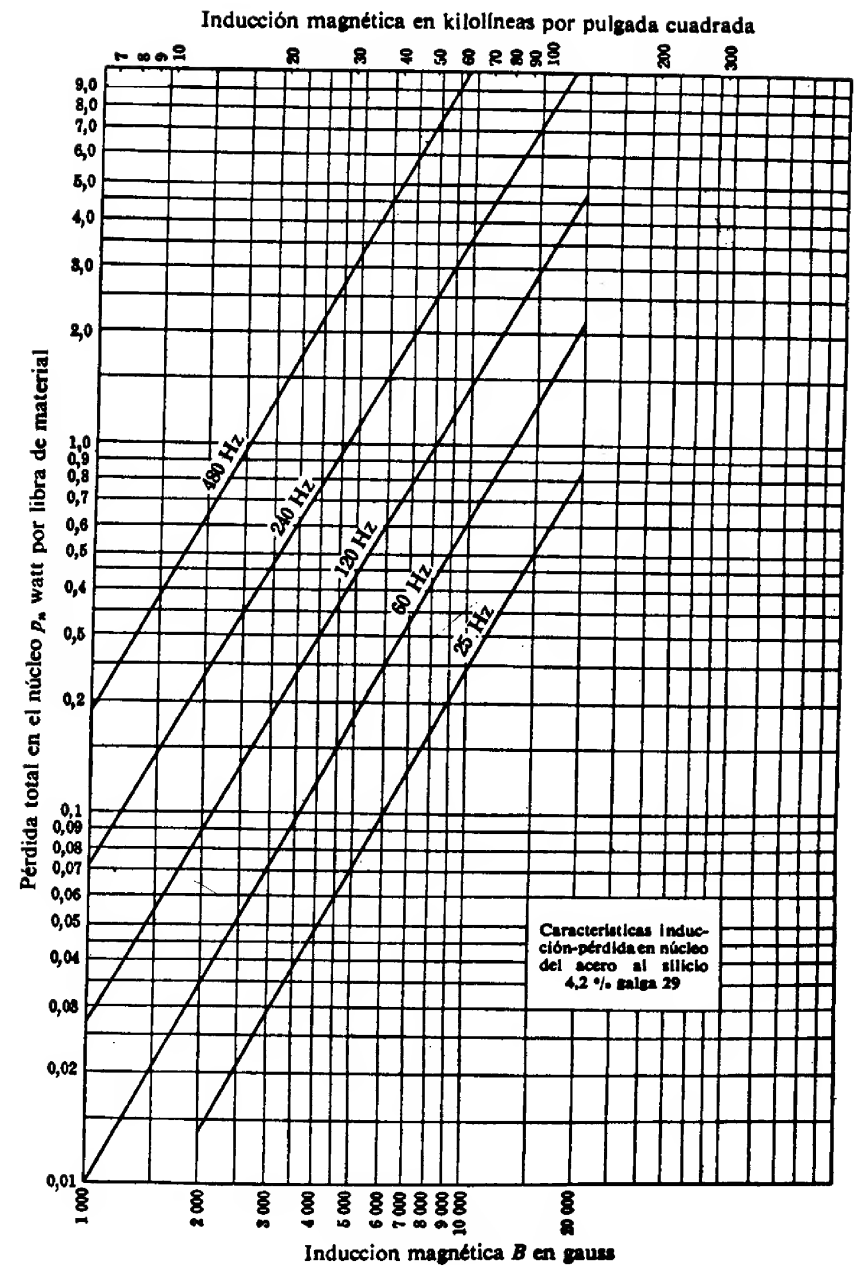


FIG. 10.

para este acero y galga particulares. Esta forma de relación suele ser útil para la labor analítica en la que se considera un dominio de inducciones y de frecuencias. El significado de la tercera cifra dada para C , n y m es, claro está, dudoso, y el valor dado para p_n debe interpretarse con plena conciencia de las aproximaciones inherentes al procedimiento empleado.

Una expresión de la forma de la ecuación (50) se ajusta mejor que otras a las curvas experimentales de determinados materiales. Es puramente empírica y su aplicabilidad puede determinarse más rápidamente mediante diagramas log-log análogos a los de las figuras 9 y 10, de los cuales pueden también deducirse los valores de los exponentes si las curvas pueden aproximarse, sin error excesivo, a líneas rectas.

Como indicación del efecto del espesor de las láminas sobre la pérdida total en el núcleo, se dan las curvas de la figura 11 para una inducción magnética única de 1 T y una frecuencia de 60 Hz. Como la galga patrón en los Estados Unidos tiene carácter logarítmico, una escala aritmética de números de galga equivale a una escala logarítmica invertida de espesores. En la figura indicada, al multiplicar por dos el espesor, diferencia de seis números de galga, se ocupa en la escala de abscisas la misma distancia que al multiplicar por ocho las ordenadas. El cociente entre las distancias en las escalas de espesores y de watt por libra correspondientes al mismo intervalo de logaritmos o factores es $\frac{\log 8}{\log 2}$ o sea tres. Una pendiente geométrica de $-\frac{2}{3}$ tal como la indicada por la línea punteada representa, pues, una pérdida que varía proporcionalmente al cuadrado del espesor. Para el material indicado y para 10 000 G y 60 Hz, las curvas indican que, al reducir el espesor, la pérdida total disminuye menos rápidamente que la relación cuadrática aplicable teóricamente a la componente por corrientes de Foucault.

Los datos obtenidos en las pruebas de pérdidas deben utilizarse con cuidado, ya que las condiciones de la prueba no es probable que se reproduzcan exactamente en la utilización comercial de los materiales. Por ejemplo, en los aparatos comerciales las láminas suelen estar sometidas a presiones considerables a fin de mejorar el factor de apilamiento, obtener rigidez mecánica y reducir el ruido de sus vibraciones. La compresión resultante, los caminos eléctricos que se forman entre láminas adyacentes a causa de rebabas que atraviesan la capa aislante existente en la superficie de las láminas, y los cortocircuitos que originan las sujeciones en los aparatos deficientemente diseñados son condiciones que no se reproducen en la prueba de Epstein y todas ellas tienden a elevar las pérdidas por encima de los valores de la prueba. Los factores de corrección necesarios que hay que aplicar a los datos de las pruebas standard sólo pueden obtenerse a partir de los resultados de medidas realizadas sobre aparatos de construcción análoga a aquella en la que hay que utilizar el material.

7. SEPARACIÓN DE LAS PÉRDIDAS POR HISTERESIS Y POR CORRIENTES DE FOUCAULT

Aun cuando la pérdida total en el hierro suele ser cuestión de principal importancia en el diseño de aparatos electromagnéticos de corriente alterna, la reducción de dicha pérdida total sólo puede realizarse cuando se conocen los valores relativos de las componentes correspondientes a la histeresis y a las corrientes de Foucault. Si predomina la componente correspondiente a las corrientes de Foucault y se puede

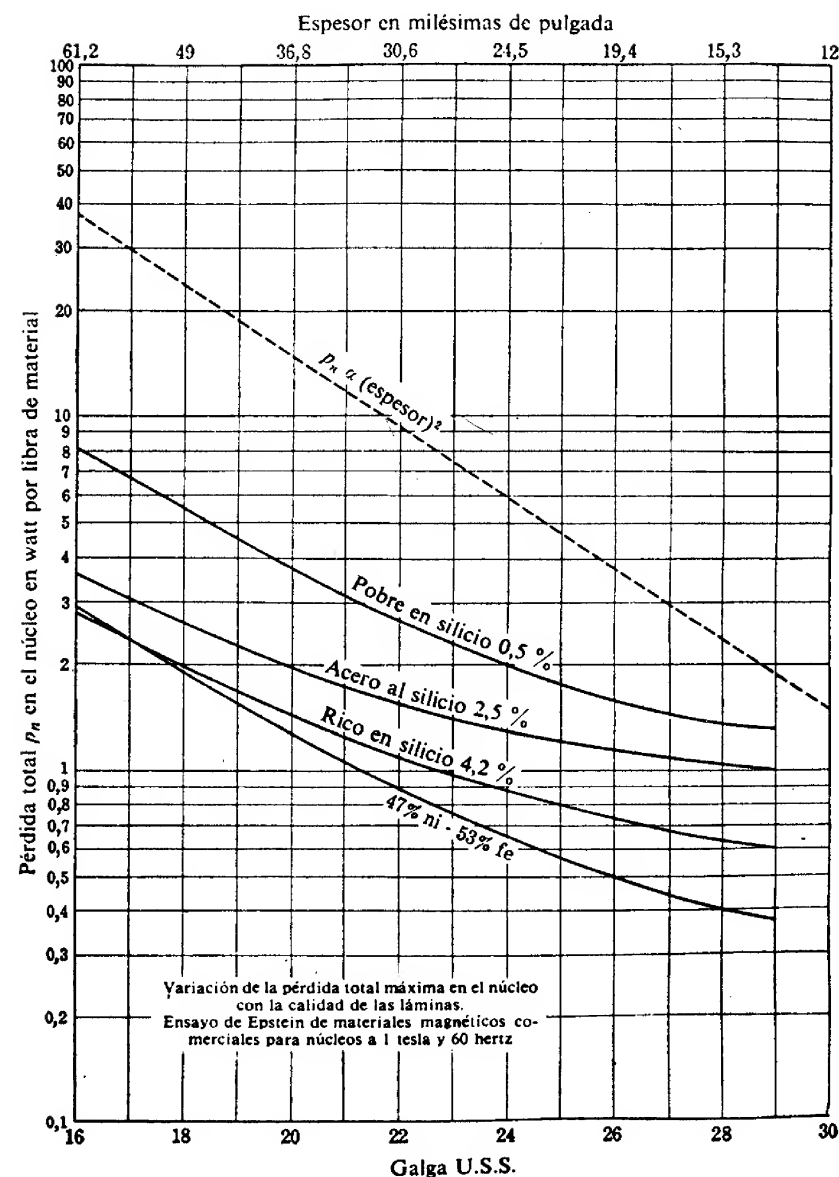


FIG. 11.

disponer de láminas más delgadas, la utilización de éstas reducirá la pérdida total. En cambio, si predomina la pérdida por histéresis, es inútil cambiar el espesor de las láminas. Por tanto, convendrá que el primer paso hacia la reducción de la pérdida total sea disponer de un medio sencillo para determinar la división de la pérdida total en el hierro entre ambas componentes.

Toda medida directa de la pérdida de potencia en el hierro da necesariamente la pérdida total, pero la división en las dos componentes puede determinarse de diversas maneras en las cuales ambas están relacionadas con las variables. Las ecuaciones (36) y (37) indican que, cuando la inducción magnética es función sinusoidal del tiempo, las componentes de la pérdida son funciones diferentes de la frecuencia y de la inducción magnética máxima. Además, la pérdida por corrientes de Foucault es función del espesor de la lámina y de la resistividad; pero, como estas cantidades no pueden variarse en una muestra real de material, no disponemos de ellas como variables.

Un método simple de separación de las componentes correspondientes a las corrientes de Foucault y a la histéresis depende del hecho de que esta última componente varía linealmente mientras la otra lo hace cuadráticamente con la frecuencia. Dicho de otra manera, la componente correspondiente a la histéresis de la *energía total por ciclo* P_c/f , es independiente de la frecuencia y la correspondiente a las corrientes de Foucault es función lineal de la frecuencia. Si se mide la pérdida a una inducción magnética máxima constante dada y se varía la frecuencia, la gráfica de la *pérdida por ciclo* en función de la frecuencia, si cumple la relación teórica

$$P_c/f = \frac{V}{4\pi} \oint_{\text{ciclo}} H dB + \left(\frac{V\pi^2\tau^2 B_{\text{max}}^2}{6\rho} \right) f = K_1 + K_2 f, \quad (52)$$

debe ser una recta. Su ordenada en el origen da la pérdida por histéresis por ciclo K_1 y la pendiente de la recta es el coeficiente de f contenido en el paréntesis de la ecuación (52), es decir,

$$K_2 = \frac{V\pi^2\tau^2 B_{\text{max}}^2}{6\rho}. \quad (53)$$

El proceso se realiza experimentalmente en la forma que a continuación se indica: Se conecta un generador que dé una forma de onda esencialmente sinusoidal a una bobina de poca resistencia arrollada sobre una muestra de hierro adecuada, tal como un anillo o una muestra para prueba de Epstein y se miden la potencia total de entrada, la tensión, la frecuencia y la intensidad de la corriente mediante instrumentos adecuados. La potencia entregada al hierro es la indicada por el watímetro menos las correcciones tales como las pérdidas por efecto Joule en el instrumento y en la resistencia de la bobina, no siendo necesaria esta última corrección en el método de medida de Epstein.

Si se ha de emplear la ecuación (52), deberá mantenerse constante B_{max} ; luego la tensión eficaz E_ϕ generada en la bobina por la variación de flujo en el hierro debe mantenerse proporcional a la frecuencia. Así, si se hace pequeña la caída óhmica de tensión en la bobina tomando ésta de pequeña resistencia, que es lo que suele hacerse, la tensión aplicada E podrá considerarse, con error despreciable, de igual valor que la tensión E_ϕ . Realizando una serie de medidas diferentes manteniendo constante E_ϕ/f a lo largo de un intervalo de frecuencias que se extienda todo lo

posible hasta una frecuencia casi nula, tendremos los datos necesarios. La gráfica de P_c/f extrapolada hasta la frecuencia cero nos dará entonces la pérdida por histéresis por ciclo.

Estas medidas pueden realizarse sobre muestras para pruebas o sobre transformadores y bobinas de reacción, o en forma modificada sobre máquinas rotatorias.

PROBLEMAS

1. Se diseña un transformador de núcleo de hierro para 60 Hz que debe dar una tensión de 11 000 V en el devanado de alta tensión. El núcleo laminado de acero tiene una sección recta de 72,2 pulg² (466 cm²) y el factor de apilamiento es de 0,9. El devanado de alta tensión tiene 910 espiras.

- ¿A qué inducción magnética máxima opera el núcleo?
- Si se aumenta en un 10 % la longitud del núcleo, ¿en cuánto varía el flujo?
- Si se reduce en un 10 % el número de espiras, ¿a qué inducción magnética máxima operará el núcleo?

d) Las bobinas interiores de este transformador son circulares y ajustan perfectamente sobre el núcleo cuadrado. Si se cambia éste por uno de sección cruciforme que ajuste exactamente en el interior de la bobina, ¿a qué inducción magnética operará el nuevo núcleo? El devanado tiene 910 espiras.

Nota: La razón máxima del área con sección cruciforme al área de un núcleo con sección cuadrada, encajando ambas en un mismo círculo es $\sqrt{5} - 1$.

2. El devanado de alta tensión de un transformador de potencia consiste en dos bobinas que pueden conectarse en serie o en paralelo. Cuando están en paralelo con una tensión de 22 000 V a 60 Hz, la corriente en vacío tiene una intensidad de 0,077 A y la potencia es de 371 W, el 28 % de la cual corresponde a las pérdidas por corrientes de Foucault. ¿Cuáles serán los valores aproximados de la intensidad y la potencia en vacío cuando los devanados se conectan en serie y los alimenta un generador de 22 000 V 30 Hz?

3. Cuando se abre el secundario de un transformador con núcleo de hierro y se aplica al primario una tensión sinusoidal de 60 Hz y valor eficaz 500 V, la potencia en el primario es de 1 200 W. Cuando se aplica al secundario una tensión sinusoidal de 30 Hz y valor eficaz 500 V con el primario abierto, la potencia en el secundario es de 500 W. La razón del número de espiras del primario al del secundario es 0,5.

Si se desprecian las caídas en los devanados por resistencia y reactancia de pérdidas en vacío, ¿cuáles son las pérdidas por corrientes de Foucault y por histéresis al operar con una tensión sinusoidal de 60 Hz y valor eficaz 500 V aplicada al primario?

4. El núcleo de un transformador tiene una longitud media de 70 pulgadas (178 cm), y una sección recta uniforme de 30 pulg² (194 cm²). El factor de apilamiento es 0,90; la densidad del hierro es de 0,272 lb/pulg³ (7,53 g/cm³).

El primario tiene 94 espiras. Cuando este transformador opera en vacío, la pérdida medida en el núcleo, es decir, la potencia entregada menos la pérdida en el cobre del primario, para diferentes frecuencias y tensiones sinusoidales aplicadas es la dada en la tabla siguiente:

Prueba	V		P
A	678,7 V	60 Hz	904,0 W
B	282,8	25	344,4
C	484,8	60	420,0
D	202,0	25	159,4
E	291,0	60	177,3
F	121,2	25	64,25

Pueden despreciarse la caída óhmica en el primario y las fugas magnéticas. Cuando sean despreciables los efectos de éstas, la tensión aplicada es igual a la tensión inducida en el primario por el flujo en el núcleo.

a) ¿Cuáles son las inducciones magnéticas máximas y las pérdidas en el núcleo correspondientes a las condiciones indicadas en las pruebas A, B, C, D, E, F? Tabúlense los resultados.

b) ¿Cuáles son las pérdidas por corrientes de Foucault y por histéresis correspondientes a cada prueba?

c) ¿Cuáles son el coeficiente y el exponente de Steinmetz? Para hallar éstos deben emplearse los datos para 60 Hz.

5. Se quiere formar un núcleo magnético con chapas standard en forma de L, en la forma indicada en la figura 12, alternando la colocación de las juntas de las capas sucesivas según indican las líneas continuas y punteadas. La pila tiene una altura de $3/4$ de pulgada (19 mm). El factor de apilamiento es 0,88.

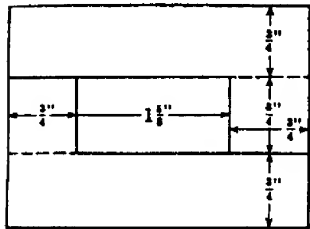


FIG. 12. Núcleo laminado de transformador constituido por secciones L, al que hace referencia el problema 5.

El material del núcleo es de acero rico en silicio de densidad 0,274 lb/pulg³ (7,58 g/cm³) y una resistividad de 60 $\mu\Omega$ -cm. Los ensayos del fabricante realizados con $B_{max} = 1$ T indican que la pérdida por histéresis es de 1 340 erg/cm³ por ciclo y la pérdida por corrientes de Foucault de 0,114 W/lb a 60 Hz si las láminas son de la galga 29 (0,014 pulg. espesor).

a) Predecir la pérdida total que tendrá este núcleo a 200 Hz para $B_{max} = 1$ T, si las láminas son de la galga 29.

b) ¿En qué tanto por ciento aumentarán las pérdidas en el núcleo si se empleara el mismo peso neto de

hierro en las mismas condiciones de inducción magnética y frecuencia que en el apartado a), pero si el material fuera de la galga 26 (espesor 0,0188 pulgadas)?

6. El núcleo de hierro de un transformador de 1 000 kVA debe operar con una tensión eficaz de 2 300 V en primario a 60 Hz. En estas condiciones, la inducción magnética máxima en el núcleo es de 11 000 G si la tensión es sinusoidal y la pérdida en el núcleo es de 2,25 W/kg. La longitud media del núcleo es de 240 cm. El área de su sección recta, que es uniforme, es de 1 790 cm². La densidad del hierro del núcleo es de 7,53 g/cm³ y el factor de apilamiento 0,9. El exponente de Steinmetz es 1,6. Con una tensión sinusoidal aplicada que dé la misma inducción magnética máxima cuando la frecuencia es de 25 Hz la pérdida en el núcleo es de 0,845 W/kg.

Si se aplica una tensión de 60 Hz y valor eficaz 2 300 V cuya forma de onda sea

$$v = V_1 \sin \omega t + 0,1 V_1 \sin 3\omega t$$

al primario, ¿cuál es la pérdida en el núcleo?

Características de excitación por corriente alterna de las bobinas con núcleo de hierro y de los transformadores

Las bobinas construidas y utilizadas principalmente para aprovechar su inductancia reciben también el nombre de bobinas de reacción, de choke, o de retardo. Cuando están destinadas a funcionar a frecuencias audibles y más bajas, suelen tener un núcleo de hierro o de acero al silicio u otro material ferromagnético laminado. A dichas frecuencias, el principal efecto de añadir un núcleo de hierro a una bobina es incrementar mucho su inductancia.

Desde el punto de vista técnico, este aumento de inductancia es muy importante, ya que el empleo de un núcleo de hierro en lugar de uno de material no magnético en una bobina que deba tener una inductancia especificada permite frecuentemente la reducción de las dimensiones de la bobina, de la resistencia del devanado, del peso de la bobina, o de las tres cosas. Otra importante ventaja del núcleo de hierro es que confina en él la casi totalidad del flujo y por tanto, para una inductancia dada, la dispersión del campo magnético por la región que rodea a la bobina es menor que en el caso de núcleo de aire. En consecuencia, el acoplo magnético entre una bobina con núcleo de hierro y los circuitos adyacentes puede mantenerse relativamente pequeño.

Sin embargo, el empleo del hierro introduce fenómenos secundarios que pueden llevar consigo efectos perniciosos. Las pérdidas en el núcleo inherentes al hierro sometido a imanación variable con el tiempo pueden afectar al circuito en forma contraproducente o bien originar el calentamiento del núcleo y limitar la utilidad del dispositivo. Por otra parte, la falta de linealidad de las características de imanación de los núcleos hacen que la inductancia sea una variable dependiente del flujo, con lo que se introducen complicaciones en el análisis de los circuitos que contienen bobinas con núcleo de hierro. Aun cuando en muchas aplicaciones ni las pérdidas en el núcleo ni la inductancia variable causan perturbaciones, en otras estos factores son muy importantes y se hace necesaria una técnica muy experta para reducir al mínimo sus efectos o para predecir el comportamiento de los circuitos afectados por ellas. Esta y otras materias importantes de la aplicación de las bobinas con núcleo de hierro y de los transformadores constituyen el tema de este capítulo.

1. PROPIEDADES GENERALES DE LAS BOBINAS CON NÚCLEO DE HIERRO

Las pérdidas totales en una bobina con núcleo de hierro comprenden la pérdida $I^2 R$ en la resistencia efectiva y las pérdidas por histéresis y por corrientes de Foucault en el núcleo. La *resistencia efectiva* R en corriente alterna supera a la resistencia en corriente continua del devanado a causa del efecto cortical y otras causas que se estudian en el apartado 3b de este capítulo. Cuando se mide la impedancia de una bobina, la parte real de la impedancia —llamada *resistencia aparente*— resulta ser mayor que la resistencia efectiva del devanado. Por definición, la resistencia

aparente es igual a la potencia total disipada en la bobina dividida por el cuadrado de la intensidad de la corriente y por tanto deberá ser siempre mayor que la resistencia efectiva del devanado siempre que hayan pérdidas en el núcleo. Obsérvese bien la distinción entre la *resistencia efectiva* R y la *resistencia aparente* R_a . La resistencia efectiva sólo tiene en cuenta la pérdida en el devanado, mientras que la resistencia aparente tiene en cuenta la pérdida total en la bobina.

Al ir aumentando la frecuencia, las ventajas del núcleo de hierro van siendo menos marcadas. El aumento con la frecuencia de las pérdidas en el núcleo pueden hacer excesiva la resistencia aparente. El efecto apantallador de las corrientes de Foucault puede hacerse tan grande a frecuencias elevadas, que la permeabilidad aparente del núcleo en corriente alterna puede hacerse apreciablemente menor que su valor a frecuencias bajas. Por tanto, la inductancia aparente puede disminuir.

En muchas aplicaciones de las bobinas de inducción, especialmente en los circuitos resonantes, el cociente entre la reactancia inductiva ωL y la resistencia aparente R_a debe ser lo mayor posible. A pesar del aumento de resistencia aparente debido a las pérdidas en el núcleo y la disminución de inductancia aparente debida al efecto apantallador de las corrientes de Foucault, el cociente $\omega L/R_a$ puede hacerse mayor con un núcleo de hierro que con un núcleo de aire en todo el intervalo de frecuencias que se extiende hasta alcanzar las ultrasonoras. Para lograr esta condición a las frecuencias más elevadas, debe mantenerse pequeña la inducción magnética y deben utilizarse núcleos constituidos por láminas delgadas de gran resistividad o de polvo prensado a fin de mantener bajas las pérdidas en el núcleo y el efecto apantallador de las corrientes de Foucault. En radiofrecuencia, suelen emplearse bobinas con núcleo de aire. En estas aplicaciones de frecuencias elevadas, un coeficiente de auto-inducción L relativamente pequeño origina una reactancia inductiva ωL grande, por lo que no suele ser necesaria una gran inductancia.

2. NÚCLEOS DE HIERRO EN LOS TRANSFORMADORES

En los transformadores utilizados en comunicaciones para funcionar a frecuencias audibles se emplean casi siempre núcleos de hierro. En dichos transformadores la razón de la tensión interna del generador de potencia conectado a su primario a la tensión suministrada a la carga conectada a su secundario debe mantenerse casi constante en todo el intervalo de frecuencias en que debe funcionar el transformador. Según se verá en el capítulo XVIII, si queremos aproximarnos a estas condiciones ideales en un intervalo de frecuencias amplio, el coeficiente de acoplo entre los devanados debe ser muy próximo a la unidad y la autoinducción del primario deberá ser grande para un funcionamiento satisfactorio a frecuencias bajas. Los resultados pueden obtenerse con un núcleo ferromagnético. Una consecuencia desfavorable del empleo de un núcleo de hierro es la distorsión debida a las propiedades magnéticas no lineales del núcleo, cosa que se estudiará en el apartado 5.

También se emplean siempre núcleos de hierro en los transformadores de potencia; la gran autoinducción reduce a un valor razonablemente pequeño la intensidad de la corriente en vacío o de excitación, y lo elevado del coeficiente de acoplo da origen a una pequeña regulación de tensión en el funcionamiento en carga. Sin embargo, el núcleo de hierro introduce pérdidas en el núcleo que tienen un efecto importante sobre el rendimiento y la elevación de temperatura del transformador. Las carac-

terísticas no lineales de la imanación del hierro hacen también que la forma de la onda de la corriente de excitación no sea sinusoidal aún cuando el flujo varíe sinusoidalmente, según se verá en el apartado 8. En algunas circunstancias, los armónicos que así se introducen en la corriente de excitación, pueden ser perjudiciales.

Cuando sólo se excita un devanado de un transformador con núcleo de hierro, el transformador se comporta como una bobina con núcleo de hierro. Por tanto, el estudio de este capítulo no solamente se aplica a los problemas referentes a las bobinas con núcleo de hierro, sino también al importante problema de determinar el comportamiento de un transformador con núcleo de hierro trabajando en vacío.

3. HIPÓTESIS

Las hipótesis descritas a continuación constituyen el fundamento de todo estudio realizado en este texto acerca de las bobinas con núcleo de hierro y los transformadores.

3a. *Capacidad.* Salvo cuando se especifique lo contrario, se despreciarán los efectos de las capacidades distribuidas de los devanados. Pueden afectar marcadamente a las características a frecuencias elevadas y durante los transitorios rápidamente variables, pero sus efectos suelen ser despreciables a las frecuencias utilizadas en los sistemas de potencia y a las audiofrecuencias suficientemente bajas.

3b. *Resistencia.* Cuando un conductor transporta corriente alterna, su resistencia efectiva puede ser apreciablemente mayor que cuando transporta corriente continua estacionaria; es decir, la pérdida calorífica por ampere puede ser apreciablemente mayor en corriente alterna. El aumento de la pérdida se debe a la densidad de corriente no uniforme ocasionada por el campo magnético variable producido en el interior del conductor por su propia corriente y por las corrientes de los conductores próximos. A estos fenómenos suele llamárseles *efecto cortical* y *efecto de proximidad*. La pérdida debida a ellos crece con la frecuencia de la corriente y con el tamaño del conductor, y se reduce cuando se trenzan conductores grandes y se trasponen adecuadamente los cabos.

Al aumentar la corriente de carga suministrada por un transformador, suelen aumentar las pérdidas por corrientes de Foucault y por histeresis en el núcleo y en partes de la estructura próximas a los devanados, aun cuando no varíe el flujo principal del núcleo. Estas pérdidas extraordinarias —a las que se suele llamar *pérdidas por cargas parásitas*— están creadas por el incremento de las fugas de flujo que se produce al incrementar la carga. Dependen más de las intensidades de corriente en los devanados que de la magnitud del flujo principal en el núcleo. Como las pérdidas por cargas parásitas varían aproximadamente como los cuadrados de las intensidades de corriente en los devanados, suelen quedar consideradas aproximadamente si se supone que los devanados tienen resistencias a la corriente alterna mayores que las resistencias efectivas debidas al efecto cortical y al efecto de proximidad solamente. En un transformador diseñado adecuadamente las pérdidas por cargas parásitas suelen ser pequeñas y las resistencias efectivas de los devanados son frecuentemente muy poco mayores que sus resistencias a la corriente continua. En la teoría presentada a continuación, a menos que se indique lo contrario, las resistencias efectivas se suponen constantes e independientes de la intensidad y la frecuencia.

4. RELACIONES ENTRE LA TENSIÓN INDUCIDA, EL FLUJO Y LA INTENSIDAD DE LA CORRIENTE

La relación entre la tensión instantánea v entre los terminales de una bobina y la intensidad instantánea i de la corriente que circula por la bobina viene dada por la ecuación

$$v = Ri + \frac{d\lambda}{dt}, \quad \blacktriangleright (1)$$

donde R es la resistencia del devanado y λ es el flujo instantáneo aprovechado. Puede emplearse cualquier sistema compatible de unidades. Esta ecuación debe comprenderse con toda claridad, ya que es fundamental para la teoría de todos los aparatos electromagnéticos. A continuación repasaremos el significado de los valores positivos de la intensidad de la corriente, flujo y tensión de la ecuación (1). En muchos problemas de transformadores, particularmente en aquellos que entrañan la interconexión entre dos o más devanados, deberán tenerse bien presente estos sentidos positivos.

Experimentalmente resulta que si la corriente que circula por una bobina gira en el sentido de las agujas del reloj para un observador que mira en la dirección del eje de la bobina, el sentido del flujo creado por dicha corriente es el de alejamiento del observador. Es decir, el sentido de la corriente positiva es el de rotación de un tornillo directo que avance en el sentido del flujo positivo, según se indica en la figura 1. Cuando la corriente es alterna, las flechas no indican más que los sentidos de los valores positivos de la intensidad y del flujo.

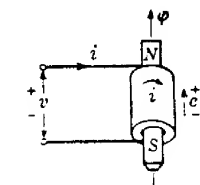


FIG. 1. Sentidos positivos de la corriente, flujo y tensiones.

Mientras varía el flujo que atraviesa un devanado, se genera en éste una fuerza electromotriz igual a la variación en unidad de tiempo de dicho flujo, la cual tiende a enviar corriente a través del devanado en un sentido que se oponga a la variación de flujo. Así pues, si el flujo es positivo y creciente, la fuerza electromotriz e inducida en la bobina tiene el sentido indicado en la figura 1, ya que una corriente creada por esta fuerza electromotriz tendería a evitar el crecimiento del flujo. Si el flujo es positivo y creciente, la derivada del flujo respecto al tiempo es positiva. Luego la fuerza electromotriz inducida en la bobina en el sentido indicado en la figura 1 es

$$e = + \frac{d\lambda}{dt}. \quad \blacktriangleright (2)$$

Cuando el flujo es alterno, el sentido no indica más que el significado de los valores positivos de e . Obsérvese que e es una fuerza electromotriz o subida de potencial en el sentido del tornillo inverso respecto al flujo positivo.

Si es R la resistencia del devanado, la componente de la caída de tensión debida a la resistencia es una caída instantánea Ri de potencial en el sentido de la corriente. Luego si i es la intensidad instantánea de la corriente en el sentido positivo o del tornillo directo respecto al flujo positivo y v es la caída instantánea de potencial en

los terminales en el mismo sentido, según indican las señales de polaridad de la figura 1, entonces:

$$v = Ri + e = Ri + \frac{d\lambda}{dt}, \quad \blacktriangleright (3)$$

como en la ecuación (1).

Si a una bobina con núcleo de hierro se aplica una tensión continua V_{cc} , el valor estacionario I_{cc} de la intensidad de la corriente no queda afectado por las dimensiones o calidad del núcleo magnético, sino que queda totalmente determinado por la resistencia del devanado a la corriente continua y es

$$I_{cc} = \frac{V_{cc}}{R}. \quad (4)$$

Las dimensiones y calidad del núcleo y el número de espiras del devanado determinan, no obstante, el valor del flujo en el núcleo.

5. TENSIÓN ALTERNA APLICADA

Totalmente diferente es la situación que se presenta al aplicar una tensión alterna a un circuito serie que contenga una bobina con núcleo de hierro o un transformador. Consideremos el circuito serie simple de la figura 2, en el cual puede verse un generador de resistencia interna R_G y fuerza electromotriz interna instantánea e_G conectado a los terminales del primario de un transformador con núcleo de hierro. El equivalente de este circuito es muy corriente en los circuitos de comunicación, por lo que el comportamiento del circuito da una información útil acerca de la naturaleza general de algunos de los efectos producidos en los circuitos de comunicación por el empleo de materiales ferromagnéticos en los núcleos de bobinas y transformadores. Supongamos abierto el circuito secundario del transformador. La ecuación de las tensiones en el circuito de la figura 2 es:

$$e_G = (R_G + R_1)i_\varphi + \frac{d\lambda_1}{dt}, \quad (5)$$

donde,

R_1 es la resistencia efectiva del devanado primario,
 i_φ es la intensidad instantánea de la corriente,
 λ_1 es el flujo instantáneo que atraviesa el primario.

En un transformador con núcleo de hierro trabajando en vacío, el flujo útil suele ser mayor que el 99 % del flujo total. Si se supone que todo el flujo φ atraviesa las N_1 espiras primarias, como ocurriría si el flujo se hallara totalmente confinado en el núcleo, el flujo que atraviesa el primario será igual a $N_1\varphi$, y la fuerza contraelectromotriz e_1 inducida en el primario es:

$$e_1 = N_1 \frac{d\varphi}{dt} \quad (6)$$

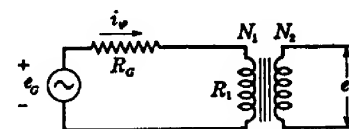


FIG. 2. Transformador conectado a un generador de resistencia interna R_G .

Y la ecuación (5) podrá escribirse en la forma,

$$e_G = (R_G + R_1)i_\varphi + N_1 \frac{d\varphi}{dt}. \quad \blacktriangleright (7)$$

El flujo en el núcleo atraviesa también las N_2 espiras del secundario. Como casi todo el flujo está confinado en el núcleo, la tensión e_2 inducida en el secundario en circuito abierto es, muy aproximadamente,

$$e_2 = N_2 \frac{d\varphi}{dt}. \quad (8)$$

En los circuitos para comunicaciones es frecuente que la forma de onda de la tensión e_G del generador esté directamente relacionada con la inteligencia que se transmite, por lo que la tensión de salida e_2 deberá tener una forma de onda lo más semejante posible a la de la tensión del generador e_G . En general, la tensión de señal e_G es una función complicada del tiempo; sin embargo, puede averiguarse mucho acerca del comportamiento del circuito estudiando su funcionamiento cuando la tensión del generador e_G es una onda sinusoidal. En consecuencia, en todo el estudio que sigue se supondrá que la tensión del generador e_G es una onda sinusoidal conocida.

El flujo φ lo crea la fuerza magnetomotriz de la corriente de intensidad i_φ , que por ello recibe el nombre de *corriente de excitación*. En la figura 3 puede verse una característica flujo-intensidad de corriente. Las abscisas son las intensidades instantáneas de la corriente de excitación, y las ordenadas son los valores instantáneos correspondientes del flujo en el núcleo. El ciclo de la figura 3 es simétrico respecto

al origen. En los circuitos para comunicaciones, a la corriente alterna de excitación producida por la tensión alterna de señal se superpone frecuentemente en el devanado una corriente continua; en estas circunstancias el ciclo se halla desplazado respecto al origen *.

La inducción magnética en el hierro es proporcional al flujo en el núcleo, y el campo magnético es aproximadamente proporcional a la intensidad de la corriente de excitación. Por tanto, el ciclo flujo-intensidad de corriente tendrá aproximadamente la misma forma que el ciclo de histeresis del material del núcleo para la inducción magnética máxima correspondiente. Esta conclusión prescinde del efecto magnético de las corrientes de Foucault, de las incertidumbres introducidas por los ángulos del núcleo, y de la fuerza magnetomotriz requerida por los entrehierros que puedan haberse introducido intencionadamente en el núcleo

o que sea inevitable su presencia a causa de las uniones entre las láminas. El efecto magnético de las corrientes de Foucault suele ser relativamente pequeño a frecuencias del orden de los 50 Hz, pero crece mucho al aumentar la frecuencia. Prescindiremos de las corrientes de Foucault a fin de simplificar la presentación de los principios

* Los efectos de la superposición de excitaciones por corrientes alternas y continuas se estudian en los apartados 14 y 15.

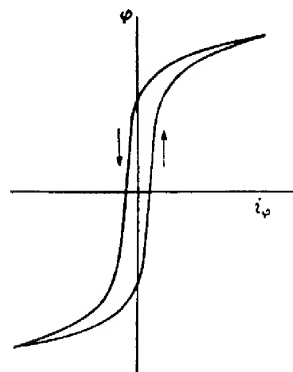


FIG. 3. Ciclo flujo-intensidad de corriente.

fundamentales. La característica flujo-intensidad de corriente coincide, en tal caso, con la característica estática medida con un galvanómetro balístico¹.

Según la ecuación (7), la corriente de excitación debe ajustarse ella misma de manera que la suma de la caída óhmica instantánea $(R_G + R_1)i_\varphi$ más la fuerza contraelectromotriz instantánea e_1 debida al flujo creado por la corriente de excitación sea igual al valor instantáneo de la tensión del generador e_G . Cuando son importantes tanto la caída óhmica como la fuerza contraelectromotriz, la solución de la ecuación (7) es difícil por varias razones. En primer lugar, el ciclo de histeresis que relaciona la corriente de excitación con el flujo, no es lineal y, en realidad, no es uniforme. Como el ciclo de histeresis no puede expresarse analíticamente, todo intento de solución teórica deberá basarse en métodos gráficos. Otra dificultad surge del hecho de que la forma del ciclo de histeresis depende de su amplitud. Luego no será posible ni siquiera determinar en cuál de los ciclos de una familia de ciclos de histeresis está trabajando el núcleo hasta que se conozca el valor máximo del flujo

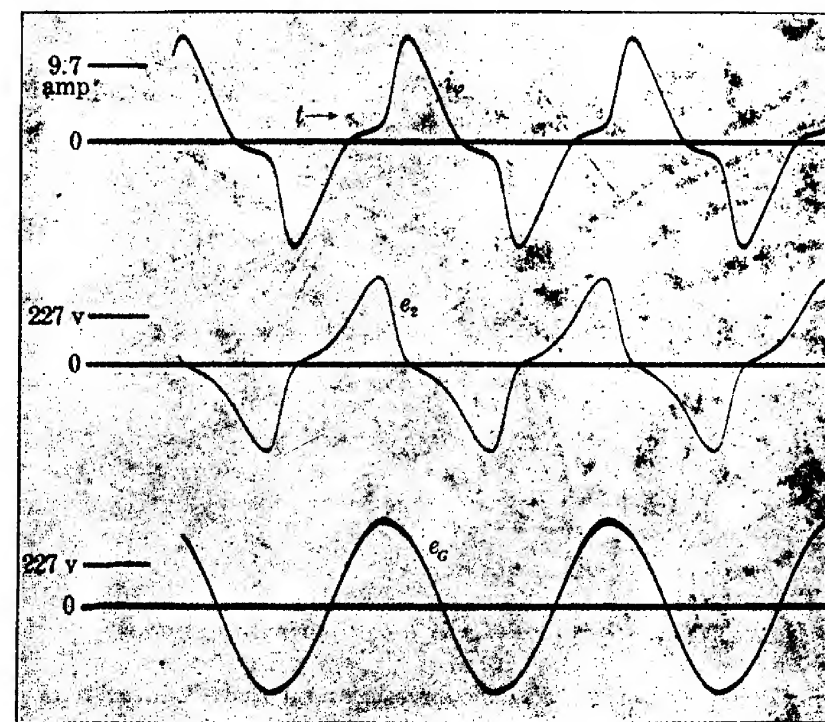


FIG. 4. Oscilogramas obtenidos del circuito de la figura 2.

o de la intensidad de la corriente. Si se dispone de una familia de ciclos flujo-intensidad determinada experimentalmente, puede obtenerse la intensidad instantánea de la ecuación (7) por métodos de aproximaciones sucesivas o por medios mecánicos

¹ Véase T. SPOONER, *Properties and Testing of Magnetic Materials* (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1927), 220.

tales como el analizador diferencial. No obstante, dichos medios de solución son laboriosos por lo que, cuando sea posible, se preferirá la experimentación directa, bien sobre el propio circuito o bien sobre un modelo adecuado.

En la figura 4 pueden verse oscilogramas de la corriente de excitación i_φ y de la tensión e_2 inducida en el secundario en circuito abierto de un transformador con núcleo de hierro excitado a través de una resistencia en serie por un generador de tensión e_G esencialmente sinusoidal, como en el circuito de la figura 2. La falta de linealidad magnética del núcleo hace que la corriente de excitación no sea sinusoidal aun cuando la tensión del generador e_G lo sea. Luego la caída óhmica $(R_G + R_1)i_\varphi$ no será sinusoidal y tiene la misma forma de onda que la corriente de excitación. Esta caída óhmica, calculada a partir del oscilograma de i_φ y del valor medido de $(R_G + R_1)$, es la representada en la figura 5 en la cual también puede verse la tensión inducida e_2 en el secundario, obtenida a partir del oscilograma y representada gráficamente a la misma escala que la caída óhmica. Como primario y secundario de este transformador tienen igual número de espiras, y como en vacío son despreciables las fugas magnéticas, la tensión inducida e_1 en el primario es aproximadamente igual a la tensión e_2 en el secundario. La forma de onda de la tensión inducida es marcadamente no sinusoidal. En cambio, la suma de la caída óhmica no sinusoidal $(R_G + R_1)i_\varphi$ más la tensión inducida no sinusoidal e_1 , se aproxima mucho a una sinusoide, según indica la línea de trazos de la figura 5. Esto debe ocurrir puesto que, según la ecuación (7), la suma de estas cantidades es igual a la tensión e_G del generador, que es esencialmente sinusoidal. Es decir, las formas de onda de la tensión inducida y de la corriente de excitación deben ajustarse ellas mismas para crear

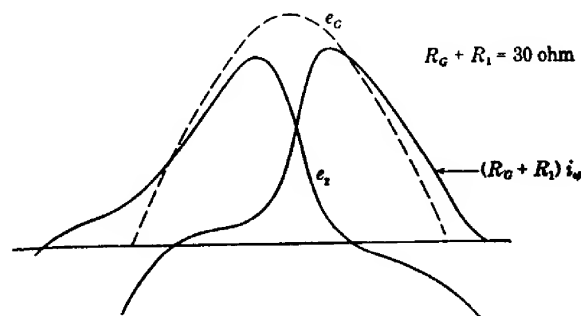


FIG. 5. Curvas obtenidas de los oscilogramas de la figura 4.

en la tensión inducida armónicos que sean iguales y opuestos a los originados por la caída óhmica no sinusoidal $(R_G + R_1)i_\varphi$ debida a la corriente de excitación. Así, cuando sea grande la resistencia del circuito, la forma de onda de la tensión e_2 del secundario podrá diferir considerablemente de la forma de onda de la tensión e_G del generador. En los circuitos para comunicaciones esta distorsión puede ser seria, especialmente para señales fuertes a frecuencias bajas, para cuya condición la corriente de excitación puede ser intensa. También se produce distorsión si, al ensayar en vacío un transformador de potencia, se regula la tensión aplicada por medio de un reostato en serie.

Aun cuando es difícil calcular el funcionamiento del circuito de la figura 2 cuando tanto la caída óhmica como la fuerza contraelectromotriz del transformador son importantes, los dos casos límites para los cuales una u otra de dichas tensiones componentes sea despreciable pueden calcularse por métodos aproximados relativamente sencillos. A continuación daremos dichas soluciones.

6. CORRIENTE DE EXCITACIÓN SINUSOIDAL

Cuando la fuerza contraelectromotriz inducida en el transformador es despreciable frente a la caída óhmica, el generador de tensión sinusoidal e_G de la figura 2 originará una corriente de excitación cuya forma de onda será casi sinusoidal. Luego, si es E_G el valor eficaz de la tensión sinusoidal del generador, la intensidad eficaz de la corriente será, aproximadamente,

$$I_\varphi = \frac{E_G}{R_G + R_1}. \quad (9)$$

Si se supone que la corriente de excitación tiene una forma de onda sinusoidal, de amplitud conocida $\sqrt{2}I_\varphi$, las formas de onda aproximadas del flujo y de la tensión inducida en el transformador podrán determinarse a partir del ciclo flujo-intensidad apropiado mediante un método gráfico sencillo que exponemos a conti-

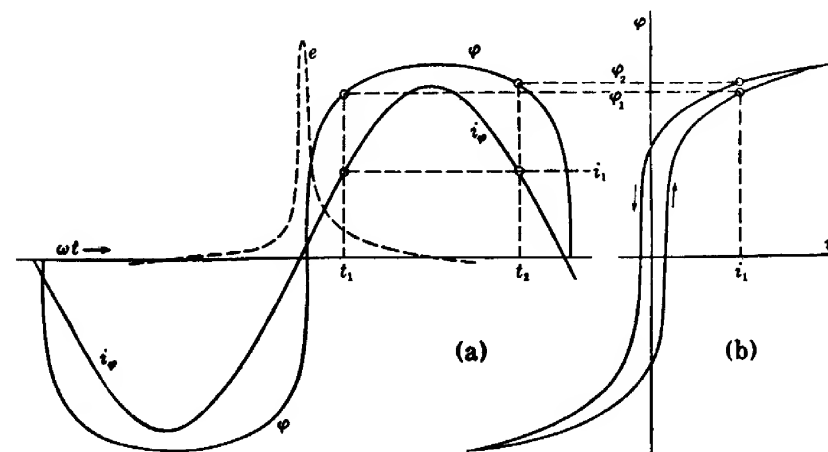


FIG. 6. Construcción gráfica para la determinación de las formas de onda del flujo y de la tensión inducida cuando la corriente de excitación es una función sinusoidal conocida del tiempo.

nuación². En la figura 6a puede verse la sinusoide de la corriente de excitación i_φ , y en la figura 6b el ciclo simétrico correspondiente que relaciona el flujo con la intensidad de la corriente, determinado mediante un galvanómetro balístico. Si se des-

² Para el estudio de una solución analítica, véase E. PETERSON, «Harmonic Production in Ferromagnetic Materials at Low Frequencies and Low Flux Densities», B. S. T. J., 7 (1928), 762-796.

precia el efecto magnético de las corrientes de Foucault, este ciclo será también la característica flujo-intensidad de corriente para corriente alterna. En el instante t_1 , figura 6a, la corriente de excitación se intensifica y tiene una intensidad instantánea i_1 . En la figura 6b, el flujo instantáneo correspondiente es φ_1 . En el instante t_2 , figura 6a, la corriente de excitación tiene también la intensidad i_1 , pero ésta disminuye y el flujo instantáneo correspondiente en la figura 6b es φ_2 . Estos y otros valores instantáneos del flujo, determinados de manera análoga y representados gráficamente en función del tiempo, dan la forma de onda del flujo φ indicada en la figura 6a. Cuando es simétrico el ciclo de histeresis, como en la figura 6b, las formas de onda de los hemisiclos positivo y negativo son idénticas. La variación de flujo, por tanto, sólo contiene armónicos impares *. Si el ciclo de histeresis fuera asimétrico, como ocurriría si por el devanado circulara también corriente continua, la variación de flujo contendría también armónicos pares. Obsérvese que, a causa de la histeresis, el flujo va retrasado respecto a la corriente. La onda del flujo, figura 6a, sube rápidamente, presenta una cumbre relativamente achatada y ligeramente torcida hacia un lado, y luego cae rápidamente.

Como la tensión inducida es proporcional a la pendiente $d\varphi/dt$ de la onda del flujo, la onda de la tensión inducida podrá obtenerse gráficamente determinando esta pendiente, con lo que resulta la curva de trazos de la figura 6a. Esta tensión sube formando un pico agudo que corresponde a la parte de gran pendiente de la onda del flujo. En general, una onda de flujo que tenga una cumbre más achatada que una onda sinusoidal da origen a una onda de tensión inducida de picos más agudos que los de una senoide. También los armónicos de la tensión inducida serán relativamente mayores que los del flujo. Por ejemplo, si la variación de flujo es:

$$\varphi = \phi_{1max} \sin \omega t + \phi_{3max} \sin 3\omega t, \quad (10)$$

la tensión inducida e será:

$$e = N \frac{d\varphi}{dt} = N(\omega\phi_{1max} \cos \omega t + 3\omega\phi_{3max} \cos 3\omega t). \quad (11)$$

luego el tercer armónico de la tensión inducida tiene una importancia relativa triple que el tercer armónico del flujo.

En los circuitos de comunicaciones los armónicos de la tensión inducida constituyen la distorsión. Por tanto, la figura 6a representa condiciones que se evitan y no condiciones que realmente se presenten. Se reduce la distorsión diseñando el transformador para que funcione a inducciones magnéticas máximas a las cuales el ciclo de histeresis no esté demasiado deformado por la no linealidad magnética. También se reduce, si se hace la inductancia del transformador suficientemente grande frente a la resistencia interna de la válvula con la que se ha de emplear. En los circuitos de potencia las tensiones inducidas suelen ser casi sinusoidales, según se ve en el apartado 7 a continuación. Sin embargo, si por cualquier razón la tensión inducida no fuera sinusoidal, la forma de onda de la tensión puede afectar sensiblemente a la pérdida en el núcleo.

* Véase el apartado 9c.

7. TENSIÓN INDUCIDA POR UN FLUJO SINUSOIDAL

Según se indicó en el apartado 5, el cálculo del funcionamiento del circuito de la figura 2 es difícil cuando deban tenerse en cuenta tanto la caída óhmica como la fuerza contraelectromotriz de la ecuación (7). En el apartado 6, la solución aproximada venía dada por la condición límite de que la fuerza contraelectromotriz es despreciable frente a la caída óhmica. Ahora vamos a obtener una solución aproximada sencilla para el caso límite en que la caída óhmica sea despreciable frente a la tensión inducida. La solución es de gran importancia para determinar el diseño y funcionamiento de las bobinas con núcleo de hierro y de los transformadores *.

Las impedancias de las líneas de transmisión y de los alimentadores de un sistema de potencia suelen ser tan bajas que las caídas de tensión debidas a las corrientes de excitación de los transformadores conectados representan una pequeña fracción por ciento de la tensión del generador. Luego el problema de determinar las características en vacío de un transformador de potencia suele reducirse al representado en la figura 7, donde la tensión v aplicada a los terminales del devanado excitado es prácticamente independiente de la corriente de excitación i_φ . La ecuación de las tensiones es

$$v = Ri_\varphi + e, \quad (12)$$

donde R es la resistencia efectiva del devanado excitador y e es la fuerza contraelectromotriz inducida.

La resistencia de un devanado de transformador usual es tan baja que la caída óhmica debida a la corriente de excitación es despreciable frente a la tensión entre los terminales. En un transformador de potencia que funcione en vacío, con tensión normal y frecuencia normal, el valor eficaz de la caída óhmica en el devanado excitado suele ser inferior al 0,1 % de la tensión eficaz aplicada. En tales condiciones se puede despreciar la caída óhmica e igualar la tensión entre terminales v a la fuerza contraelectromotriz e inducida por el flujo variable φ ; así,

$$v = e = N \frac{d\varphi}{dt}, \quad (13)$$

donde N es el número de espiras del devanado excitado. El flujo debe ajustarse por sí mismo de manera que la fuerza contraelectromotriz generada por la variación

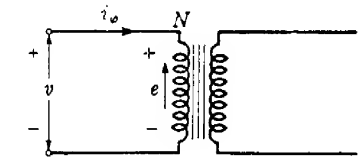


FIG. 7. Transformador con un devanado excitado por un generador de tensión sinusoidal.

* Cuando a un transformador con núcleo de hierro se aplica bruscamente una tensión sinusoidal, el valor de pico instantáneo de la inducción magnética transitoria puede ser alrededor del doble de su valor de pico en su estado estacionario normal; y a causa de la saturación que en tal instante tiene el núcleo, el valor de pico correspondiente de la corriente de excitación transitoria puede ser varias veces mayor que su intensidad en el estado estacionario normal. Para estudios de estos transitorios véase L. F. BLUME, editor, *Transformer Engineering* (New York: John Wiley & Sons, 1938), 23-36. El siguiente estudio se limita a las condiciones de régimen estacionario.

de flujo sea casi igual a la tensión aplicada, y en consecuencia, la corriente de excitación deberá ajustarse por sí misma para crear este flujo. Si la forma de onda de la tensión aplicada es sinusoidal, la forma de onda del flujo también será casi sinusoidal. En los transformadores de potencia, esta condición suele cumplirse muy aproximadamente. Si,

$$\varphi = \phi_{max} \sin \omega t, \quad (14)$$

derivando,

$$e = \omega N \phi_{max} \cos \omega t. \quad (15)$$

La tensión inducida adelanta al flujo en 90° , según se indica en la figura 8a, en la cual e es la fuerza electromotriz o elevación de potencial en el sentido del tornillo inverso respecto al flujo positivo, tal como se explicó en el apartado 4. Si se repre-

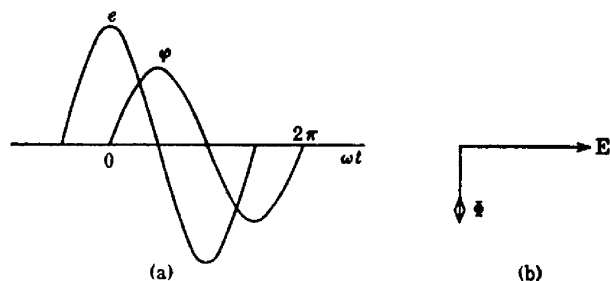


FIG. 8. Relaciones de fase entre el flujo y la tensión inducida.

sentan la tensión y el flujo por los vectores E y Φ , el diagrama vectorial será el de la figura 8b.

Si es f la frecuencia, la relación entre los valores máximos de la tensión y del flujo es:

$$E_{max} = \omega N \phi_{max} = 2\pi f N \phi_{max}. \quad (16)$$

El valor eficaz E de la tensión generada es:

$$E = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} f N \phi_{max} \quad (17)$$

o sea,

$$E = 4,44 f N \phi_{max}. \quad (18)$$

Esta ecuación sirve para cualquier sistema coherente de unidades. Luego, si se expresa ϕ_{max} en weber, E se obtendrá en volt; Si se expresa ϕ_{max} en maxwell, E se obtendrá en uem de potencial y si se quisiera tener en volt, habría que multiplicar el segundo miembro de esta ecuación por 10^{-8} .

► La ecuación (18) es una de las relaciones más importantes de la teoría de todos los aparatos electromagnéticos de corriente alterna, puesto que relaciona el diseño del devanado (N espiras) con la carga magnética del núcleo (ϕ_{max}) cuando se espe-

cifican las condiciones eléctricas de funcionamiento (E y f). Constituye la relación general entre el *valor eficaz* de la tensión generada por un flujo variable sinusoidalmente y el *valor máximo* de dicho flujo. ◀

En los diversos casos en que es despreciable la caída óhmica, la tensión generada por el flujo es casi igual a la tensión entre terminales. Por tanto, cuando se aplica una tensión sinusoidal a los terminales de un devanado, el valor máximo del flujo en el núcleo viene determinado por el valor eficaz y la frecuencia de la tensión aplicada, y el número de espiras del devanado. Es decir, de la ecuación (18).

$$\phi_{max} = \frac{E}{4,44 f N}. \quad (19)$$

Cuando E esté expresada en volt, ϕ_{max} vendrá dado en weber. Si se tiene E en volt y se quiere tener ϕ_{max} en maxwell, multiplíquese el segundo miembro de la ecuación (19) por 10^8 .

► El valor del flujo es *independiente* de las dimensiones y calidad del núcleo magnético mientras la caída óhmica sea despreciable a la tensión entre los terminales. Las dimensiones y calidad del núcleo determinan, no obstante, la intensidad de la corriente de excitación requerida para crear el flujo en el núcleo. ◀

8. FORMA DE ONDA DE LA CORRIENTE DE EXCITACIÓN PARA FLUJO SINUSOIDAL

Debido a la forma peculiar del ciclo de histéresis de la mayoría de los materiales magnéticos para núcleos, la forma de onda de la corriente de excitación no es sinusoidal cuando el flujo varía sinusoidalmente. En la figura 9 pueden verse oscilogramas de la tensión sinusoidal e inducida en el secundario en circuito abierto, y de la corriente de excitación i_φ no sinusoidal del primario, cuando se excita con una tensión sinusoidal el transformador de la figura 10. Como este transformador tiene el mismo número de espiras en el primario que en el secundario, y como en el funcionamiento en vacío es despreciable la fuga magnética, la tensión e medida en el secundario en circuito abierto es casi igual a la tensión inducida en el primario. Esta tensión inducida es casi igual a la aplicada.

Aun cuando frecuentemente carece de importancia, en numerosos problemas deberá considerarse la forma de onda de la corriente de excitación. Por ejemplo, la distorsión introducida por la corriente de excitación es importante en los transformadores para comunicaciones. Los armónicos de la corriente de excitación de los transformadores de potencia suelen tener un efecto importante sobre la interferencia inductiva entre las líneas de potencia adyacentes y los circuitos de comunicaciones. A veces, las características de un banco de transformadores polifásicos se ven marcadamente afectadas por los armónicos de la corriente de excitación. Dichos armónicos pueden exagerarse en ocasiones a causa de efectos de resonancia con las capacidades de las líneas de transmisión o de los cables.

En la figura 11a puede verse la sinusoide de la tensión inducida e , dibujada a

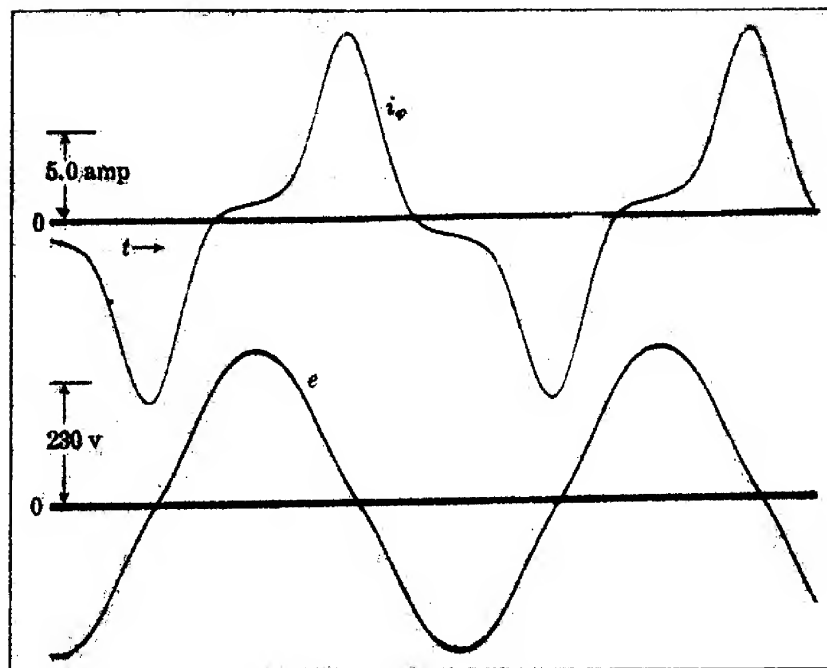
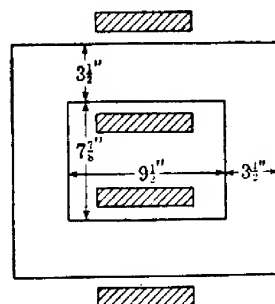


FIG. 9. Oscilograma de la corriente de excitación del transformador de la figura 10 con tensión inducida eficaz de 200 V a una frecuencia de 60 Hz.

partir del oscilograma de la figura 9, y la onda de flujo ϕ correspondiente, retrasada respecto a la tensión inducida en 90° , como en la figura 8. De la ecuación (19) y de



Altura pila = $3\frac{1}{2}$ pulg.
Factor de apilamiento = 0,90
 $N_1 = N_2 = 84$ espiras

FIG. 10. Núcleo de un pequeño transformador experimental.

los datos de las figuras 9 y 10, resulta que la amplitud de esta onda de flujo es:

$$\begin{aligned}\phi_{max} &= \frac{200}{4,44 \times 60 \times 84} \\ &= 0,00895 \text{ weber u } 895\,000 \text{ maxwells.}\end{aligned}\quad (20)$$

De las dimensiones del núcleo y de su factor de apilamiento de 0,90, deducimos,

$$B_{max} = \frac{\phi_{max}}{\text{área total}} \quad (21)$$

$$= \frac{895\,000}{3,50 \times 3,50 \times 0,90} = 81\,200 \text{ líneas/pulg}^2. \quad (22)$$

$$= \frac{81\,200}{6,45} = 12\,600 \text{ G, o sea } 1,26 \text{ T.} \quad (23)$$

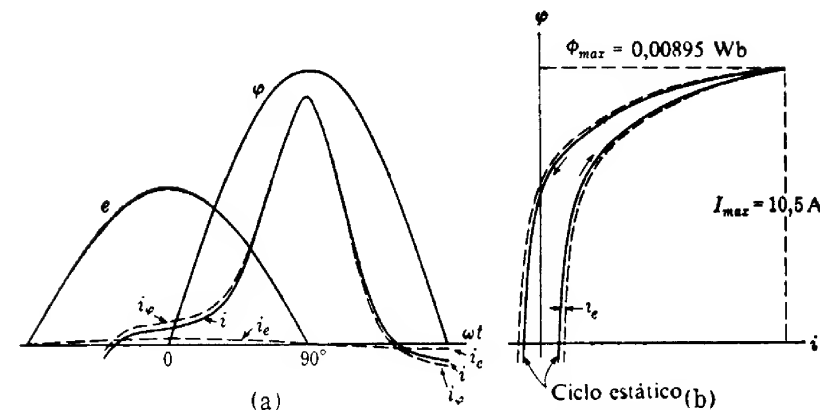


FIG. 11. Construcción gráfica para la determinación de la corriente de excitación del transformador de la figura 10.

Esta es aproximadamente la inducción magnética corrientemente empleada en los transformadores de potencia de 50-60 Hz. La curva continua titulada *ciclo estático* en la figura 11b es la mitad de un ciclo simétrico flujo-intensidad de corriente correspondiente a este mismo flujo máximo, determinado por medio de un galvanómetro balístico. De este ciclo y de la variación conocida del flujo con el tiempo, puede determinarse la variación correspondiente de la intensidad i con el tiempo indicada en la figura 11a, de manera análoga a la ilustrada en la figura 6. Por simetría, la forma de onda de los hemiciclos negativos es igual a la del positivo indicado. Si se desprecia el efecto magnético de las corrientes de Foucault, la intensidad i es la de la corriente de excitación.

Puede tenerse en cuenta, en forma aproximada, el efecto de las corrientes de Foucault, de la manera siguiente. Como en el estudio realizado en el apartado 2 del capítulo V, las corrientes de Foucault son proporcionales a la variación en unidad de tiempo de la inducción magnética y por tanto de forma de onda sinusoidal y proporcionales en cada instante a la fuerza electromotriz inducida en el devanado excitador. El sentido de las corrientes de Foucault es el que se opone a toda fuerza magnetomotriz aplicada exteriormente que tienda a hacer variar el flujo; es decir; mientras la derivada respecto al tiempo del flujo sea positiva, las corrientes de Foucault circularán por las láminas en el sentido del tornillo inverso respecto al sentido positivo del flujo. Por tanto, habrá que suministrar, mediante el devanado, una componente sinusoidal de la fuerza magnetomotriz en el sentido positivo o del tornillo

directo, a fin de compensar el efecto de las corrientes de Foucault y permitir que la variación de flujo permanezca inalterada al valor que induce en el devanado la fuerza contraelectromotriz necesaria. Esta componente de la corriente de excitación está en fase con la fuerza contraelectromotriz e , tal como indica la curva de trazos representativa de la onda sinusoidal i_e de la figura 11a. La corriente i_e suministra la potencia absorbida por las pérdidas por corrientes de Foucault en el núcleo. Así, pues, la intensidad eficaz I_e de la componente de la corriente de excitación correspondiente a las corrientes de Foucault será:

$$I_e = \frac{P_e}{E}, \quad (24)$$

donde E es el valor eficaz de la fuerza contraelectromotriz y P_e es la pérdida por corrientes de Foucault. Esta puede determinarse a partir de los valores medidos de la pérdida en el núcleo a distintas frecuencias y a inducción magnética constante, tal como se describió en el apartado 7 del capítulo V. De los datos así obtenidos, la pérdida por corriente de Foucault en el transformador al que corresponden las figuras 9, 10 y 11, resulta ser de 36 W cuando la tensión inducida es de 200 V y la frecuencia de 60 Hz, como en la figura 11. Luego, en este ejemplo,

$$I_e = \frac{36}{200} = 1,8 \text{ A.} \quad (25)$$

La amplitud de la componente sinusoidal i_e de la corriente de excitación debida a las corrientes de Foucault de la figura 11a será, por tanto, $\sqrt{2}I_e$, o sea, 0,25 A. La intensidad resultante de la corriente de excitación i_φ es:

$$i_\varphi = i + i_e \quad (26)$$

y está representada por la curva de trazos de la figura 11a. En la figura 12 puede verse una comparación de la corriente de excitación calculada con el oscilograma de la figura 9. Concuerdan dentro de los errores experimentales tolerables.

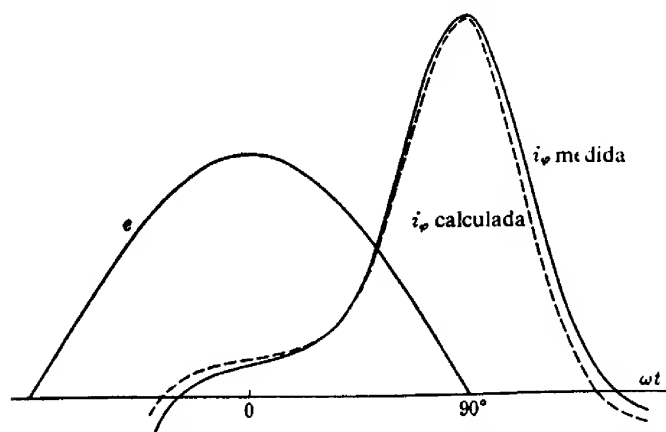


Fig. 12. Comparación de las ondas calculadas y medida de la corriente de excitación.

Es interesante el efecto de las corrientes de Foucault sobre el ciclo flujo-intensidad. Como las corrientes de Foucault en el núcleo se oponen a la variación de flujo, la componente i_e de la corriente de excitación que compensa sus efectos tendrá un sentido tal que ayude a la variación de flujo. Luego, si a las abscisas i del ciclo estático de la figura 11b se añade esta componente compensadora proporcional a $d\varphi/dt$, se obtendrá un ciclo dinámico más ancho, indicado por la línea de trazos de la figura 11b. El área del ciclo estático es proporcional a la pérdida por histeresis por ciclo, mientras que el área del ciclo dinámico es proporcional a la pérdida total en el núcleo por ciclo.

9. PROPIEDADES GENERALES DE LAS SERIES DE FOURIER

Como la corriente de excitación correspondiente al régimen permanente es una función periódica y puede desarrollarse en serie de Fourier, vamos a estudiar algunas cuestiones de interés general en el análisis de Fourier de corrientes y tensiones no sinusoidales. El tratamiento detallado de los métodos de análisis de Fourier puede verse en los textos de Análisis Matemático³.

Toda función periódica uniforme puede expresarse mediante una serie de Fourier que contiene un término constante y un número infinito de términos seno y coseno cuyas frecuencias son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. Luego, si $f(t)$ es función periódica del tiempo,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots, \quad (27)$$

donde ω es la pulsación de la función. Las a 's y las b 's son coeficientes constantes definidos por las integrales

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(t) \cos n\omega t \, dt \quad (28)$$

$$= \text{doble del valor medio de } f(t) \cos n\omega t \quad (29)$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(t) \sin n\omega t \, dt \quad (30)$$

$$= \text{doble del valor medio de } f(t) \sin n\omega t \quad (31)$$

En estas ecuaciones, n indica el orden del armónico y los valores medios se calculan para un período completo. La constante a_0 es el valor de a_n cuando n se anula; es decir,

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(t) \, dt, \quad (32)$$

y por tanto el término constante $a_0/2$ de la ecuación (27) es:

$$\frac{a_0}{2} = \text{valor medio de } f(t). \quad (33)$$

³ Véase, por ejemplo, J. REY PASTOR, P. PÍ CALLEJA, C. A. TREJO: *Análisis Matemático*, tomo III, cap. XXV, Kapelusz, Buenos Aires, 1961.

Puede obtenerse otra forma de la serie de Fourier agrupando los términos seno y coseno de igual frecuencia; así,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + c_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + c_2 \cos(2\omega t + \alpha_2) + \dots \quad \blacktriangleright (34)$$

donde,

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (35)$$

$$a_n = -\arctan \left(\frac{b_n}{a_n} \right). \quad (36)$$

Las series de Fourier para las funciones del tiempo que trata este libro suelen converger rápidamente, por lo que bastarán pocos términos para representar la función con precisión técnica.

Si se da la función $f(t)$ en forma analítica, pueden determinarse los coeficientes de la serie mediante las ecuaciones (28) a (33). Cuando la función $f(t)$ se da en forma gráfica, existen muchos métodos de determinación de los coeficientes⁴. Aun cuando el análisis cuantitativo exige la determinación de los valores numéricos de los coeficientes, un estudio relativamente simple de la forma de onda de $f(t)$ revela algunos hechos útiles referentes al carácter general de la serie de Fourier que representa a la función del tiempo. Pasamos a estudiar algunas de estas cuestiones generales.

9a. *Término constante.* El término constante $a_0/2$ de las ecuaciones (27) y (34) es el valor medio de $f(t)$, y si $f(t)$ representa una intensidad o una tensión, $a_0/2$ es su componente continua. Una componente continua de la corriente puede crearse mediante una fuerza electromotriz continua, o por una acción de rectificación en un circuito cualquiera cuya característica tensión-intensidad para un sentido de la corriente no sea igual a la característica para el sentido contrario cambiada de signo.

► En los problemas de circuitos eléctricos, el examen de las posibles causas de una componente continua suele ser suficiente, por tanto, para determinar la presencia de una componente constante en $f(t)$. Si no existe ninguna componente de corriente continua, las áreas de las partes positiva y negativa de cada ciclo son iguales.◀

9b. *Funciones pares e impares* *. Las funciones coseno son funciones pares de sus variables; es decir,

$$\cos(-x) = \cos x. \quad (39)$$

⁴ Véase, por ejemplo, *The Mathematics of Circuit Analysis*, cap. VII. The Technology Press, Massachusetts Institute of Technology.

* Se define una función *par* como aquella que al cambiar solamente el signo de la variable independiente no varía el valor de la función. Una función *impar* es aquella en que al cambiar solamente el signo de la variable independiente la función invierte su signo sin variar su valor absoluto. Así, si la función $f(t)$ cumple con la propiedad

$$f(-t) = f(t) \quad (37)$$

se dice que es función *par*. Pero si

$$f(-t) = -f(t) \quad (38)$$

la función es *impar*.

Observe el lector la diferencia entre los significados de los términos «par» e «impar» cuando se emplean para describir funciones que tienen las formas de simetría respecto al origen dadas por las ecuaciones (37) y (38), y los mismos términos cuando se aplican al orden de los armónicos. Por ejemplo, el tercer armónico coseno $a_3 \cos 3\omega t$ de la ecuación (27) es una *función par*, si bien es un armónico impar de $f(t)$.

Las funciones seno, en cambio, son impares; es decir,

$$\sin(-x) = -\sin x. \quad (40)$$

La parte coseno de la serie de la ecuación (27) es, pues, una función par, y la parte seno, impar.

► Por tanto, si la función $f(t)$ es impar, su serie de Fourier (Ec. 27) contendrá solamente componentes seno; pero si $f(t)$ es función par, no habrán componentes seno. Si $f(t)$ no es función par ni impar, existirán todos los términos de la ecuación (27).◀

Por ejemplo, consideremos la onda triangular de la figura 13. Si se toma el origen en 0, esta onda triangular es función impar y su serie de Fourier sólo contendrá términos seno. En cambio, si se toma 0' como origen, la onda representará una función par y en su desarrollo en serie de Fourier sólo habrán términos coseno. No obstante, el origen de la figura 9 no puede tomarse de manera que haga función par o impar a la corriente de excitación, por lo que la serie de Fourier dada por la ecuación (27) para la corriente de excitación deberá tener términos seno y términos coseno.

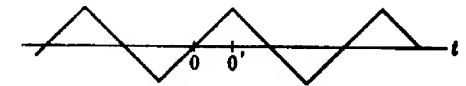


FIG. 13. Onda en dientes de sierra.

9c. *Armónicos pares e impares.* Frecuentemente, la función periódica satisface la relación

$$f\left(t \pm \frac{T}{2}\right) = -f(t), \quad (41)$$

donde T es el período de la función y es el intervalo de tiempo entre valores iguales sucesivos de la función. La ecuación (41) establece que la sucesión de valores de la función durante un semiperíodo cualquiera es igual, cambiados de signo, a la de los que se encuentran en el semiperíodo inmediato anterior o posterior; es decir, la forma de onda de los hemiciclos positivos y negativos es la misma, salvo el signo.

► La serie de Fourier para una función de esta clase contendrá solamente armónicos impares—hecho que puede probarse viendo que los armónicos impares satisfacen la ecuación (41) y los pares no, por lo que no podrán existir si la función en cuestión satisface a la ecuación (41).◀

Consideremos el n -simo término coseno de la ecuación (27). El valor de este armónico para $t \pm (T/2)$ es:

$$a_n \cos \left[n\omega \left(t \pm \frac{T}{2} \right) \right] = a_n \cos \left(n\omega t \pm n\omega \frac{T}{2} \right) \quad (42)$$

Pero la relación entre el período y la frecuencia es:

$$T = \frac{1}{f}, \quad (43)$$

de donde,

$$n\omega \frac{T}{2} = \frac{n\omega}{2f} = \frac{n2\pi f}{2f} = n\pi. \quad (44)$$

Por tanto,

$$a_n \cos \left[n\omega \left(t \pm \frac{T}{2} \right) \right] = a_n \cos (n\omega t \pm n\pi). \quad (45)$$

Si n es impar, el ángulo de fase $n\pi$ es igual a un número de semiperíodos, y, por tanto,

$$a_n \cos (n\omega t \pm n\pi) = -a_n \cos n\omega t, \quad (46)$$

de donde,

$$a_n \cos \left[n\omega \left(t \pm \frac{T}{2} \right) \right] = -a_n \cos n\omega t. \quad (47)$$

Análogamente, para el n -simo término seno, cuando n es impar,

$$b_n \sin \left[n\omega \left(t \pm \frac{T}{2} \right) \right] = -b_n \sin n\omega t. \quad (48)$$

Luego, cuando n es impar, los términos seno y coseno satisfacen a la ecuación (41), y por tanto el desarrollo en serie de Fourier de una función que cumple esta condición podrá contener armónicos impares.

En cambio, si n es par, el ángulo de fase $n\pi$ de la ecuación (45) equivale a un número entero de períodos, y, por tanto,

$$a_n \cos (n\omega t \pm n\pi) = +a_n \cos n\omega t, \quad (49)$$

o sea,

$$a_n \cos \left[n\omega \left(t \pm \frac{T}{2} \right) \right] = +a_n \cos n\omega t. \quad (50)$$

Análogamente, cuando n es par,

$$b_n \sin \left[n\omega \left(t \pm \frac{T}{2} \right) \right] = +b_n \sin n\omega t. \quad (51)$$

Luego, en el desarrollo en serie de Fourier de una función que satisfaga la ecuación (41) no podrán existir armónicos impares, ya que no satisfacen a dicha ecuación.

Los oscilogramas de las figuras 4 y 9 constituyen ejemplos de ondas cuyos hemisiclos positivos y negativos son iguales salvo el signo. En consecuencia, estas funciones tienen la propiedad expresada en la ecuación (41). Las series de Fourier para estas corrientes y tensiones sólo contienen armónicos impares. Como las ondas no son funciones pares ni impares, deberán existir tanto armónicos seno como coseno.

9d. *Potencia.* La expresión de la potencia instantánea absorbida por un elemento de circuito a lo largo del cual cae el potencial una cantidad $v(t)$ en el sentido de la intensidad de la corriente $i(t)$, es:

$$p(t) = v(t)i(t). \quad \blacktriangleright (52)$$

Para un intervalo de tiempo cualquiera Δt , la potencia media \bar{P} es:

$$\bar{P} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} v(t)i(t) dt. \quad \blacktriangleright (53)$$

Estas ecuaciones son expresiones totalmente generales y pueden calcularse explícitamente cuando se conocen las funciones del tiempo $v(t)$ e $i(t)$. En régimen permanente, la potencia instantánea $p(t)$ es función periódica y el valor medio de la ecuación (53) puede tomarse para un número entero cualquiera de períodos de la potencia instantánea.

Cuando tensión e intensidad son funciones sinusoidales del tiempo y tienen la misma frecuencia, la potencia instantánea es la suma de una componente constante más otra sinusoidal cuya frecuencia es el doble de la de la corriente y tensión*. El término de frecuencia doble representa una oscilación de la potencia, pero la potencia media debida a esta componente es nula. La componente constante es la potencia media y su valor es:

$$\bar{P} = VI \cos \theta, \quad \blacktriangleright (54)$$

donde V e I son los valores eficaces de la tensión y la intensidad variables sinusoidalmente y θ es la diferencia de fase entre ellas.

Frecuentemente hay que determinar la potencia cuando la intensidad y la tensión no son funciones sinusoidales del tiempo. En el estudio siguiente se supone que la intensidad y la tensión son ambas funciones periódicas del mismo período. Podrán desarrollarse en serie de Fourier. En el estudio que realizamos a continuación resulta conveniente la forma de serie de Fourier dada por la ecuación (34); así,

$$v(t) = V_{cc} + \sqrt{2}V_1 \cos(\omega t + \psi_1) + \sqrt{2}V_2 \cos(2\omega t + \psi_2) + \dots \quad (55)$$

$$i(t) = I_{cc} + \sqrt{2}I_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + \sqrt{2}I_2 \cos(2\omega t + \alpha_2) + \dots, \quad (56)$$

donde

V_{cc}, I_{cc} son las componentes continuas,
 $V_1, V_2, \dots, I_1, I_2, \dots$ son los valores eficaces de los armónicos.

Según la ecuación (35), el valor eficaz de cada armónico es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus componentes seno y coseno. Estas ecuaciones pueden expresarse en forma más compacta de la manera siguiente:

$$v(t) = V_{cc} + \sum_k \sqrt{2}V_k \cos(k\omega t + \psi_k) \quad (57)$$

$$i(t) = I_{cc} + \sum_n \sqrt{2}I_n \cos(n\omega t + \alpha_n). \quad (58)$$

La potencia instantánea es:

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t)i(t) \\ &= V_{cc}I_{cc} + V_{cc} \sum_n \sqrt{2}I_n \cos(n\omega t + \alpha_n) \\ &\quad + I_{cc} \sum_k \sqrt{2}V_k \cos(k\omega t + \psi_k) \\ &\quad + \left[\sum_k \sqrt{2}V_k \cos(k\omega t + \psi_k) \right] \left[\sum_n \sqrt{2}I_n \cos(n\omega t + \alpha_n) \right]. \end{aligned} \quad (59)$$

* Véase E. A. GUILLEMIN: *Introducción a la teoría de los circuitos*, cap. VII, págs. 321-322. Editorial Reverté, Barcelona, 1959.

Cuando se desarrolla el último término del segundo miembro de la ecuación (59), un término general es:

$$\begin{aligned} & [\sqrt{2} V_k \cos(k\omega t + \psi_k)] [\sqrt{2} I_n \cos(n\omega t + a_n)] \\ & = 2 V_k I_n \cos(k\omega t + \psi_k) \cos(n\omega t + a_n). \end{aligned} \quad (60)$$

Aplicando la relación trigonométrica,

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)], \quad (61)$$

la ecuación (60) se convierte en,

$$\begin{aligned} & [\sqrt{2} V_k \cos(k\omega t + \psi_k)] [\sqrt{2} I_n \cos(n\omega t + a_n)] \\ & = V_k I_n \cos[(k + n)\omega t + \psi_k + a_n] \\ & + V_k I_n \cos[(k - n)\omega t + \psi_k - a_n]. \end{aligned} \quad (62)$$

Así, un término general del desarrollo del último término del segundo miembro de la ecuación (59) se puede expresar como suma de dos componentes coseno cuyas frecuencias son, respectivamente, la suma y la diferencia de las frecuencias de los armónicos de la tensión y de la intensidad. El último término del segundo miembro de la ecuación (59) es la suma de todos esos términos.

► Por tanto, la potencia instantánea $p(t)$ contiene armónicos cuyas frecuencias son las sumas y diferencias de las frecuencias de todos los armónicos de la tensión y la intensidad.◀

La potencia media \bar{P} es el valor medio de la potencia instantánea a lo largo de un ciclo completo. En la ecuación (59), el primer término es constante, y por tanto su valor medio es $V_{cc} I_{cc}$. El segundo y tercer términos representan armónicos cuyas frecuencias son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. Estos términos representan oscilaciones armónicas de la potencia originadas por la interacción de componentes alternas y continuas, pero el valor medio de cada una de esas componentes para un número entero de ciclos es nulo. La ecuación (62) indica que cuando k no es igual a n , la potencia resultante del producto de una tensión armónica de una frecuencia por una intensidad armónica de frecuencia diferente de la anterior —como, por ejemplo, el último término de la ecuación (59)— es la suma de dos componentes alternas y por tanto sus valores medios son nulos. En cambio, cuando k y n son iguales, el último término de la ecuación (62) se convierte en

$$V_n I_n \cos(\psi_n - a_n) = V_n I_n \cos \theta_n, \quad \blacktriangleright (63)$$

donde $\theta_n = \psi_n - a_n$ es la diferencia de fase entre los armónicos n -simos de la tensión y la intensidad. El valor medio del último término de la ecuación (59) es, pues, nulo para armónicos de tensión e intensidad de frecuencias diferentes, pero es:

$$\sum_n V_n I_n \cos \theta_n \quad (63')$$

para todos los armónicos de tensión e intensidad de la misma frecuencia. En consecuencia, la potencia media es:

$$\bar{P} = V_{cc} I_{cc} + \sum_n V_n I_n \cos \theta_n. \quad \blacktriangleright (64)$$

► La potencia media, pues, es igual a la suma de las potencias debidas a las componentes de igual frecuencia de tensión e intensidad. La potencia media debida a las componentes continuas es $V_{cc} I_{cc}$, y la debida a cada armónico es $V_n I_n \cos \theta_n$, igual que en el caso de tensiones e intensidades sinusoidales (Ec. 54). Una tensión de una frecuencia y una intensidad de frecuencia diferente originan componentes alternas de potencia instantánea, pero la potencia media resultante de ellas es cero.◀

9e. *Valores eficaces* ⁶. Por definición, la intensidad eficaz de una corriente variable periódicamente de intensidad $i(t)$ es la raíz cuadrada del valor medio de $[i(t)]^2$. Expresado en forma de ecuación, la intensidad eficaz I es:

$$I = \sqrt{\text{valor medio de } [i(t)]^2} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [i(t)]^2 dt}, \quad \blacktriangleright (65)$$

donde T es el período de $i(t)$. Análogamente, el valor eficaz V (o tensión eficaz) de una tensión $v(t)$ variable periódicamente con el tiempo, es:

$$V = \sqrt{\text{valor medio de } [v(t)]^2} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [v(t)]^2 dt}. \quad \blacktriangleright (66)$$

► Obsérvese que el valor medio del cuadrado de la intensidad no es lo mismo que el cuadrado de la intensidad media.◀

Las ecuaciones (65) y (66) son expresiones generales de los valores eficaces. Cuando la tensión o la intensidad es función sinusoidal del tiempo, estas ecuaciones dan el conocido resultado de que el valor eficaz es igual a la amplitud dividida por $\sqrt{2}$.

A menudo es necesario determinar el valor eficaz de una tensión o intensidad no expresada en forma de serie de Fourier. Por ejemplo, sea,

$$i(t) = I_{cc} + \sum_n \sqrt{2} I_n \cos(n\omega t + a_n) \quad (67)$$

donde I_{cc} es la componente continua e I_n es el valor eficaz del armónico n -simo. El cuadrado de $i(t)$ es

$$\begin{aligned} [i(t)]^2 &= I_{cc}^2 + 2 I_{cc} \sum_n \sqrt{2} I_n \cos(n\omega t + a_n) \\ &+ [\sum_n \sqrt{2} I_n \cos(n\omega t + a_n)]^2. \end{aligned} \quad (68)$$

Ejemplos interesantes de cálculo de valores eficaces pueden verse en W. H. TIMBIE y F. J. RICKER: *Fundamentos de Electricidad para radiotécnicos*. Editorial Reverté, Barcelona, 1961.

El valor medio del primer término de la ecuación (68) es I_{cc}^2 . El segundo término representa un cierto número de componentes alternas cuyo valor medio es nulo. El último término representa los productos cruzados de todos los armónicos. Por ejemplo, un término general del desarrollo del último término de la ecuación (68) es el producto de los armónicos n -ésimo y k -ésimo de la intensidad y, al igual que en las ecuaciones (60) a (62), este término puede expresarse en la forma

$$\begin{aligned} & [\sqrt{2}I_k \cos(k\omega t + \alpha_k)] [\sqrt{2}I_n \cos(n\omega t + \alpha_n)] \\ &= I_k I_n \cos[(k+n)\omega t + \alpha_k + \alpha_n] \\ &+ I_k I_n \cos[(k-n)\omega t + \alpha_k - \alpha_n]. \end{aligned} \quad (69)$$

El último término de la ecuación (68) es la suma de todos esos términos. La ecuación (69) indica que los productos cruzados de armónicos de frecuencias diferentes (cuando k es distinto de n) dan origen a componentes alternas de valor medio nulo. En cambio, cuando k y n son iguales, el último término de la ecuación (69) es I_n^2 , y por tanto el valor medio del último término de la ecuación (69) es la suma de los cuadrados de los valores eficaces de todos los armónicos. En consecuencia, el valor eficaz I es:

$$I = \sqrt{I_{cc}^2 + \sum_n I_n^2}. \quad (70)$$

► El valor eficaz de una tensión o intensidad periódica expresada en forma de serie de Fourier es, pues, igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los valores eficaces de todos sus armónicos.◀

10. ANÁLISIS DE FOURIER DE LA CORRIENTE DE EXCITACIÓN PARA FLUJO SINUSOIDAL

Debido a la forma peculiar del ciclo de histeresis, la corriente de excitación que dé lugar a un flujo sinusoidal tendrá una forma de onda de picos asimétricos que puede obtenerse a partir del ciclo flujo-intensidad correspondiente al núcleo por medio de la construcción gráfica indicada en la figura 11. Esta curva calculada es la i_φ de trazos de la figura 11, y la figura 12 muestra que la intensidad de excitación calculada concuerda satisfactoriamente con la forma de onda real determinada por el oscilograma de la figura 9. A causa de su forma de onda particular, la corriente de excitación podrá expresarse convenientemente en forma de serie de Fourier.

La variación con el tiempo de la corriente de excitación consta de una componente fundamental y una serie de armónicos impares. No existen armónicos pares cuando el ciclo de histeresis es simétrico, ya que los hemisiclos positivo y negativo son iguales salvo el signo *. Obsérvese que la corriente de excitación no es función par ni impar, y en consecuencia, cuando se exprese en forma de serie de Fourier —como en la ecuación (27)— existen términos seno y términos coseno a la vez †. Así, elegido el origen, como en la figura 11a, de manera que la variación de flujo sea una función seno,

$$\varphi = \phi_{max} \sin \omega t, \quad (71)$$

* Véase el apartado 9c.

† Véase el apartado 9b.

la intensidad de la corriente de excitación será:

$$\begin{aligned} i_\varphi = \sqrt{2} [& I_1' \sin \omega t + I_3' \sin 3\omega t + I_5' \sin 5\omega t + \dots \\ & + I_1'' \cos \omega t + I_3'' \cos 3\omega t + I_5'' \cos 5\omega t + \dots]. \end{aligned} \quad (72)$$

Se ha introducido la $\sqrt{2}$ en la ecuación (72) a fin de que las I sean las intensidades eficaces de las corrientes componentes. Cuando se dé en forma gráfica la variación con el tiempo de la corriente de excitación, se podrán hallar por métodos gráficos los valores numéricos de los armónicos ⁷. En la tabla siguiente se consignan las intensidades eficaces, en ampere, de los armónicos de la corriente de excitación i_φ calculada de la figura 11.

Componentes seno	Componentes coseno
$I_1' = +4,50$	$I_1'' = +0,87$
$I_3' = -2,10$	$I_3'' = -0,15$
$I_5' = +0,50$	$I_5'' = +0,05$
$I_7' = -0,10$	$I_7'' = 0$

El armónico fundamental consta de una componente seno,

$$i_1' = \sqrt{2}I_1' \sin \omega t \quad (73)$$

en fase con el flujo, y una componente coseno,

$$i_1'' = \sqrt{2}I_1'' \cos \omega t \quad (74)$$

en fase con la fuerza contraelectromotriz $\sqrt{2}E \cos \omega t$. La potencia media P_c absorbida por el núcleo es:

$$P_c = EI_1'', \quad (75)$$

puesto que I_1'' tiene igual frecuencia y fase que la tensión inducida E . En lo sucesivo, a esta componente I_1'' que interpreta por sí sola la pérdida total P_c en el núcleo, se designará por I_c y recibe el nombre de *componente de la pérdida en el núcleo* de la corriente de excitación o, más brevemente, *corriente de pérdida en el núcleo*. Es decir,

$$I_c = I_1''. \quad (76)$$

Luego, de la ecuación 75

$$I_c = \frac{P_c}{E}. \quad (77)$$

⁷ Puede verse un estudio de los métodos gráficos para la determinación de los armónicos en *The Mathematics of Circuit Analysis*, cap. VII. The Technology Press, Massachusetts Institute of Technology. Y un método particularmente conveniente para el análisis de la corriente de excitación en el artículo de J. ALBERT WOOD, JR. *A Graphical Method of Wave Analysis*, Cornell University Engineering Experiment Station, Boletín N.º 22 (julio 1936).

La componente seno fundamental I'_1 no contribuye a la potencia media absorbida por el núcleo, ya que está en cuadratura con la tensión inducida. Ninguna de las restantes componentes de la intensidad contribuye a la potencia media absorbida por el núcleo, por ser sus frecuencias diferentes de la de la tensión inducida*.

Representando gráficamente i_ϕ en función del tiempo y determinando a partir de esta curva el valor medio de i_ϕ , tendremos I_ϕ , cuadrado de la intensidad eficaz I_ϕ de la corriente de excitación i_ϕ . También puede expresarse la intensidad eficaz en función de los armónicos en la forma,

$$I_\phi = \sqrt{(I'_1)^2 + I_c^2 + (I'_3)^2 + (I'_5)^2 + \dots} \quad (78)^\dagger$$

Si se desprecian los armónicos posteriores al séptimo, la intensidad eficaz calculada de la corriente i_ϕ de la figura 11a es:

$$I_\phi = 5,07 \text{ A.} \quad (79)$$

El valor eficaz medido de la corriente de excitación es 5,35 A.

La forma de onda de la corriente de excitación presenta picos muy agudos y por tanto la intensidad eficaz no es igual a la máxima dividida por $\sqrt{2}$, sino que es mucho menor. Para la corriente de la figura 11a,

$$\frac{I_{\phi(ef)}}{I_{\phi(max)}} = \frac{5,07}{10,5} = 0,484. \quad (80)$$

El armónico fundamental resultante $I_{\phi 1}$ de la corriente de excitación es:

$$I_{\phi 1} = \sqrt{I_c^2 + (I'_1)^2} \quad (81)$$

$$= 4,59 \text{ A.} \quad (82)$$

que constituye el 90,5 % de la intensidad de la corriente de excitación. El principal de los armónicos superiores es el tercero. La intensidad resultante del tercer armónico es:

$$I_{\phi 3} = \sqrt{(I'_3)^2 + (I'_5)^2} \quad (83)$$

$$= 2,10 \text{ A.} \quad (84)$$

que constituye el 41,5 % de la intensidad de la corriente de excitación. Al tercer armónico se debe en gran parte el pico agudo de la forma de onda de la corriente. En la figura 14 pueden verse los armónicos fundamental y tercero. La discrepancia más evidente son los dos puntos de inflexión de la curva resultante de la figura 14 y que están situados aproximadamente a -15° y $+15^\circ$. Se debe a la omisión de los armónicos superiores, el principal de los cuales es la quinta componente seno i'_5 . En general, si se incrementa la inducción magnética máxima, la corriente de excitación adopta una forma de onda más aguda, tal como se indica en la figura 15 la

* Véase el apartado 9d.

† Véase el apartado 9e.

cual presenta los resultados superpuestos de cuatro oscilogramas de la corriente de excitación del transformador de la figura 10. Al aumentar la inducción magnética, aumenta el valor relativo (%) del tercer armónico y disminuye el del armónico fundamental⁸. Cuando la forma de onda de la corriente de excitación produzca una distorsión importante, como puede ocurrir en los circuitos de comunicaciones,

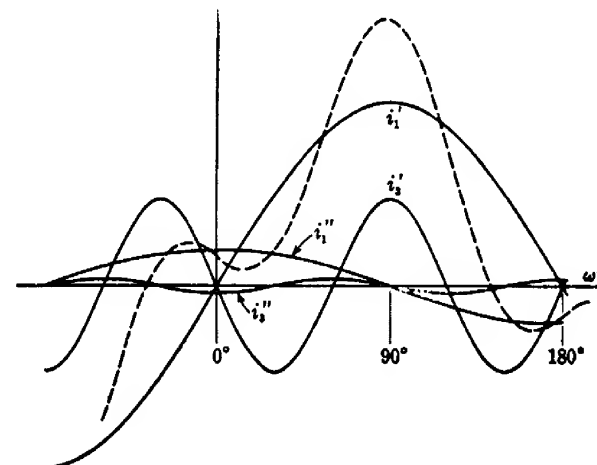


FIG. 14. Armónicos fundamental y tercero de la corriente de excitación.

se reduce dicha distorsión evitando el funcionamiento a inducciones magnéticas elevadas.

10a. *Efecto de un entrehierro.* Insertando en el núcleo un pequeño entrehierro, la corriente de excitación se puede hacer más sinusoidal. Por ejemplo, consideremos un entrehierro de 0,100 pulgadas (2,54 mm) —aproximadamente el 0,2 % de la longitud media del circuito magnético— practicado en el núcleo de la figura 10. Si la tensión aplicada sigue siendo de 200 V, como en el ejemplo anterior, el flujo máximo seguirá siendo de 0,00895 Wb (ec. 20) si la caída óhmica en el devanado sigue siendo despreciable. Luego, prescindiendo de la dispersión, la inducción magnética máxima en el entrehierro es:

$$B_{max} = \frac{\phi_{max}}{\text{área}} = \frac{0,00895}{3,5 \times 3,5 \times 6,45 \times 10^{-4}} = 1,13 \text{ T.} \quad (85)$$

En las siguientes referencias pueden encontrarse datos concernientes a la variación de los armónicos de la corriente de excitación con la inducción magnética:

L. F. BLUME, editor, *Transformer Engineering* (New York: John Wiley & Sons, 1938), 21.
O. G. C. DAHL, *Electric Circuits, Theory and Applications*. Tomo I: *Short-Circuit Currents and Steady-State Theory* (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1928), 226.
J. W. BUTLER y E. B. POPE, 'The Effect of Overexciting Transformers on System Voltage Wave Shapes and Power Factor', *A. I. E. E. Trans.*, 60 (1941), 49-53.

El valor máximo de la fuerza magnetomotriz requerida por el entrehierro es:

$$F_{eh} = \frac{B_{max} \times \text{longitud entrehierro}}{\mu_0} = \frac{1,13 \times 0,100 \times 2,54 \times 10^{-2}}{4\pi \times 10^{-7}} = 2\,285 \text{ ampere-espira} \quad (86)$$

El valor máximo de la componente añadida a la corriente de excitación por la inserción del entrehierro es:

$$\frac{F_{eh}}{N} = \frac{2\,285}{84} = 27,2 \text{ A} \quad (87)$$

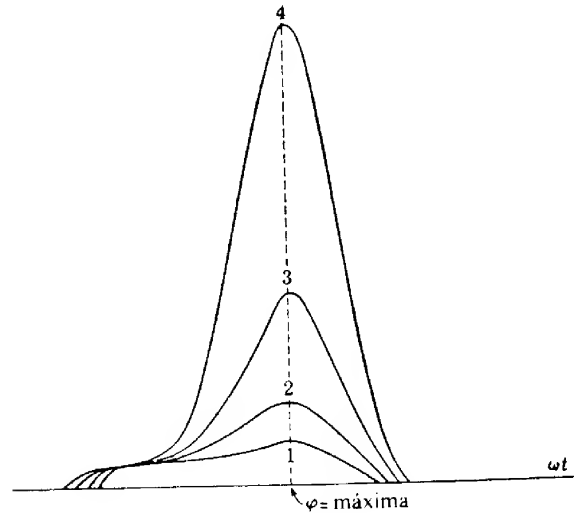


FIG. 15. Efectos de la inducción magnética máxima sobre la forma de onda de la corriente de excitación. Las cuatro curvas corresponden a las siguientes inducciones magnéticas máximas: (1) 7 500 G; (2) 10 000 G; (3) 12 500 G; (4) 15 000 G.

Esta componente de la corriente es sinusoidal, puesto que el flujo varía sinusoidalmente. Luego, su valor eficaz I_{eh} será $27,2/\sqrt{2} = 19,3 \text{ A}$. Como esta componente adicional está en fase con el flujo, se suma directamente a la componente seno fundamental I'_1 de la corriente de excitación. Las demás componentes de la corriente de excitación permanecen prácticamente invariables, ya que no se alteran esencialmente las condiciones en la parte de hierro del núcleo magnético. Por tanto, el entrehierro incrementa el valor eficaz de la corriente de excitación hasta el valor

$$\sqrt{(I'_1 + I_{eh})^2 + I_c^2 + (I'_3)^2 + (I'_3')^2 + \dots} = 24,0 \text{ A} \quad (88)$$

Aun cuando los armónicos mantienen invariada su intensidad, su valor relativo a la corriente de excitación incrementada es mucho menor; el tercer armónico, por

ejemplo (Ec. 84), es ahora solamente el 8,7 % de la corriente de excitación. Por tanto, la forma de onda de la corriente de excitación es ahora casi sinusoidal.

Frecuentemente se introducen entrehierros en los núcleos de las bobinas de reacción a fin de reducir la falta de constancia del coeficiente de autoinducción debida al hierro. Como, por otra parte, también reducen el coeficiente de autoinducción, habrá que llegar a una solución de compromiso entre la constancia de la autoinducción y el tamaño de una bobina diseñada para tener una autoinducción determinada. Cuando por el devanado de una bobina circulan simultáneamente corrientes continuas y alternas, suele insertarse un entrehierro para evitar la saturación debida al flujo creado por la corriente continua. En los apartados 14 y 15 se estudiarán estas condiciones. También pueden emplearse entrehierros para obtener un cociente grande entre la autoinducción y la resistencia aparente, cuestión que se ve en el capítulo VII, apartado 5.

11. REPRESENTACIÓN VECTORIAL DE LA CORRIENTE DE EXCITACIÓN

La corriente de excitación de un transformador suele ser poco intensa. Por ejemplo, la de un transformador de potencia suele estar comprendida entre el 4 % y el 8 % de la intensidad del primario a plena carga. Frecuentemente, puede desprejarse la forma de onda peculiar de esta débil corriente y tratar la corriente de excitación como sinusoidal. En tal caso podrán utilizarse métodos vectoriales. Esta simplificación suele llevar a resultados suficientemente precisos en los cálculos referentes a la distribución de potencia y potencia aparente reactiva en el análisis de sistemas de potencia. No obstante, en otros problemas despreciar la forma de onda peculiar de la corriente de excitación equivalente a ignorar fenómenos básicos de importancia fundamental. En la introducción al apartado 8 se mencionan algunos de estos problemas.

En el estudio que se realiza a continuación, se supone que el flujo varía sinusoidalmente, condición que se cumple casi siempre muy aproximadamente en los transformadores de potencia. En tal caso, el flujo, la tensión inducida y las componentes fundamentales seno y coseno son todas ondas sinusoidales y, por tanto, podrán representarse por vectores en la forma indicada en la figura 16. Sin embargo, este diagrama vectorial ignora por completo el efecto de los armónicos de la corriente de excitación. Los armónicos no contribuyen en absoluto a la potencia, puesto que sus frecuencias son diferentes de la de la tensión inducida *, pero incrementan la intensidad eficaz de la corriente de excitación.

► Así, pues, el efecto de los armónicos sobre la intensidad eficaz de la corriente de excitación es análoga al de una componente de intensidad en cuadratura con la tensión; es decir, incrementan la intensidad eficaz de igual manera que la componente reactiva de una intensidad sinusoidal incrementa la intensidad eficaz de la corriente. ◀

Sea I_m la intensidad eficaz de la corriente reactiva que incluye a los armónicos. Entonces,

$$I_m = \sqrt{(I'_1)^2 + (I'_2)^2 + (I'_3)^2 + \dots} \quad \triangleright (89)$$

Véase el apartado 9d.

Es decir, la intensidad eficaz de la corriente reactiva total es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de todas las componentes de la corriente de excitación, excepto la componente I_c de pérdidas en el núcleo. En el ejemplo del apartado 10, la componente fundamental I'_1 de la corriente reactiva es de 4,50 A, pero la corriente reactiva total es de 5,00 A. La corriente reactiva total I_m suele llamarse *corriente magnetizante*. Si se prescinde de su forma de onda peculiar, la corriente

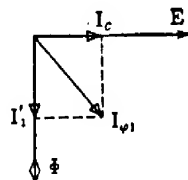


FIG. 16. Diagrama vectorial de las componentes fundamentales de la corriente de excitación.

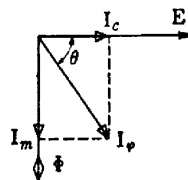


FIG. 17. Diagrama vectorial de las componentes equivalentes sinusoidales de la corriente de excitación.

magnetizante podrá representarse por un vector I_m en cuadratura con la tensión inducida y, por tanto, en fase con el flujo, según se indica en la figura 17. Como la intensidad eficaz $I_φ$ de la corriente de excitación es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de todos sus armónicos, todos los cuales excepto la corriente de pérdidas I_c están incluidos en la corriente magnetizante, entonces

$$I_φ = \sqrt{I_c^2 + I_m^2} \quad \blacktriangleright (90)$$

$$= 5,07 \text{ A} \quad (91)$$

Puesto que los armónicos se combinan de la misma manera que se suman las componentes sinusoidales en cuadratura, la intensidad eficaz $I_φ$ de la corriente de excitación viene dada correctamente por el módulo del vector suma de la componente de las pérdidas en el núcleo I_c más la componente magnetizante I_m de la figura 17. Las formas de onda de las corrientes magnetizantes y de excitación, en cambio, están muy lejos de ser sinusoidales.

► Los vectores I_m e $I_φ$ de la figura 17 no representan mas que intensidades sinusoidales equivalentes de valores eficaces iguales a los de las corrientes no sinusoidales reales que producen la misma potencia media que dichas corrientes. Es decir, la longitud del vector $I_φ$ de la figura 17 es la intensidad eficaz de la corriente de excitación, y el ángulo de fase de esta onda sinusoidal de corriente equivalente viene dada por

$$\cos \theta = \frac{P_c}{EI_φ} \quad \blacktriangleright (92)$$

donde P_c es la pérdida en el núcleo y E e $I_φ$ son los valores eficaces que se leerían en instrumentos de medida ordinarios para corriente alterna. ◀

Así, pues, la determinación del diagrama vectorial de la figura 17, mediante medidas con instrumentos ordinarios para corriente alterna, resulta sencilla. Como

la corriente de excitación suele ser débil, la representación vectorial mediante ondas sinusoidales, equivalentes, suele ser satisfactoria.

Como la corriente magnetizante consta de todas las componentes de la corriente de excitación $i_φ$ excepto la componente de pérdidas en el núcleo i_c , la intensidad instantánea de la corriente magnetizante es

$$i_m = i_φ - i_c. \quad (93)$$

En la figura 18 pueden verse las formas de onda de la corriente de excitación y de sus dos componentes: corriente de pérdida en el núcleo y corriente magnetizante.

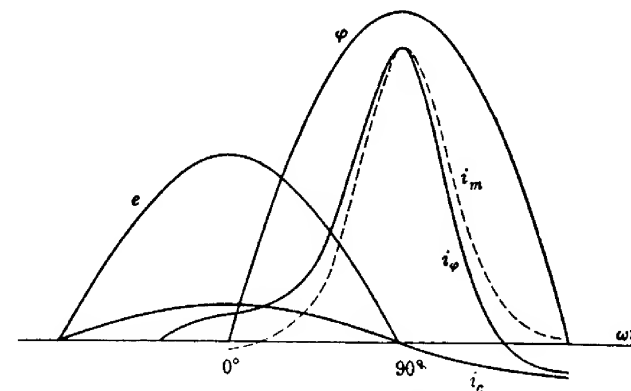


FIG. 18. Formas de onda de las componentes magnetizante y de pérdida en el núcleo de la corriente de excitación.

En el análisis de un caso en que la corriente de excitación se combina con otra corriente que varía sinusoidalmente, la representación de la corriente de excitación por una onda sinusoidal equivalente no es estrictamente adecuada. En rigor, el armónico fundamental de la corriente de excitación debería combinarse vectorialmente con la segunda corriente; habría que tomar la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de la componente fundamental resultante y de todos los armónicos, a fin de combinar los armónicos con la intensidad fundamental resultante. Este proceso rigurosamente correcto es bastante laborioso y exige un conocimiento, no siempre posible de tener, de los armónicos de la corriente de excitación. Por eso se trata frecuentemente la corriente de excitación sinusoidal equivalente como si fuera una verdadera onda sinusoidal que pueda sumarse vectorialmente con otras corrientes sinusoidales. No obstante, debe tenerse en cuenta que el tratamiento vectorial de la corriente de excitación con otras corrientes es solamente una aproximación que no siempre puede justificarse.

12. CARACTERÍSTICAS DE LA EXCITACIÓN EN CORRIENTE ALTERNA

Las características magnéticas en corriente alterna de los materiales de los núcleos se suelen representar gráficamente en la forma indicada en las figuras 19 y 21. Estas curvas, junto con las curvas de pérdida en el núcleo de la figura 20, son útiles para comparar las calidades magnéticas de los materiales de los núcleos y predecir

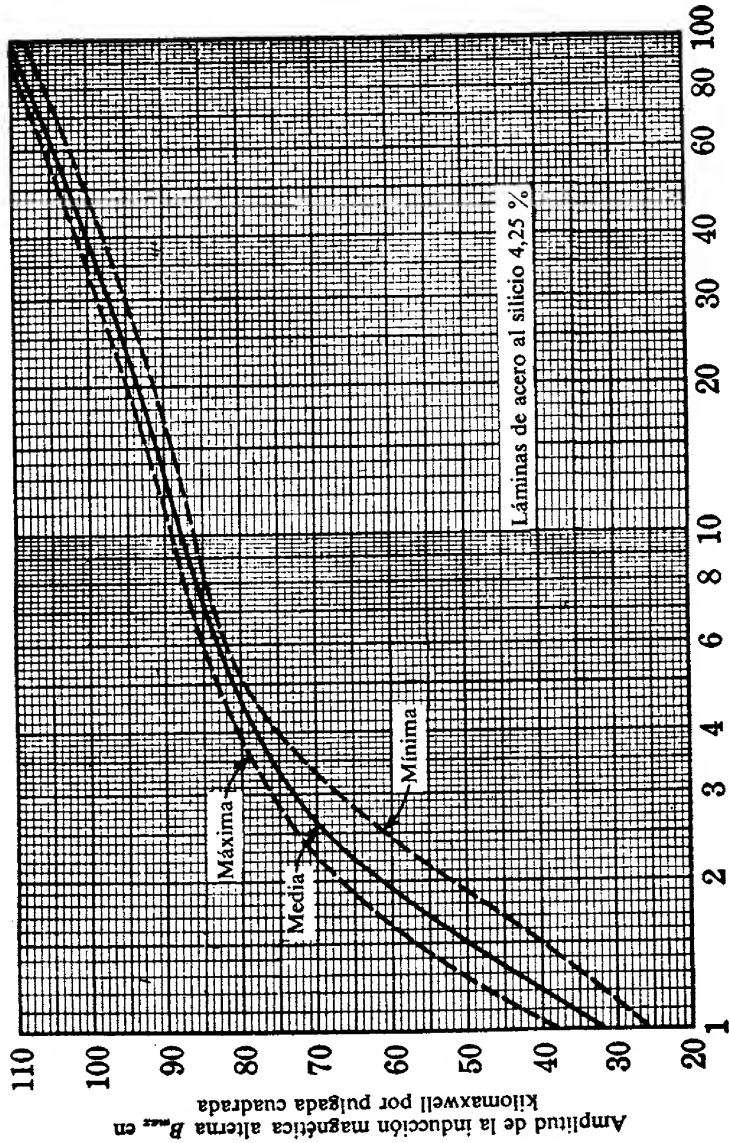


Fig. 19. Curvas de imitación eficaz para flujo sinusoidal.

Fig. 19. Curvas de imitación eficaz para flujo sinusoidal.

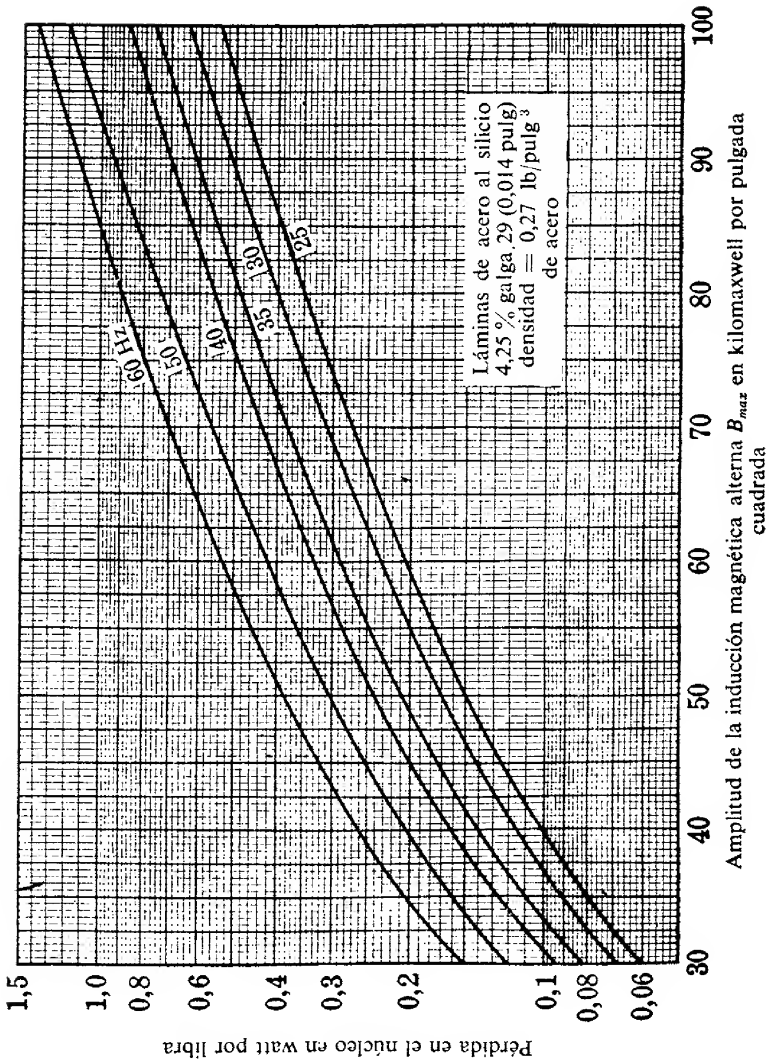


Fig. 20. Características de pérdida en el núcleo para flujo sinusoidal.

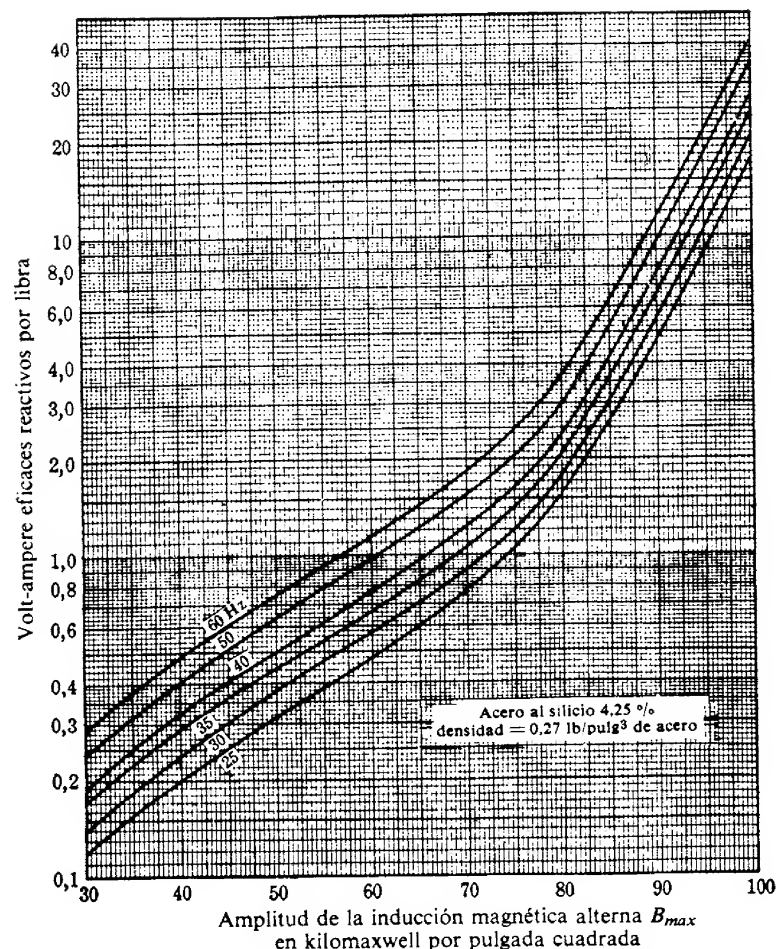


Fig. 21. Características de volt-ampere reactivos para flujo sinusoidal.

un valor aproximado de la intensidad eficaz de la corriente de excitación de un transformador de potencia *. Las tres figuras corresponden a láminas de acero de buena calidad con un 4,25 % de silicio, ensayadas con un flujo sinusoidal. Las características de imanación de las figuras 19 y 21 son los promedios de medidas realizadas sobre muestras en forma de anillos sin entrehierros y representan el dominio de funcionamiento que puede esperarse dentro de los límites de frecuencias de potencia y galgas de chapa comerciales. Las curvas de pérdida en el núcleo de la figura 20 corresponden a láminas de la galga 29 ensayadas en una estructura Epstein en la forma descrita en el apartado 5, del capítulo V. En la figura 19 puede verse la relación entre el valor *máximo* de la inducción magnética sinusoidal y el valor *eficaz* del campo magnético no sinusoidal en ampere-espiras eficaces por pulgada. Su empleo para calcular la intensidad eficaz de la componente magnetizante de la corriente de excitación para un flujo determinado en el núcleo es análogo al empleo de la curva de imanación en corriente continua en problemas análogos de corriente continua. La figura 21, en la que puede verse la relación entre la inducción magnética máxima y los volt-ampere eficaces reactivos por libra, presenta en esencia la misma información que la figura 19, pero en una forma que a veces resulta más útil. Obsérvese que los volt-ampere reactivos requeridos para excitar núcleos del mismo material a la misma inducción magnética máxima dependen únicamente de la frecuencia y de los pesos de los núcleos. Como este hecho también se cumple para la pérdida en el núcleo, el factor de potencia de un transformador en vacío depende únicamente de la frecuencia y de la inducción magnética máxima, y la excitación total en volt-ampere eficaces EI_ϕ queda determinada por la frecuencia, la inducción magnética máxima y el peso del núcleo y es independiente del número de espiras del devanado de excitación.

Las curvas de las figuras 19, 20 y 21 deben utilizarse con extraordinaria precaución y deberán aplicarse factores de corrección empíricos para tener en cuenta los efectos de las presiones de apilamiento, corrientes de Foucault entre láminas, alineamiento de los granos, ángulos del núcleo y juntas en el circuito magnético. Una junta franca equivale a un pequeño entrehierro de longitud ligeramente mayor que el espesor del aislante de papel en la junta. Las juntas solapadas como las de los ángulos de un núcleo, que se presentan en la figura 22a, presentan efectos de saturación. Sin embargo, para mayor sencillez, consideremos la junta solapada recta de la figura 22b, repetida ampliada y vistas de perfil las láminas en la figura 22c.

* En las figuras 9 y 10 del capítulo V se dan curvas de pérdida en el núcleo que cubren un amplio dominio de frecuencias e inducciones magnéticas.

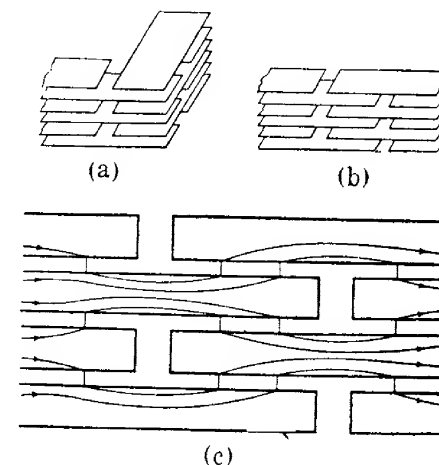


Fig. 22. Caminos del flujo en una junta solapada. a) Junta solapada en un ángulo del núcleo; b) junta solapada recta; c) ampliación de b) mostrando los caminos aproximados del flujo.

Luego la inducción magnética es mayor que la normal en las partes de las láminas próximas a la junta y la relación entre la inducción magnética y la fuerza magnetomotriz requerida por la junta es, por tanto, no lineal^{*}.

12a. *Ejemplo de diseño de una bobina con núcleo de hierro.* Consideremos una bobina con núcleo rectangular de lámina de acero con 4,25 % de silicio de la galga 29 cuyas características se dan en las figuras 19, 20 y 21. En la figura 23 se dan las dimensiones del núcleo. Este está construido con láminas en forma de L con juntas solapadas. El devanado tiene 145 espiras. El problema consiste en determinar la pérdida en el núcleo y la intensidad eficaz de la corriente de excitación cuando se aplica a la bobina una tensión de 220 V y frecuencia 60 Hz.

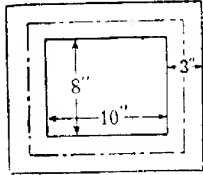


Fig. 23. Núcleo de la bobina del ejemplo desarrollado en el apartado 12a.

Solución: Aun cuando la fuerza magnetomotriz requerida por las juntas pueda ser importante, en la resolución de este problema despreciaremos los efectos de las juntas.

La longitud media del camino magnético (línea central en la figura 23), es de 48 pulgadas (1,22 m). Por tanto, el volumen total de acero en el núcleo es:

$$48 \times 3 \times 3 \times 0,90 = 389 \text{ pulg}^3 \quad (94)$$

La densidad del acero con 4,25 % de silicio es de 0,27 lb/pulg³, por lo que el peso del núcleo es:

$$0,27 \times 389 = 105 \text{ lb.} \quad (95)$$

En virtud de la ecuación (19), el valor máximo ϕ_{max} del flujo en el núcleo es:

$$\phi_{max} = \frac{E}{4,44fN} = \frac{220}{4,44 \times 60 \times 145} \quad (96)$$

$$= 0,00570 \text{ Wb} \quad (97)$$

Luego, la inducción magnética máxima B_{max} es:

$$B_{max} = \frac{\phi_{max}}{\text{área total}} = \frac{0,00570}{3 \times 3 \times 0,90 \times 6,45 \times 10^{-4}} = 1,09 \text{ T} \quad (98)$$

Este flujo equivale a 70,3 kilolíneas/pulg² y de la figura 20 resulta que, a 60 Hz, la pérdida en el núcleo es de 0,70 W/lb, y, por tanto, la pérdida total en el núcleo es:

$$105 \times 0,70 = 74 \text{ W} \quad (99)$$

* Puede verse una curva de saturación para juntas solapadas en L. F. BLÜME editor, *Transformer Engineering* (New York: John Wiley & Sons, 1938), 10. Según tal curva de saturación, cada junta solapada requiere una fuerza magnetomotriz unas diez veces mayor que los ampere-espira eficaces por pulgada en el hierro en el dominio de inducciones magnéticas normalmente usado en el diseño de transformadores de potencia (50-90 kMx/pulg²). La fuerza magnetomotriz requerida por las juntas se halla afectada por varias variables, tales como las tolerancias de fabricación, presiones de apilamiento y otros factores que dependen de la habilidad con que se ha ensamblado el núcleo.

De la figura 21, a 60 Hz y 70,3 kilolíneas/pulg², la potencia reactiva es de 1,85 VAR/lb, y, por tanto, la potencia total reactiva es:

$$105 \times 1,85 = 194 \text{ VAR} \quad (100)$$

Las componentes de pérdida en el núcleo y magnetizante de la corriente de excitación pueden ya calcularse; así,

$$I_c = \frac{74}{220} = 0,34 \text{ A.} \quad (101)$$

$$I_m = \frac{194}{220} = 0,88 \text{ A.} \quad (102)$$

La intensidad eficaz I_ϕ de la corriente de excitación vendrá, pues, dada por,

$$I_\phi = \sqrt{(0,34)^2 + (0,88)^2} = 0,94 \text{ A.} \quad (103)$$

También puede calcularse a partir de la figura 19 la intensidad eficaz I_m de la corriente magnetizante. De dicha curva, a una inducción magnética máxima de 70,3 kilolíneas/pulg², el campo magnético eficaz es de 2,7 ampere-espira/pulgada eficaces y, como la longitud media del circuito magnético es de 48 pulgadas, la fuerza magnetomotriz será $48 \times 2,7$ ampere-espira eficaces. El devanado tiene 145 espiras, por lo que la intensidad eficaz I_m de la corriente magnetizante es:

$$I_m = \frac{48 \times 2,7}{145} = 0,89 \text{ A.} \quad (104)$$

En consecuencia, la intensidad eficaz I_ϕ de la corriente de excitación es:

$$I_\phi = \sqrt{(0,34)^2 + (0,89)^2} = 0,96 \text{ A.} \quad (105)$$

Los dos métodos para calcular la corriente de excitación dan, sustancialmente, los mismos resultados. Obsérvese que las intensidades eficaces de las corrientes magnetizantes y de excitación no difieren mucho. A menudo se prescinde de esta diferencia y se supone que la intensidad eficaz de la corriente de excitación es igual a la de la corriente magnetizante.

13. CIRCUITOS EQUIVALENTES

En análisis de circuitos, las bobinas con núcleos de hierro suelen representarse por un circuito equivalente aproximado consistente en elementos de parámetros localizados, conectados de manera que sus características de impedancia representen aproximadamente los efectos de la bobina como elemento de circuito. Cuando pueden despreciarse los efectos de la falta de linealidad magnética de las formas de onda de la tensión y de la intensidad puede hallarse una combinación serie o paralelo de una resistencia y una autoinducción, a cualquier tensión eficaz V aplicada y cualquier pulsación ω , que absorba la misma potencia media P y conduzca una corriente de igual intensidad eficaz I que la bobina. En las figuras 24a y 24b pueden verse estos circuitos equivalentes. Si son equivalentes a la bobina, sus constantes deberán estar

relacionadas con la tensión, intensidad y potencia consumidas por la bobina, de la manera siguiente:

En la figura 24a

$$R_a = \frac{P}{I^2} \quad \blacktriangleright (106)$$

$$X_a = \sqrt{\left(\frac{V}{I}\right)^2 - R_a^2} \quad \blacktriangleright (107)$$

donde

R_a es la resistencia aparente,

X_a es la reactancia aparente,

G_a es la conductancia aparente,

B_a es la susceptancia aparente de la bobina.

A causa de la falta de linealidad magnética de la bobina, los parámetros pueden no ser constantes, sino que pueden depender de la tensión y la frecuencia a que se miden.

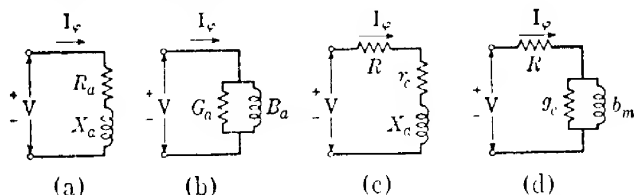


FIG. 24. Circuitos equivalentes de una bobina con núcleo de hierro.

En los circuitos de las figuras 24a y 24b, R_a y G_a originan una pérdida de potencia igual a la pérdida total de potencia P en la bobina, consistente en la pérdida en el núcleo P_c más la pérdida en el cobre I^2R , donde R es la resistencia efectiva del devanado. Así, según se estableció en el apartado 1, la resistencia aparente R_a es mayor que la resistencia efectiva R del devanado. Las pérdidas en el cobre y en el núcleo varían de diferentes maneras con las variaciones de la tensión y la frecuencia y con los cambios en el diseño de los devanados y del núcleo. Luego, será usualmente conveniente indicar las componentes de las pérdidas mediante resistencias separadas, como en las figuras 24c y 24d, en las que R es la resistencia efectiva del devanado, y r_c o g_c interpretan la pérdida en el núcleo. En la teoría de los transformadores también conviene resolver la reactancia aparente X_a en una componente debida a la fuga de flujo y otra debida al flujo en el núcleo.

Aun cuando en un transformador en carga es importante la fuga magnética, en la bobina con núcleo de hierro suele ser muy pequeña, así como en los transformadores en vacío. Luego la reactancia aparente X_a será prácticamente igual a la debida al flujo en el núcleo.

A pesar de las propiedades magnéticas peculiares del hierro, frecuentemente se puede representar una bobina con núcleo de hierro o un transformador por un circuito equivalente cuyos parámetros se suponen constantes e independientes de la tensión y la frecuencia, sin que se cometa un error excesivo. Si se mantiene constante la frecuencia, suponer que los parámetros r_c , X_a , g_c y b_m de las figuras 24c y 24d

son independientes de la tensión equivale a suponer que la intensidad de la corriente es proporcional al flujo y que la pérdida en el núcleo varía como el cuadrado del flujo. Los dos circuitos equivalentes dan los mismos resultados y se utilizará el que sea más conveniente. En la bobina o transformador real la intensidad de la corriente crece más rápidamente que el flujo, la pérdida por corrientes de Foucault varía como el cuadrado del flujo y la pérdida por histéresis se puede suponer a menudo que también varía como el cuadrado del flujo.

Si varía la frecuencia, y si se supone que las resistencias r_c y g_c son constantes y que los elementos de circuito X_a y b_m tienen coeficientes de autoinducción constantes, los circuitos equivalentes de las figuras 24c y 24d dan resultados diferentes. En estas circunstancias, el circuito equivalente de la figura 24c no es satisfactorio, puesto que la pérdida aparente en el núcleo calculada a partir de este circuito es aproximadamente proporcional al cuadrado del flujo pero es independiente de la frecuencia. En cambio, el circuito paralelo de la figura 24d, con g_c constante y coeficiente de autoinducción constante en la rama magnetizante, puede constituir una representación suficientemente precisa de la bobina. Con estas hipótesis, en la figura 24d la corriente magnetizante tiene una intensidad proporcional al flujo y la pérdida total en el núcleo es proporcional al cuadrado de la tensión inducida. Esta es la manera en que varía en la bobina la pérdida por corrientes de Foucault *, si bien la pérdida por histéresis varía como la primera potencia de la frecuencia. Cuando sea muy pequeña la amplitud de la inducción magnética alterna, como ocurre en muchas bobinas y transformadores utilizados en circuitos de comunicaciones, la falta de linealidad de las características magnéticas carece, a menudo, de importancia, siendo justificable la hipótesis de autoinducción constante.

► Por tanto, el circuito equivalente de la figura 24d, con g_c constante e inductancia magnetizante constante, se podrá emplear frecuentemente para representar una bobina con núcleo de hierro en un amplio dominio de frecuencias, si la pérdida por histéresis es despreciable frente a la pérdida por corrientes de Foucault y si es pequeña la amplitud de la inducción magnética alterna ¹⁰. ◀

Sin embargo, a las inducciones magnéticas usualmente empleadas en aparatos de potencia la pérdida por histéresis suele ser mayor que la pérdida por corrientes de Foucault. En estas condiciones, probablemente es más preciso suponer que las resistencias de r_c y g_c de las figuras 24c y 24d son proporcionales a la frecuencia y que los elementos de circuito X_a y b_m tienen coeficientes de autoinducción constantes. Es decir, suponer que:

En la figura 24c,

$$r_c = \omega R' \quad (110)$$

$$X_a = \omega L' \quad (111)$$

En la figura 24d,

$$g_c = \frac{1}{\omega R''} \quad (112)$$

$$b_m = -\frac{1}{\omega L''} \quad (113)$$

* Véase el apartado 2 del capítulo V.

¹⁰ Para un ulterior estudio de este circuito equivalente, véase L. B. ARGUMBAU, «Losses in Audio-Frequency Coils», *Gen. Rad. Exp.*, 11, N.º 6 (noviembre 1936), 1-4; P. K. McELROY y R. F. Field, «How Good Is an Iron-Cored Coil?», *Gen. Rad. Exp.*, 16, N.º 10 (marzo 1942), 1-12.

donde R' , L' , R'' y L'' son constantes. Con estas hipótesis puede demostrarse que los dos circuitos equivalentes de las figuras 24c y 24d dan los mismos resultados; o sea, que la intensidad de la corriente es proporcional al flujo y la pérdida en el núcleo es proporcional a la frecuencia y al cuadrado del flujo. Este resultado constituye la variación correcta con el flujo de la pérdida total en el núcleo. No obstante, cuando se suponen constantes las autoinducciones, todos los circuitos equivalentes desprecian los efectos de la saturación sobre la corriente magnetizante.

► Los circuitos equivalentes dan corrientes sinusoidales cuando es sinusoidal la forma de onda de la tensión aplicada, y, por tanto, sólo se podrán aplicar cuando sea suficientemente preciso representar la intensidad de la corriente por una onda sinusoidal equivalente. Afortunadamente, esto es posible a menudo. ◀

14. CARACTERÍSTICAS DEL HIERRO SOMETIDO A UN CAMPO MAGNÉTICO ALTERNO SUPERPUESTO A OTRO CONTINUO

Hasta ahora, nuestro estudio se ha referido al comportamiento de los materiales ferromagnéticos en condiciones en las cuales los materiales se hallaban sometidos a campos magnéticos estacionarios o continuos, y también cuando se hallaban sometidos a campos magnéticos alternos. Sin embargo, en la práctica los materiales se hallan a menudo sometidos a campos magnéticos alternos y estacionarios superpuestos. Por ejemplo, en muchos circuitos de mando se emplean a menudo excitaciones continuas y alternas superpuestas en los núcleos de hierro, a fin de asegurar un resultado determinado. También en muchos circuitos asociados a aparatos electrónicos es necesaria una componente unidireccional de la corriente, además de la componente alterna. En todas esas aplicaciones es importante conocer la manera en que responde el hierro a las excitaciones combinadas. Frecuentemente, el problema estriba en determinar el efecto que la corriente continua que circula por el devanado de una bobina con núcleo de hierro tiene sobre su autoinducción aparente.

En este apartado se presentan brevemente ciertas características del hierro sometido a excitaciones continua y alterna superpuestas. Se introduce una nueva expresión, que es la *permeabilidad incremental*, y se explican los casos en que puede utilizarse eficazmente.

Cuando se aplican simultáneamente un campo magnético unidireccional y uno alterno mediante un devanado excitador, el ciclo de histeresis resultante es asimétrico y diferente para valores diferentes del campo magnético unidireccional. En la figura 25 puede verse una familia de ciclos en la cual la componente estacionaria del campo magnético H es diferente para cada ciclo siendo siempre la misma la amplitud de la componente alterna de la inducción magnética B ¹¹.

¹¹ J. D. BALL, «The Unsymmetrical Hysteresis Loop», *A. I. E. E., Trans.*, 34, segunda parte (1915), 2693-2715.

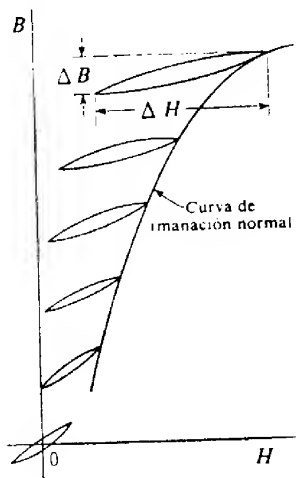


FIG. 25. Ciclos de histeresis desplazados a causa de la superposición de un campo magnético continuo y uno alterno.

Una característica importante del hierro es su *permeabilidad incremental* para la componente alterna del campo magnético. Esta permeabilidad incremental es aproximadamente proporcional a la pendiente media $\Delta B/\Delta H$ de los ciclos pequeños. Su valor puede calcularse mediante la relación,

$$\text{Permeabilidad incremental} = \frac{dB}{dH} \approx \frac{\Delta B}{\Delta H} \quad (114)$$

o, cuando se suponen variaciones sinusoidales, la permeabilidad incremental μ_{ca} puede definirse como

$$\mu_{ca} = \frac{B_{ef}}{H_{ef}} \quad \blacktriangleright (115)$$

La inducción magnética B_{ef} es el valor eficaz de la componente alterna de la inducción magnética que induce la tensión alterna de la bobina, y el campo magnético H_{ef} es la componente del campo magnético sinusoidal equivalente en fase con el flujo

► Como las componentes alternas de B y H no tienen la misma forma de onda, la permeabilidad μ_{ca} definida por la ecuación (115) es un valor medio o permeabilidad equivalente. Esta expresión sólo tiene significado en el sentido de que μ_{ca} es el cociente entre los valores eficaces de las componentes alternas de B y H . ◀

► De las formas y tamaños de los ciclos de la figura 25 pueden extraerse dos generalizaciones cualitativas. La primera es que la permeabilidad incremental μ_{ca} es marcadamente inferior a la pendiente de la curva de imanación normal en el punto de funcionamiento correspondiente a la componente unidireccional de H . Es decir, la permeabilidad aparente del material para variaciones cíclicas del campo magnético no puede determinarse midiendo la pendiente de la curva de imanación normal. La segunda generalización es que cuanto más intenso se haga el campo magnético continuo, tanto menor se hace la permeabilidad incremental. Esta generalización se ilustra en la figura 25 donde se ve que aumenta la amplitud de la variación de H correspondiente a una amplitud determinada de la variación de B cuando se incrementa la componente unidireccional de H , y aún se ve mejor examinando las curvas de permeabilidad incremental de la figura 26. ◀

El enunciado matemático exacto de estas generalizaciones es prácticamente imposible a causa de la naturaleza no lineal de las relaciones que intervienen. Los únicos medios practicables para determinar el funcionamiento de las bobinas con núcleo de hierro que tengan superpuestas excitaciones continua y alterna consiste en aplicar métodos aproximados de análisis que utilicen datos expresados en forma gráfica, o la experimentación sobre modelos o aparatos de tamaño natural. El problema es, en esencia, el mismo que el estudiado anteriormente en este capítulo, exceptuando que ahora el campo magnético continuo H_{cc} es una nueva variable. El estudio anterior referente a la falta de linealidad, formas de onda, sinusoidales equivalentes, etc., se aplica aquí casi directamente para cualquier valor dado de H_{cc} , con la consideración adicional de que el ciclo de histeresis se halla ahora desplazado del origen y es asimétrico.

Una manera útil de describir las propiedades del hierro sometido a imanaciones continua y alterna superpuestas es mediante curvas que den la permeabilidad incre-

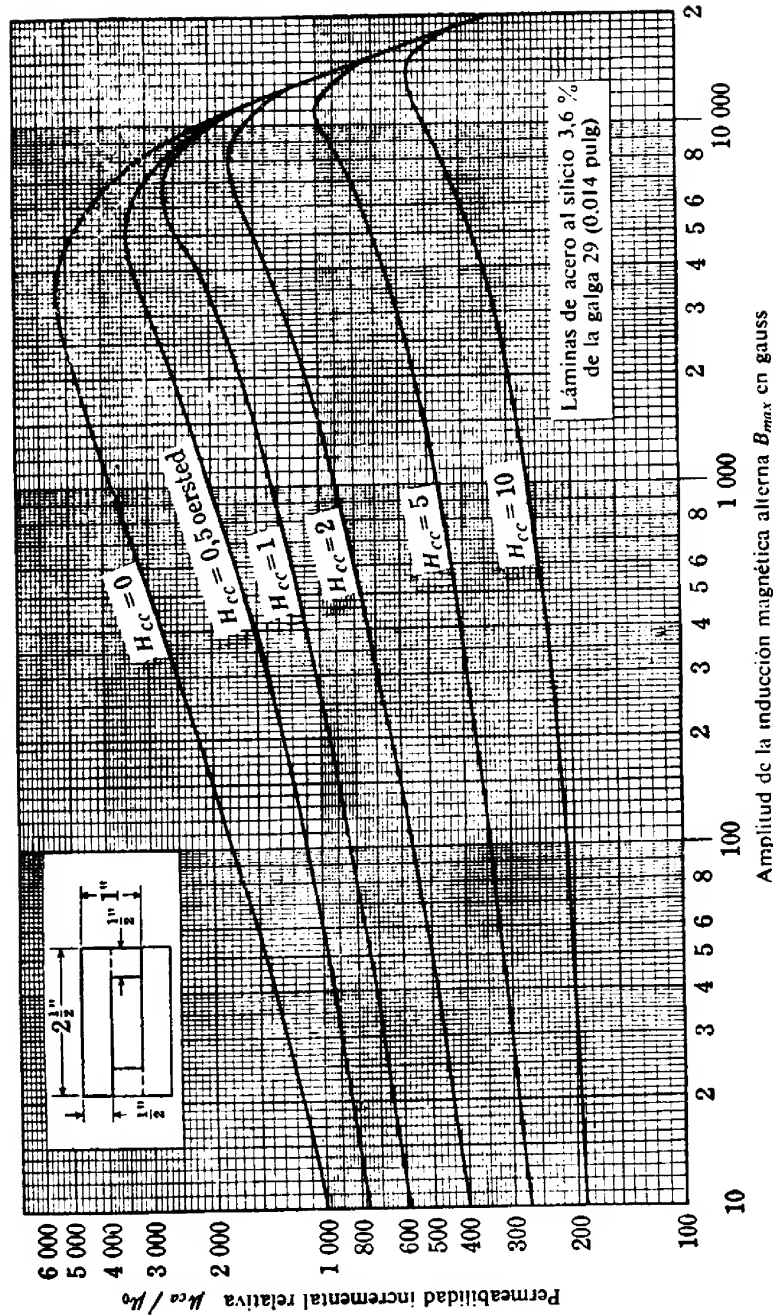


FIG. 26. Características de permeabilidad incremental.

mental o eficaz μ_{ca} en función del valor máximo de la componente alterna B_{max} de la inducción magnética y que tengan H_{cc} como parámetro. En la figura 26 puede verse una de dichas familias de curvas. Los datos para trazar la figura 26 se tomaron de un núcleo constituido por láminas en L, apiladas interfoliadas. Los datos deben considerarse como orientadores del orden de los mismos solamente, y solamente podrán aplicarse cuantitativamente a un material particular cuando se utilice en condiciones magnéticas análogas a las que se aplicaron cuando se obtuvieron los datos. Aun cuando se emplee el mismo material, si se emplea en una forma distinta de troquelado, o cuando se apilen en forma diferente, como por ejemplo con juntas solapadas en vez de interfoliadas, los datos son algo diferentes. Sin embargo, independientemente de estas limitaciones, los datos, adecuadamente interpretados, servirán para cualquier cálculo aproximado para diseño. En el apartado 15 se estudia el empleo de la permeabilidad incremental, definida por la ecuación (115), para el cálculo del funcionamiento de las bobinas de reacción.

Cuando se desee una permeabilidad incremental grande (como, por ejemplo, en el caso de transformadores de audiofrecuencia empleados en los amplificadores de válvulas de vacío) la componente continua del campo magnético, aun cuando no puede evitarse fácilmente, no es conveniente porque tiende a hacer disminuir las autoinducciones de los devanados del transformador y por tanto su coeficiente de acoplo. En muchas aplicaciones de las bobinas de choke de los filtros para rectificadores, conviene una permeabilidad incremental grande junto con un gran campo magnético continuo. Cuando se incrementa el campo magnético continuo, el decremento de permeabilidad incremental hace disminuir la autoinducción aparente del elemento y da origen al término «choke oscilante». Estos chokes oscilantes se emplean eficaz y económicamente en ciertos filtros para rectificadores. A veces, se hace que la variación de permeabilidad incremental realice una función útil en un gran número de dispositivos de mando. La gran ventaja de estos dispositivos proviene principalmente de la facilidad con que puede variarse la permeabilidad incremental o eficaz del material del núcleo variando el campo magnético continuo.

En las aplicaciones en que tengan importancia las formas de onda puede convenir otra definición de la permeabilidad en corriente alterna. Si limitamos el estudio a los casos en que se aplica una tensión sinusoidal a la bobina y la resistencia de ésta es despreciable, la variación de la inducción magnética es esencialmente sinusoidal. En tal caso puede definirse la permeabilidad como el cociente entre la componente sinusoidal de B y la componente fundamental de H que está en fase con B . También podrán encontrarse una o más clases de permeabilidades «armónicas», definidas como cocientes entre la componente fundamental de B y un armónico especificado cualquiera de H . Obsérvese que como el ciclo desplazado de histeresis es asimétrico, en el campo magnético habrán tanto armónicos pares como impares. Las permeabilidades armónicas son importantes cuando interese una reproducción exacta de las señales; no estudiaremos aquí su medida y empleo.

Cuando se utiliza una bobina en un circuito sintonizado, suele convenir que sea grande la razón de la reactancia a la resistencia aparente, y, si las pérdidas en el hierro constituyen una parte sustancial de la pérdida total, su efecto es importante, ya que la razón de la reactancia a la resistencia disminuye cuando crece la resistencia aparente. En otras aplicaciones, la contribución de la pérdida en el núcleo a la resistencia aparente en corriente alterna de la bobina puede tener relativamente poca

importancia, como ocurre en los filtros para rectificadores en donde es importante la resistencia del devanado en corriente continua porque incrementa la regulación del generador de corriente continua. Experimentalmente, pueden obtenerse importantes datos referentes a las pérdidas en el hierro sometido a excitaciones continua y alterna superpuestas, creando en la muestra condiciones magnéticas análogas a aquellas para las cuales interesen los datos.

15. BOBINAS CON NÚCLEO DE HIERRO CON EXCITACIONES CONTINUA Y ALTERNA SUPERPUESTAS

La superposición de las excitaciones continua y alterna en el hierro se presenta de dos maneras principales en las bobinas con núcleo de hierro. En una de ellas se utiliza la excitación continua para gobernar la reactancia efectiva, y las fuerzas magnetomotrices continua y alterna actúan sobre circuitos magnéticos diferentes que tienen alguna parte común. En la figura 27 puede verse una bobina de este tipo con bobinas de corriente alterna conectadas en serie. Cuando la excitación continua es nula, el flujo magnético alterno circula solamente por el camino exterior, si las bobinas de corriente alterna son iguales y están conectadas en serie o paralelo a sus fuerzas magnetomotrices que ayudan a que el flujo siga este camino. Cuando se aplica la fuerza magnetomotriz continua, crea un flujo unidireccional que recorre todo el núcleo en la forma indicada y, en primera aproximación, en un instante dado cualquiera del ciclo alterno de imanación ayuda al flujo alterno en una de las ramas exteriores y se resta de él en la otra rama exterior. En realidad, a causa de los efectos de saturación, la cantidad sustraída de una rama no es igual a

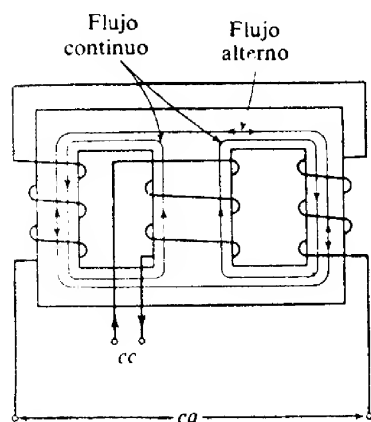


FIG. 27. Bobina de tres ramas con devanados para c.c. y c.a.

la añadida en la otra. En otras palabras, no podemos aplicar aquí la superposición lineal.

La experiencia indica que la reactancia aparente del devanado de corriente alterna en la mencionada bobina puede variarse entre amplios límites sin más que variar la intensidad de la corriente continua. En consecuencia, las bobinas que utilizan este principio hallan muchas aplicaciones en los circuitos de mando. El análisis de estas bobinas se realiza en forma análoga a la presentada en la parte a) de este apartado.

La segunda manera de superponer las excitaciones en una bobina consiste en aplicar las dos fuerzas magnetomotrices mediante el mismo devanado, con lo que los caminos de los flujos continuo y alterno coinciden. Cuando el camino del flujo en el hierro tiene una sección recta sustancialmente uniforme a lo largo de toda su longitud, a partir de datos como los de la figura 26 podrá determinarse de manera relativamente fácil el funcionamiento aproximado de las bobinas de esta forma. En la parte a) de este apartado se desarrolla la teoría de dicho análisis mediante un ejemplo numérico particular.

15a. *Ejemplo de cálculo de una autoinducción aparente.* Supongamos que se quiere hallar la autoinducción aparente de una bobina con núcleo de hierro análoga a la empleada frecuentemente como elemento de acoplo en un circuito de válvula de vacío. Es corriente emplear un núcleo consistente en láminas apiladas de una altura de media pulgada (12,7 mm) y reunidas en la forma indicada en la figura 28.

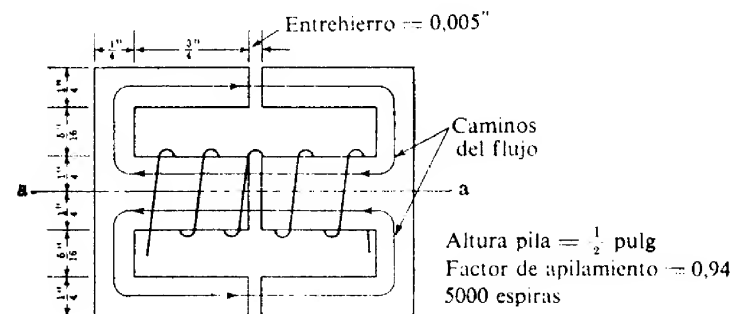


FIG. 28. Núcleo de una bobina de inducción.

Un material muy utilizado para estos casos es acero al silicio con un 4 % de silicio, para el cual la figura 29 representa la curva de imanación normal y la figura 26 da las curvas de permeabilidad incremental. El factor de apilamiento para el conjunto

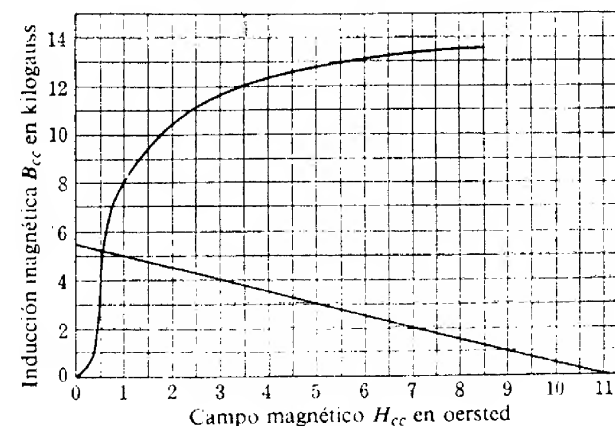


FIG. 29. Curva de imanación normal en c. c. del acero de la Fig. 26 y construcción gráfica para la determinación de H_{cc} en el apartado 15a.

indicado se supone igual a 0,94. Supongamos que la bobina tiene 5 000 espiras y está arrollada sobre la rama central del núcleo.

Como ejemplo, supongamos que la bobina conduce una corriente continua de 0,020 A y que se busca la autoinducción aparente cuando se aplica a la bobina una tensión eficaz de 50 V a 120 Hz. No hay devanados en las ramas exteriores.

Solución: El procedimiento general de solución consiste en determinar primeramente el campo magnético continuo H_{cc} en el acero. Se calcula entonces la inducción magnética alterna máxima correspondiente a la componente alterna de la tensión. Con estos datos se determina, a partir de la figura 26, la permeabilidad incremental aparente del acero. Se calcula entonces el coeficiente de autoinducción aparente suponiendo lineal el circuito magnético en el dominio de la fuerza magnetomotriz alterna superpuesta.

Para determinar el valor de H_{cc} , hay que dividir el campo magnético continuo total entre los entrehierros y el acero con la condición de que el flujo a través de los entrehierros es igual al flujo a través del hierro. Para este cálculo puede dividirse el núcleo en dos partes puestas magnéticamente en paralelo, según indica el plano aa perpendicular al papel en la figura 28. Las dimensiones magnéticas de una mitad se pueden tratar o calcular solas, exceptuando que el flujo total que atraviesa la bobina es el doble que el que atraviesa una u otra mitad del núcleo.

La obtención gráfica del campo magnético continuo H_{cc} viene dada por las curvas de la figura 29. El método seguido es igual que el descrito en la solución del segundo ejemplo del apartado 8, del capítulo III. Los valores numéricos utilizados en la figura 29 para esta solución se obtienen de la manera siguiente.

La fuerza magnetomotriz continua F_{cc} es:

$$\begin{aligned} F_{cc} &= 5\,000 \times 0,020 \\ &= 100 \text{ ampere-espira o sea, } 126 \text{ gilbert} \end{aligned} \quad (116)$$

Para calcular la longitud l_s del camino del flujo en el núcleo de acero, supongamos que el flujo se curva en los ángulos del acero con un radio medio de 1/8 de pulgada. Entonces

$$\begin{aligned} l_s &= 4 \left(\frac{3}{4} \right) + 2 \left(\frac{5}{16} \right) + \frac{\pi}{4} \\ &= 4,4 \text{ pulg., o sea } 11,2 \text{ cm.} \end{aligned} \quad (117)$$

El área de la sección recta A_s del acero es

$$\begin{aligned} A_s &= (0,94 \times 0,25 \times 0,50) \\ &= 0,117 \text{ pulg}^2, \text{ o sea, } 0,76 \text{ cm}^2 \end{aligned} \quad (118)$$

La longitud total l_a de los entrehierros en serie con el camino del flujo magnético es:

$$l_a = 0,010 \text{ pulg, o sea, } 0,0254 \text{ cm} \quad (119)$$

El área de la sección recta equivalente A_a del entrehierro se determina a partir de la dispersión de las líneas de fuerza. Para tener en cuenta la dispersión, puede suponerse que cada entrehierro tiene unas dimensiones de la sección recta eficaz superiores en la longitud del entrehierro a las dimensiones del acero *. Aun cuando en este ejemplo esta corrección no afectará al área en una cantidad suficientemente grande como para ser apreciable numéricamente, incluiremos dicha corrección para que sea completo el estudio que se realiza. Así pues, el área equivalente del entrehierro de la rama exterior es:

$$\begin{aligned} A_a &= (0,25 + 0,005)(0,5 + 0,005) \\ &= 0,129 \text{ pulg}^2, \text{ o sea, } 0,83 \text{ cm}^2 \end{aligned} \quad (120)$$

* Véase la ecuación (3), del capítulo III.

El área equivalente del entrehierro de la rama central es:

$$(0,50 + 0,005)(0,50 + 0,005) = 0,255 \text{ pulg}^2$$

y por tanto el área equivalente a uno y otro lado del plano central aa de la figura 28 es:

$$\frac{0,255}{2} = 0,1275 \text{ pulg}^2, \text{ o sea, } 0,82 \text{ cm}^2$$

Aun cuando este área equivalente es ligeramente menor que el área equivalente del entrehierro de la rama exterior, los cálculos subsiguientes se basan en la hipótesis de que el efecto combinado de ambos entrehierros es el mismo que el efecto de un solo entrehierro cuya área A_a sea de $0,83 \text{ cm}^2$ (ec. 120) y cuya longitud l_a sea de $0,0254 \text{ cm}$ (ec. 119).

Mediante las ecuaciones (17) y (18) del capítulo III, se determina la situación de la recta negativa del entrehierro. La intersección de dicha recta con el eje de las H es:

$$\frac{F_{cc}}{l_s} = \frac{126}{11,2} = 11,2 \text{ Oe} \quad (121)$$

y su intersección con el eje de las B es:

$$\frac{\mu_0 A_a F_{cc}}{A_s l_a} = \frac{1,00 \times 0,83 \times 126}{0,76 \times 0,0254} = 5\,420 \text{ G} \quad (122)$$

donde μ_0 es la permeabilidad del vacío.

Las coordenadas del punto de intersección de la curva de imanación con la recta negativa del entrehierro da los valores del campo magnético continuo H_{cc} y de la inducción magnética en el acero, en ausencia de campo magnético alterno. De la figura 29 resulta que el valor de H_{cc} que hay que utilizar en la figura 26 es, aproximadamente, $0,55 \text{ Oe}$.

Para poder obtener la permeabilidad incremental μ_{ca} , deberemos calcular el valor máximo B_{max} de la componente alterna de la inducción magnética en el hierro. Para determinar B_{max} hay que calcular el valor máximo ϕ_{max} de la componente alterna del flujo necesario para generar una tensión eficaz de 50 V a 120 Hz . Este es, en virtud de la ecuación (19),

$$\begin{aligned} \phi_{max} &= \frac{E}{4,44 f N} = \frac{50}{4,44 \times 120 \times 5\,000} \\ &= 1,88 \times 10^{-5} \text{ Wb, o sea, } 1\,880 \text{ Mx.} \end{aligned} \quad (123)$$

Para un factor de apilamiento de $0,94$, el área total del acero en la rama central, que transporta el flujo total, es

$$0,94 \times 0,500 \times 0,500 = 0,235 \text{ pulg}^2 = 1,52 \text{ cm}^2 \quad (124)$$

Luego la componente alterna de la inducción magnética en el acero es:

$$B_{max} = \frac{1\,880}{1,52} = 1\,240 \text{ G.} \quad (125)$$

De la figura 26 resulta que la permeabilidad incremental relativa μ_{ca}/μ_0 correspondiente a un H_{cc} de $0,55 \text{ Oe}$ y una B_{max} de 1240 G es, aproximadamente, de $2\,000$. Luego, en unidades Giorgi racionalizadas,

$$\mu_{ca} = 2\,000 \times 4\pi \times 10^{-7} \quad (126)$$

y en unidades Giorgi sin racionalizar,

$$\mu_{ca} = 2\,000 \times 10^{-7} \quad (126 \text{ bis})$$

Para calcular el coeficiente de autoinducción aparente se determinan los flujos incrementales por ampere que atraviesan la bobina, calculando previamente la reluctancia del circuito magnético. Como el plano *aa* de la figura 28 divide al circuito magnético en dos partes iguales puestas en paralelo, la reluctancia es la mitad del valor de una de esas partes. Expresando todas las cantidades en unidades Giorgi, el coeficiente de autoinducción vendrá dado en henry.

La reluctancia \mathcal{R}_s de la parte de acero del camino en cada mitad de la bobina es

$$\mathcal{R}_s = \frac{l_s}{\mu_{ca} A_s} \quad (127)$$

y sustituyendo los valores de l_s y A_s (cc. 117 y 118) convertidos al sistema Giorgi no racionalizado, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_s &= \frac{0,112}{2\,000 \times 10^{-7} \times 0,76 \times 10^{-4}} \\ &= 0,74 \times 10^7 \text{ unidades Giorgi no relacionadas.} \end{aligned} \quad (128)$$

en el sistema Giorgi racionalizado, el valor sería este dividido por 4π .

Como en los cálculos anteriores, los entrehierros de cada mitad del circuito magnético se consideran equivalentes a un solo entrehierro cuya longitud l_a viene dada por la ecuación (119) y cuya área A_a viene dada por la ecuación (120). Por tanto, la reluctancia \mathcal{R}_a de los entrehierros en cada mitad del circuito magnético es:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_a &= \frac{l_a}{\mu_0 A_a} = \frac{0,0254 \times 10^{-2}}{10^{-7} \times 0,83 \times 10^{-4}} \\ &= 3,06 \times 10^7 \text{ unidades Giorgi no racionalizadas.} \end{aligned} \quad (129)$$

La reluctancia eficaz de cada mitad del circuito magnético es la suma de las ecuaciones (128) y (129), y la reluctancia combinada de las dos mitades en paralelo es:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \frac{0,74 + 3,06}{2} \times 10^7 \\ &= 1,90 \times 10^7 \text{ unidades Giorgi no racionalizadas.} \end{aligned} \quad (130)$$

El coeficiente de autoinducción aparente L_a en henry es el flujo que atraviesa la bobina debido a cada ampere de intensidad de la corriente que circula por ella. Un ampere en la bobina crea una fuerza magnetomotriz de 5 000 ampere-espira (que en el sistema Giorgi no racionalizado sería $4\pi \times 5\,000$ u. g.). La reluctancia dada por la ecuación (129), para expresarla en el sistema Giorgi racionalizado basta dividirla por 4π . Por tanto, el flujo creado por la fuerza magnetomotriz de 5 000 ampere-espira es:

$$\phi = \frac{4\pi \times 5\,000}{1,90 \times 10^7} = 0,00330 \text{ Wb.} \quad (131)$$

resultado que coincide con el que se obtendría empleando las magnitudes expresadas en el sistema sin racionalizar, pues en él, la fuerza magnetomotriz vale $4\pi \times 5\,000$.

Este flujo atraviesa 5 000 espiras; luego el coeficiente de autoinducción es:

$$L_a = \frac{N\phi}{I} \quad (132)$$

$$= 5\,000 \times 0,00330 = 16,5 \text{ H,} \quad (133)$$

que es el resultado buscado.

Obsérvese que la determinación de H_{cc} a partir de la curva de imanación normal, y por tanto, los valores de μ_{ca} y \mathcal{R}_s , no son de gran precisión. No obstante, el término correspondiente al acero sólo constituye un 20 % de la reluctancia total; por tanto, el resultado total es mucho más preciso que el valor de la reluctancia del acero. En realidad, los datos más inciertos de estos cálculos son probablemente las longitudes de los entrehierros, las cuales no pueden conocerse con la misma precisión que los demás datos. En estos cálculos no suele ser necesaria una gran precisión, admitiéndose siempre un error comprendido entre el 5 y el 10 %.

El ejemplo anterior ilustra el cálculo del funcionamiento de una bobina determinada. En la práctica, el problema más corriente es el de diseñar la bobina más pequeña o más económica que tenga unas características prefijadas. Ello entraña la selección de la mejor forma y tamaño del núcleo que pueda construirse con láminas troqueladas con los troqueles de que se dispone, y la determinación del entrehierro óptimo. En general, el diseño de tales bobinas lleva consigo cálculos del tipo anteriormente presentado, junto con extensiones o generalizaciones para determinar los efectos que aparecerían sobre el funcionamiento al variar las dimensiones de la bobina. La teoría de modelos que se presenta brevemente en el capítulo VII suele ser muy útil para dicho diseño.

PROBLEMAS

1. Se ajusta una corriente de excitación sinusoidal aplicada a un devanado de un transformador con núcleo de hierro de manera que la inducción magnética máxima en el núcleo sea de 10000 G. En la tabla siguiente se consignán datos correspondientes a la mitad superior del ciclo simétrico de histéresis para dicha inducción magnética máxima,

B — gauss	H — oersted
0	+ 0,60
2.000	+ 0,65
4.000	+ 0,73
6.000	+ 0,92
7.000	+ 1,07
8.000	+ 1,30
9.000	+ 1,70
10.000	+ 2,43
9.500	+ 1,00
9.000	+ 0,53
8.000	+ 0,03
7.000	— 0,23
6.000	— 0,37
4.000	— 0,50
2.000	— 0,57
0	— 0,60

Supónganse despreciables las corrientes de Foucault y los efectos de las juntas existentes en el circuito magnético.

a) Representar gráficamente la forma de onda del flujo. Se sugiere las siguientes escalas:

1000 gauss por cm
0,5 oersted por cm
15° por cm

b) Representar gráficamente la forma de onda de la tensión inducida.

2. A un devanado del transformador del problema 1, se aplica una tensión sinusoidal que crea una inducción magnética máxima de 10000 G. Dibujar el ciclo $B(H)$ resultante cuando la intensidad eficaz de la componente de la corriente de pérdida por corrientes de Foucault de la corriente de excitación es el 10 % de la intensidad eficaz total de la corriente de excitación.

3. Hallar las admitancias de excitación I_ϕ/E , para el transformador del problema 1, para las siguientes condiciones: 1.º, inducción magnética máxima 10 000 G, tensión aplicada de la forma: $e = E_{\max} \sin \omega t - 0,3 E_{\max} \sin 3\omega t$, 2.º, inducción magnética máxima 10 000 G, tensión aplicada de la forma: $e = E_{\max} \sin \omega t$.

4. Si la tensión inducida en una bobina es de la forma $E_1 \sin \omega t + kE_1 \sin 3\omega t$, ¿qué valor máximo puede tener k para que el ciclo de histeresis no presente lacitos secundarios?

a) Si k es positivo?

b) si k es negativo?

5. Un transformador para 240 V, 60 Hz se conecta a un generador sinusoidal de

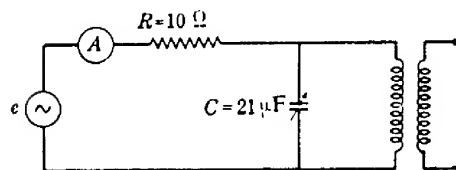


FIG. 30. Conexión del transformador del problema 5.

240 V, 60 Hz a través de una línea de resistencia 10 ohm. Entre los terminales del transformador se conecta un condensador variable en la forma indicada en la figura 30. Cuando el transformador funciona en vacío, la intensidad eficaz que indica el amperímetro A resulta ser mínima cuando se ajusta el condensador a una capacidad de 21 μ F. En tal caso, la intensidad eficaz es de 0,60 A y un registro oscilográfico indica que su contenido de armónicos es:

$$i = I_1 \sqrt{2} (\cos \omega t - 2,57 \sin 3\omega t + 0,19 \cos 3\omega t + 0,69 \sin 5\omega t) \quad (134)$$

si la tensión del generador está expresada por

$$e = E \sqrt{2} \cos \omega t. \quad (135)$$

Despreciando la resistencia del devanado del transformador, hallar:

a) La forma de onda de la tensión inducida en el transformador,

b) La intensidad eficaz de la corriente suministrada por el generador expresada como tanto por ciento de la intensidad eficaz de la corriente de excitación del transformador.

6. En una región en que dos distribuciones de potencia de frecuencias 50 Hz y 60 Hz, alimentan zonas adyacentes, una tormenta avería un transformador de potencia de 1000 kVA para 11000 : 2200 V, 50 Hz. Este transformador se sustituye temporalmente por otro de repuesto prestado por el sistema de distribución de 60 Hz y cuyas características son: 1000 kVA, 12000 : 2400 V, 60 Hz. Surge la cuestión de si los terceros armónicos de la corriente de excitación ocasionarán interferencia inductiva en un circuito telefónico adyacente a la línea de transmisión de 11000 V, 50 Hz que alimentaría el primario del transformador de recambio. Como primera etapa en la resolución de este problema, determinar el valor eficaz del tercer armónico de la corriente de excitación en la línea de 11000 V, 50 Hz, cuando se utiliza la unidad de 60 Hz en el sistema de 50 Hz.

Se dispone de los siguientes datos referentes a la constitución del transformador de reserva para 60 Hz:

Número de espiras del devanado de alta tensión = 400.

Número de espiras del devanado de baja tensión = 80.

Material del núcleo: acero con un 4,25 % de silicio (sus características son las de las figuras 19, 20 y 21).

Área de la sección recta del núcleo = 172 pulg².

Factor de apilamiento = 0,90.

El ensayo para la aceptación del transformador de repuesto de 60 Hz, ha dado los siguientes datos de funcionamiento en vacío:

Tensión = 2400 V aplicada al devanado de baja tensión.

Intensidad de la corriente de excitación en el devanado de baja tensión = 11,3 A.

Pérdida en el núcleo = 7,15 kW.

Frecuencia = 60 Hz.

Los valores del tercer armónico de la corriente de excitación, expresados en tanto por ciento del valor eficaz de la corriente de excitación total, para diferentes valores de la inducción magnética máxima, son los siguientes consignados en la tabla:

B_{\max} (kMx/pulg ²)	65	70	75	80	85
% del tercer armónico	29,5	33,1	36,9	41,0	45,6

7. Un transformador monofásico para 6600 V 60 Hz tiene un núcleo laminado de acero con 4,25 % de silicio (para el cual las características magnéticas son las consignadas en las figuras 19, 20 y 21), siendo el factor de apilamiento igual a 0,90. El área de la sección recta del núcleo es aproximadamente igual a 35 pulg², la longitud media es 88 pulg, y hay cuatro juntas solapadas. Cada una de ellas debe considerarse que requiere diez veces más ampere-espiras reactivos que los requeridos por pulgada de núcleo.

Si el transformador debe trabajar a la tensión y frecuencia características y con una inducción magnética máxima de 70 kMx/pulg²:

a) ¿Cuántas espiras debe contener el devanado de 6600 V?

b) ¿Qué intensidad eficaz reactiva exige el núcleo?

c) ¿Cuál será la intensidad de pérdida en el núcleo?

d) ¿Cuál será la intensidad total en vacío?

e) ¿Qué intensidad eficaz de la corriente en vacío consumiría el transformador si se insertara en el núcleo un entrehierro de longitud 0,2 pulg? La forma de onda de la corriente en vacío sin entrehierro es

$$i = I_{1\max} [\sin \omega t + 0,35 \sin (3\omega t + \alpha_3) + 0,05 \sin (5\omega t + \alpha_5)]. \quad (136)$$

8. Se quiere construir una bobina para 115 V que tenga una reactancia de 100 ohm a 60 Hz con una pérdida no superior a 22 W. Se dispone de láminas troqueladas de las dimensiones indicadas en la figura 31. El material es acero al silicio de características iguales a las dadas por las figuras 19, 20 y 21.

Determinar las dimensiones del núcleo y el número de espiras que habría que utilizar para reunir los requisitos. Formúlense hipótesis apropiadas referentes al factor de apilamiento y a la fuerza magnetomotriz requerida por las juntas. Despréciase la pérdida en el cobre.

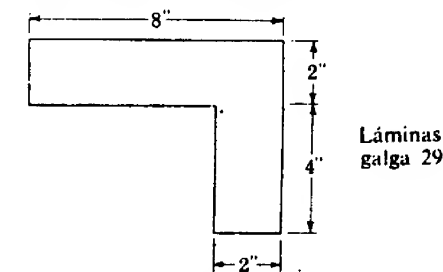


FIG. 31. Lámina troquelada, Problema 8.

9. Una bobina de choke consta de 1 000 espiras de hilo núm. 16, devanadas sobre un núcleo de acero al silicio 4,25 % cuyas dimensiones son las indicadas en la figura 32.

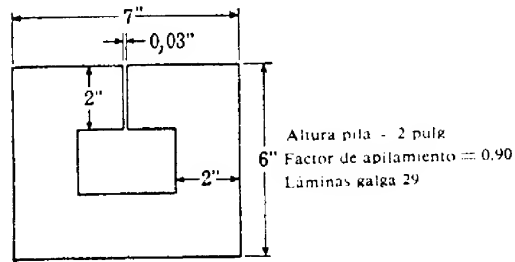


FIG. 32. Lámina troquelada. Problema 9.

10. Las tablas siguientes corresponden a un transformador monofásico de 10 kVA 2400 : 240 V, 60 Hz. La resistencia efectiva del devanado de 240 V a 60 Hz, es aproximadamente igual a 0,05 ohm.

A SU TENSION CARACTERÍSTICA

Frecuencia, Hz	Corriente de excitación, A	Pérdida en el núcleo, W
40	4,32	71,0
50	1,63	54,5
60	1,27	50,0
70	1,16	47,3

A SU FRECUENCIA CARACTERÍSTICA

Tensión entre terminales, V	Corriente de excitación, A	Pérdida en el núcleo, W
180	1,02	32,0
220	1,16	44,5
260	1,45	61,0
300	1,90	78,5

a) Determinar los parámetros de circuitos equivalentes de los tipos de las figuras 24c y 24d, a partir de los datos consignados en las tablas anteriores.

b) A partir de los circuitos equivalentes hallados en el apartado a), manteniendo constantes los parámetros, trazar las curvas de la pérdida en el núcleo y de la corriente magnetizante en función de la tensión y de la frecuencia. Comparar estas curvas con las curvas trazadas a partir de los datos originales.

Sus características magnéticas son las representadas en las figuras 19, 20 y 21. Supóngase que la longitud media por espira es de 15 pulgadas y que la resistencia efectiva del hilo es 1,01 veces su resistencia a la corriente continua. Calcular un circuito equivalente de la forma indicada en la figura 24d:

a) Para una tensión aplicada de 900 V, 60 Hz

b) Para una tensión aplicada de 450 V, 60 Hz.

11. En la figura 33, puede verse la sección recta de un núcleo laminado para bobina construido con acero al silicio del 3,6 %, galga 29. Los datos magnéticos son los de las figuras 26 y 29. Con este núcleo hay que diseñar una bobina que ha de utilizarse en un

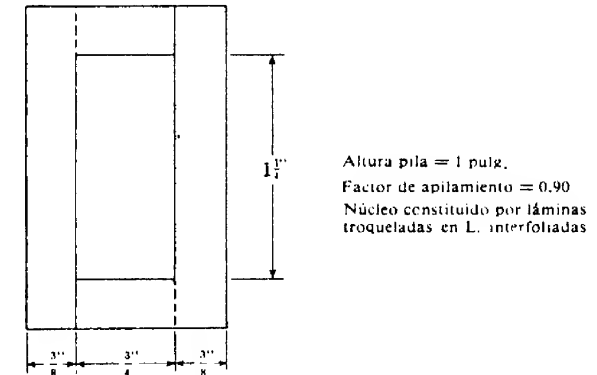


FIG. 33. Núcleo de la bobina del problema 11.

filtro para rectificador de poca potencia. La intensidad continua máxima que ha de transportar la bobina es 60 mA. La tensión alterna aplicada a la bobina tiene un valor eficaz de 140 V y una frecuencia de 120 Hz.

a) ¿Cuál es el mínimo número de espiras que hay que emplear para lograr una autoinducción no inferior a 2 H cuando $I_{cc} = 60$ mA?

b) ¿Cuál sería el coeficiente de autoinducción de la bobina cuando $I_{cc} = 15$ mA si estuviera devanada con el número de espiras calculado en el apartado a)?

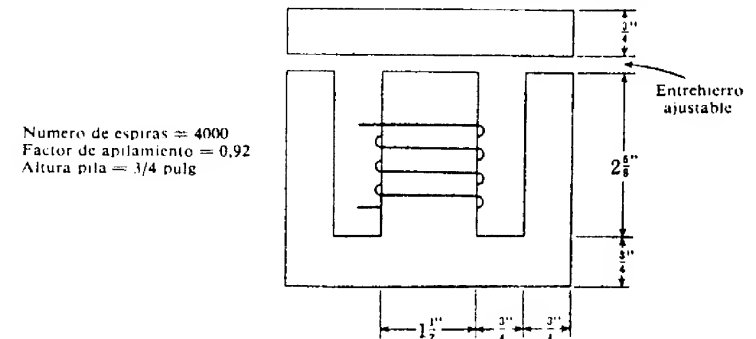


FIG. 34. Bobina con entrehierro ajustable, Problema 12

12. Se construye una bobina especial para laboratorio con entrehierro variable, del tipo indicado en la figura 34. Los datos magnéticos son los consignados en las figuras 26 y 29.

a) ¿A qué longitud habrá que ajustar el entrehierro para lograr la tensión, intensidad de corriente y autoinducción del problema 11a?

b) ¿Cuál será el coeficiente de autoinducción de la bobina, con el entrehierro ajustado en la forma obtenida en el apartado a), para la tensión e intensidad especificadas en el problema 11b?

Teoría de modelos y diseño de bobinas con núcleo de hierro

Como los materiales magnéticos de los núcleos carecen de linealidad en sus propiedades, la manera más fácil de determinar las características de los aparatos que los contienen suele ser la determinación experimental. El análisis, aun siendo valiosísimo, es en gran parte empírico y por tanto deberá verificarse mediante datos experimentales verdaderos. Sin embargo, utilizando la teoría de modelos, los datos experimentales obtenidos de un prototipo pueden aplicarse rigurosamente a todos los tipos semejantes geoméricamente, independientemente de su tamaño, con tal que se observen ciertas condiciones de semejanza. Este concepto es muy importante y se aplica a todos los sistemas no lineales en general, aun cuando aquí sólo se considerará su aplicación a aparatos que contienen núcleos de hierro.

Podemos decir que la condición fundamental de semejanza eléctrica entre dos bobinas (u otros dos aparatos) de igual forma pero diferente tamaño es que los valores de las variables que caracterizan el estado del medio no lineal deben ser los mismos para puntos correspondientes de las dos bobinas. En otras palabras, si se realizan representaciones tridimensionales de los campos en el interior y en las proximidades de dos bobinas semejantes y luego se reduce o amplía una representación hasta alcanzar el tamaño de la otra, ambas deberán coincidir. Considerando algunos ejemplos específicos se aclarará esta idea.

1. RELACIONES GENERALES

Consideremos, en primer lugar, una bobina cuyas características se conozcan en función de la inducción magnética B en una parte del núcleo. En el estudio que vamos a realizar, a esta bobina se le llamará *prototipo*. Para mayor sencillez, la tensión aplicada y la inducción magnética se supondrán de forma de onda sinusoidal y de frecuencia constante. En todo el análisis supondremos que la frecuencia es suficientemente baja para poder despreciar los efectos de las capacidades distribuidas del devanado. Esta hipótesis se hace para simplificar el estudio y fijar la atención en los principales puntos del argumento, cuales son los principios generales de la teoría de modelos aplicados a dispositivos no lineales. Sin embargo, el lector puede comprender que los efectos de las capacidades pueden hacerse muy importantes a frecuencias elevadas y que el análisis que se presenta en este capítulo debe extenderse para incluir los efectos capacitivos cuando se aplique la teoría de modelos a problemas de alta frecuencia.

Supongamos que los valores indicados a continuación con el subíndice 0 han sido observados en la bobina prototipo. Puede utilizarse cualquier sistema compatible de unidades no racionalizadas.

A_{s0} \equiv área de la sección recta del material magnético en cualquier sección proveniente del núcleo
 l_{s0} \equiv longitud media del camino del flujo,
 N_0 \equiv número de espiras del devanado,
 R_0 \equiv resistencia del devanado,
 V_0 \equiv tensión eficaz aplicada,
 I_0 \equiv intensidad eficaz de la corriente,
 P_0 \equiv potencia media absorbida por la bobina.

A partir de estos valores medios, pueden calcularse las siguientes cantidades:

$$Z_{a0} \equiv \text{impedancia aparente de la bobina}$$

$$= \frac{V_0}{I_0} \quad (1)$$

$$\cos \theta_{a0} \equiv \text{factor de potencia aparente}$$

$$= \frac{P_0}{V_0 I_0} \quad (2)$$

$$R_{a0} \equiv \text{resistencia aparente}$$

$$= Z_{a0} \cos \theta_{a0} = \frac{P_0}{I_0^2} \quad \blacktriangleright (3)$$

$$X_{a0} \equiv \text{reactancia aparente}$$

$$= Z_{a0} \sin \theta_{a0} = \sqrt{Z_{a0}^2 - R_{a0}^2} \quad \blacktriangleright (4)$$

$$L_{a0} \equiv \text{coeficiente de autoinducción aparente}$$

$$= \frac{X_{a0}}{\omega} \quad \blacktriangleright (5)$$

Muchas aplicaciones de las bobinas exigen que el cociente de la reactancia partido por la resistencia sea grande. Este cociente suele representarse por el símbolo Q y puede considerársele como un factor de calidad. En una bobina de alta Q , a la autoinducción deseada se asocia una pérdida pequeña. La Q de la bobina prototipo es

$$Q_{a0} \equiv \frac{X_{a0}}{R_{a0}} = \frac{\omega L_{a0}}{R_{a0}} = \omega T_{a0}, \quad \blacktriangleright (6)$$

donde,

$$T_{a0} \equiv \frac{L_{a0}}{R_{a0}} \equiv \text{constante de tiempo.} \quad (7)$$

Para estudiar los efectos de los cambios en el diseño deberán separarse los efectos del núcleo de los del devanado. En el apartado 13 del capítulo VI se ha visto que la

bobina puede representarse por un circuito equivalente que comprende la resistencia del devanado en combinación con un montaje serie o paralelo de una resistencia y una autoinducción, tal como se indica en la figura 1. En estos circuitos,

$E_0 \equiv$ tensión eficaz inducida por el flujo.

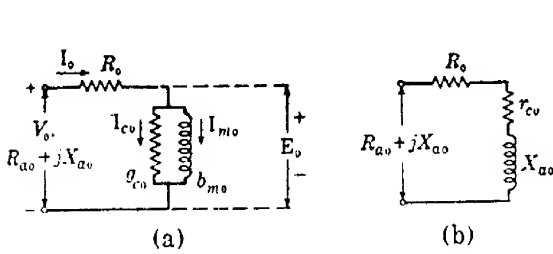


FIG. 1. Circuitos equivalentes para una bobina con núcleo de hierro.

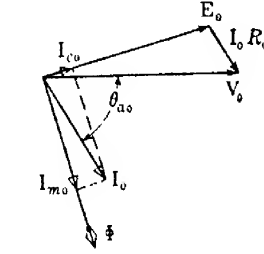


FIG. 2. Diagrama vectorial para una bobina con núcleo de hierro.

En la figura 2 puede verse el diagrama vectorial, del cual resulta la ecuación vectorial

$$E_0 = V_0 - I_0 R_0. \quad (8)$$

La pérdida en el núcleo puede determinarse a partir de la potencia de entrada medida; así.

$$\begin{aligned} P_{c0} &\equiv \text{pérdida en el núcleo} \\ &= P_0 - I_0^2 R_0. \end{aligned} \quad (9)$$

La intensidad puede descomponerse en sus componentes de pérdida en el núcleo y magnetizante y los parámetros del circuito equivalente de la figura 1a pueden determinarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} I_{c0} &\equiv \text{componente de pérdida en el núcleo de la intensidad} \\ &= \frac{P_{c0}}{E_0} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} g_{c0} &\equiv \text{conductancia de pérdida en el núcleo} \\ &= \frac{I_{c0}}{E_0} = \frac{P_{c0}}{E_0^2} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} I_{m0} &\equiv \text{componente magnetizante de la intensidad} \\ &= \sqrt{I_0^2 - I_{c0}^2} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} b_{m0} &\equiv \text{susceptancia magnetizante} \\ &= -\frac{I_{m0}}{E_0}. \end{aligned} \quad (13)$$

El signo negativo de la ecuación (13) indica que b_{m0} es una susceptancia inductiva. En la figura 1a, la admitancia vectorial del circuito paralelo que representa los efectos

del núcleo vistos desde el devanado —y que de ahora en adelante llamaremos admitancia vectorial del núcleo— es:

$$\begin{aligned} Y_{\varphi 0} &\equiv \text{admitancia vectorial del núcleo} \\ &= g_{c0} + j b_{m0}. \end{aligned} \quad (14)$$

Las relaciones entre los parámetros de los circuitos equivalentes de las figuras 1a y 1b, son:

$$\begin{aligned} Z_{\varphi 0} &\equiv \text{impedancia vectorial del núcleo} \\ &= \frac{1}{Y_{\varphi 0}} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} r_{c0} &\equiv \text{resistencia equivalente serie de la pérdida en el núcleo} \\ &= \text{parte real de } Z_{\varphi 0} \\ &= \frac{g_{c0}}{g_{c0}^2 + b_{m0}^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Obsérvese que r_{c0} no es igual a $1/g_{c0}$.

$$\begin{aligned} X_{a0} &\equiv \text{reactancia equivalente serie} \\ &= \text{parte imaginaria de } Z_{\varphi 0} \\ &= \frac{-b_{m0}}{g_{c0}^2 + b_{m0}^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Las condiciones magnéticas en el núcleo son las siguientes:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &\equiv \text{valor eficaz del flujo alterno que atraviesa toda la bobina} \\ &= \frac{E_0}{\omega} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \phi_0 &\equiv \text{valor eficaz del flujo alterno a través de cada espira} \\ &= \frac{\lambda_0}{N_0} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} B_0 &\equiv \text{valor eficaz de la inducción magnética en la sección recta de área } A_{s0} \\ &= \frac{\phi_0}{A_{s0}} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} F_0 &\equiv \text{valor eficaz de la fuerza magnetomotriz} \\ &= 4\pi N_0 I_{m0} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} H_0 &\equiv \text{valor eficaz de la fuerza magnetomotriz por unidad de longitud} \\ &= \frac{F_0}{l_{s0}} \end{aligned} \quad (22)$$

Las ecuaciones (19) y (20) suponen que todo el flujo se halla canalizado por el núcleo y que la inducción magnética es uniforme en toda la sección recta de área A_{r0} . Si el flujo se hallara totalmente confinado en el núcleo y la inducción magnética fuera constante en todas las secciones, en todos los puntos la inducción magnética sería igual a B_0 , y la intensidad del campo magnético sería H_0 . No obstante, aun cuando la inducción magnética varíe de un punto a otro, las condiciones magnéticas en el núcleo se pueden especificar por completo en función de una B_0 media en una sección conveniente cualquiera y un H_0 medio, y por tanto el siguiente análisis incluye los efectos de las fugas magnéticas y es aplicable a núcleos de forma arbitraria.

► A partir de los resultados obtenidos en el prototipo (Ecs. 1-22), puede predecirse el funcionamiento de cualquier bobina semejante geoméricamente al prototipo para condiciones de funcionamiento que den las mismas condiciones magnéticas en puntos correspondientes. ◀

En los apartados siguientes se ilustran varias aplicaciones de estos principios.

2. EFECTOS DE LOS CAMBIOS EN EL DEVANADO

Consideremos a continuación una bobina con un núcleo igual al del prototipo y una bobina de igual peso y distribución geométrica, pero cuyo número de espiras sea a veces mayor, con lo que se precisará, naturalmente, un hilo más fino. La nueva bobina debe funcionar a la misma frecuencia que el prototipo. Aun cuando en el estudio que se realiza a continuación se desprecian las capacidades de las espiras, sus efectos pueden ser importantes. Un aumento del número de espiras lleva consigo aumentos de la autoinducción y de las capacidades, y por tanto se disminuye la frecuencia a la cual se hacen importantes los efectos capacitivos. Aun cuando en el prototipo puedan carecer de importancia los efectos capacitivos, podrán tenerla en la nueva bobina a la misma frecuencia si las espiras son mayores que las del prototipo. Designando con el subíndice 1 a los valores correspondientes a la nueva bobina, por semejanza

$$B_1 = B_0 \quad \blacktriangleright (23)$$

$$H_1 = H_0 \quad \blacktriangleright (24)$$

$$\phi_1 = \phi_0 \quad (25)$$

$$F_1 = F_0 \quad (26)$$

$$P_{c1} = P_{c0} \quad (27)$$

$$N_1 = aN_0 \quad (28)$$

$$\lambda_1 = a\lambda_0 \quad (29)$$

$$E_1 = aE_0 \quad \blacktriangleright (30)$$

y como los núcleos son iguales

Pero

y por tanto, para el mismo flujo,

Para la misma pérdida en el núcleo

$$I_{c1} = \frac{P_{c1}}{E_1} = \frac{P_{c0}}{aE_0} = \frac{I_{c0}}{a} \quad (31)$$

$$g_{c1} = \frac{I_{c1}}{E_1} = \frac{I_{c0}}{a^2E_0} = \frac{g_{c0}}{a^2} \quad (32)$$

Para la misma fuerza magnetomotriz pero un número de espiras a veces mayor,

$$I_{m1} = \frac{I_{m0}}{a} \quad (33)$$

$$b_{m1} = -\frac{I_{m1}}{E_1} = -\frac{I_{m0}}{a^2E_0} = \frac{b_{m0}}{a^2} \quad (34)$$

Luego, la admitancia vectorial del núcleo es:

$$Y_{\varphi 1} = g_{c1} + jb_{m1} = \frac{Y_{\varphi 0}}{a^2} \quad (35)$$

Luego, la impedancia del núcleo es:

$$Z_{\varphi 1} = a^2Z_{\varphi 0} \quad (36)$$

y sus componentes serie resistencia y reactancia son:

$$r_{c1} = a^2r_{c0} \quad (37)$$

$$X_{a1} = a^2X_{a0} \quad \blacktriangleright (38)$$

Para el mismo peso de cobre e iguales disposiciones geométricas y factores espaciales de los devanados, el nuevo devanado tiene una longitud de hilo a veces mayor, si bien su sección recta deberá ser $1/a$ del área de la sección recta del hilo del prototipo. Por tanto, la resistencia del devanado de la nueva bobina es:

$$R_1 = a^2R_0 \quad (39)$$

Según la figura 1b, la resistencia aparente es la suma de la resistencia del devanado más la resistencia serie de pérdida en el núcleo, luego,

$$R_{a1} = R_1 + r_{c1} = a^2(R_0 + r_{c0}) = a^2R_{a0} \quad \blacktriangleright (40)$$

De las ecuaciones (38) y (40), el factor de calidad Q_{a1} de la nueva bobina es:

$$Q_{a1} = \frac{X_{a1}}{R_{a1}} = \frac{a^2X_{a0}}{a^2R_{a0}} = Q_{a0} \quad \blacktriangleright (41)$$

► Así, la bobina cuyo número de espiras sea a veces mayor, tiene una reactancia aparente a^2 veces mayor que la resistencia aparente. No obstante, la razón Q_a de la reactancia a la resistencia, es la misma que en el prototipo. ◀

Como tanto las componentes de pérdida en el núcleo y magnetizante de la corriente son ambas $1/a$ de los valores en el prototipo, la intensidad de la corriente en la nueva bobina es:

$$I_1 = \frac{I_0}{a}. \quad \blacktriangleright(42)$$

La pérdida en el cobre en el devanado de la nueva bobina es:

$$I_1^2 R_1 = \left(\frac{I_0}{a}\right)^2 a^2 R_0 = I_0^2 R_0. \quad \blacktriangleright(43)$$

► Así, para una distribución geométrica fija del devanado y un peso constante del cobre, la pérdida por efecto Joule en el devanado es independiente del número de espiras mientras no se alteren las condiciones magnéticas en el núcleo. ◀

La caída óhmica en el devanado de la nueva bobina es:

$$I_1 R_1 = \frac{I_0}{a} a^2 R_0 = a I_0 R_0 \quad (44)$$

Por la ecuación (30), la tensión inducida E_1 es igual a aE_0 , y por tanto la tensión aplicada, que es igual a la suma vectorial de la tensión inducida y de la caída óhmica en el devanado, es

$$V_1 = a V_0. \quad \blacktriangleright(45)$$

► Así, para las condiciones de semejanza (Ecs. 23 y 24), la nueva bobina deberá funcionar a una tensión aplicada a veces mayor que la del prototipo. La intensidad de la corriente en la nueva bobina es $1/a$ de la intensidad en el prototipo, siendo iguales en ambas bobinas la potencia y los vat-ampere. ◀

3. EFECTOS DE LOS CAMBIOS EN LAS DIMENSIONES LINEALES

Como segunda modificación, consideremos una bobina que tenga el mismo número de espiras que el prototipo, pero que tenga todas las dimensiones lineales salvo el espesor de las láminas (que permanece inalterado) k veces mayores que las del prototipo. La nueva bobina debe funcionar a la misma frecuencia que el prototipo. Si se designan por el subíndice 2 los nuevos valores, por semejanza,

$$B_2 = B_0 \quad \blacktriangleright(46)$$

$$H_2 = H_0 \quad \blacktriangleright(47)$$

Como el área de la sección recta del núcleo de la nueva bobina es k^2 veces mayor que la del prototipo,

$$\phi_2 = k^2 \phi_0$$

y como la longitud media del camino del flujo en la nueva bobina es k veces la del prototipo,

$$F_2 = k F_0. \quad (48)$$

La ecuación (48) supone que la fuerza magnetomotriz requerida por las juntas en el núcleo es proporcional a las dimensiones lineales —hipótesis que puede ser errónea—. Por tanto, la ecuación (48) puede no ser precisa si son importantes las juntas. El volumen del núcleo de la nueva bobina es k^3 veces mayor que el del prototipo y por tanto, para la misma frecuencia, inducción magnética y espesor de las láminas

$$P_{c2} = k^3 P_{c0}. \quad (49)$$

En la ecuación (49) se desprecian los efectos de las variaciones de presión de apilamiento, corrientes de Foucault entre láminas y otras variables más o menos indeterminadas.

El número de espiras en una y otra bobina es el mismo, o sea,

$$N_2 = N_0, \quad (50)$$

y por tanto, para un flujo $k^2 \phi_0$, el flujo total que atraviesa la bobina es:

$$\lambda_2 = k^2 \lambda_0 \quad (51)$$

y la tensión inducida es:

$$E_2 = k^2 E_0. \quad \blacktriangleright(52)$$

De las ecuaciones (49) y (52),

$$I_{c2} = \frac{P_{c2}}{E_2} = \frac{k^3 P_{c0}}{k^2 E_0} = k I_{c0} \quad (53)$$

$$g_{c2} = \frac{I_{c2}}{E_2} = \frac{k I_{c0}}{k^2 E_0} = \frac{g_{c0}}{k}. \quad (54)$$

Para una fuerza magnetomotriz $k F_0$ y el mismo número de espiras, la corriente magnetizante en la nueva bobina tiene una intensidad

$$I_{m2} = k I_{m0}, \quad \blacktriangleright(55)$$

y la susceptancia magnetizante es:

$$b_{m2} = \frac{I_{m2}}{E_2} = \frac{k I_{m0}}{k^2 E_0} = \frac{b_{m0}}{k}. \quad (56)$$

Por tanto, la admitancia vectorial del núcleo es:

$$Y_{\varphi 2} = g_{c2} + j b_{m2} = \frac{Y_{\varphi 0}}{k}, \quad (57)$$

la impedancia del núcleo es:

$$Z_{\varphi 2} = k Z_{\varphi 0}, \quad (58)$$

y sus componentes resistiva y reactiva son:

$$r_{c2} = kr_{c0} \quad (59)$$

$$X_{a2} = kX_{a0}. \quad \blacktriangleright(60)$$

Para distribuciones geométricas semejantes e iguales factores espaciales, el nuevo devanado tiene un hilo k veces más largo, pero el área de la sección recta del hilo del nuevo devanado es k^2 veces el área de la sección recta del hilo del prototipo. Por tanto, la resistencia del devanado de la nueva bobina es:

$$R_2 = \frac{kR_0}{k^2} = \frac{R_0}{k}. \quad (61)$$

La resistencia aparente es:

$$R_{a2} = R_2 + r_{c2} = \frac{R_0}{k} + kr_{c0}. \quad \blacktriangleright(62)$$

El factor de calidad Q_{a2} de la nueva bobina es:

$$Q_{a2} = \frac{X_{a2}}{R_{a2}} = \frac{kX_{a0}}{\frac{R_0}{k} + kr_{c0}} = \frac{X_{a0}}{\frac{R_0}{k^2} + r_{c0}}. \quad \blacktriangleright(63)$$

En la bobina k veces mayor existen diferencias fundamentales respecto al prototipo. El factor de calidad es más elevado para k mayor que la unidad.

► Así, si se hace mayor la bobina, podrá incrementarse la Q_a de una bobina de forma fija. ◀

Obsérvese, sin embargo, que Q_a se incrementa solamente a causa de la reducción de resistencia del devanado; o sea,

$$\frac{X_{a2}}{R_2} = k^2 \frac{X_{a0}}{R_0}. \quad (64)$$

El cociente de dividir la reactancia por la resistencia serie de pérdida en el núcleo es el mismo que en el prototipo; o sea,

$$\frac{X_{a2}}{r_{c2}} = \frac{kX_{a0}}{kr_{c0}} = \frac{X_{a0}}{r_{c0}}. \quad \blacktriangleright(65)$$

► En consecuencia, existe una limitación definida al incremento de Q_a debido únicamente al aumento de tamaño. ◀

De las ecuaciones (52) y (55)

$$E_2 I_{m2} = k^3 E_0 I_{m0}. \quad \blacktriangleright(66)$$

► Así, para el funcionamiento a la misma frecuencia e inducción magnética, los volt-ampere reactivos necesarios para excitar la bobina k veces mayor, es igual a k^3 veces los volt-ampere requeridos por el prototipo. En cierto modo, pues, la «potencia característica» de la bobina k veces mayor es k^3 veces mayor que la del prototipo. ◀

Resumiendo a grandes rasgos las variaciones producidas en bobinas semejantes, resulta que al variar el número de espiras (manteniendo constante el peso del devanado) sólo varían la resistencia y la inductancia sin que varíe su cociente. En cambio, al variar el tamaño varía la constante de tiempo. Si se desea una variación de constante de tiempo sin que varíe la autoinducción, se fija la constante de tiempo variando el tamaño y a continuación una variación adecuada del número de espiras dará la autoinducción deseada.

Estas dos variaciones, de número de espiras y de tamaño, son las únicas que pueden realizarse manteniendo la bobina geoméricamente semejante al prototipo. No obstante, se podrá calcular con bastante precisión el efecto de variaciones no demasiado grandes en la altura de la pila de láminas del núcleo modificando los principios anteriores.

En el análisis anterior no se ha hecho mención a ninguna excitación continua superpuesta. Sin embargo, si se mantiene el campo magnético continuo al valor del prototipo, al igual que se mantiene el campo magnético alterno, los cambios de número de espiras o de tamaño no alteran las condiciones en el material del núcleo y se aplican las mismas relaciones de semejanza.

4. CONSIDERACIONES ENERGÉTICAS

El estudio de los apartados anteriores se basa en la teoría de circuitos de las bobinas con núcleo de hierro; es decir, se considera la bobina como un circuito magnético eslabonado con un circuito eléctrico. La teoría de la bobina puede también desarrollarse basándose en la teoría del campo, considerando la bobina como un campo magnético eslabonado con un campo eléctrico. Los fenómenos principales asociados al campo magnético, la mayor parte del cual se halla confinado en el núcleo, son la acumulación de energía y la conversión de energía en calor originada por las pérdidas en el núcleo. El circuito eléctrico tiene asociados fenómenos análogos debidos a la corriente y a la tensión en el devanado. Aun cuando la energía acumulada en el campo eléctrico (en las capacidades distribuidas entre espiras) pueden ser muy importantes a frecuencias elevadas, en el estudio que sigue a continuación se desprecia, porque en él trataremos principalmente de los fenómenos asociados al núcleo magnético. Los campos eléctrico y magnético se relacionan mediante la ecuación de la fuerza magnetomotriz, la ecuación de la tensión inducida y las dimensiones y propiedades de los materiales del núcleo y devanados.

Muchas de las características importantes de una bobina con núcleo de hierro se pueden deducir en función de la densidad de energía acumulada en el campo magnético, de la densidad de pérdida del núcleo, de la densidad de pérdida en el cobre y de los volúmenes del núcleo y devanados. Este concepto es especialmente útil como base para el diseño no sólo de bobinas con núcleo de hierro, sino también de la mayoría de aparatos electromagnéticos, ya que pueden realizarse amplias gene-

alizaciones sin más que considerar las masas de los materiales que intervienen y las inducciones magnéticas y densidades de corriente a las que se hacen funcionar.

A fin de simplificar la exposición de manera que los puntos importantes destaquen con toda claridad, en el estudio que sigue se desprecia la falta de linealidad de las características magnéticas del hierro. Es decir, se supone constante la permeabilidad del núcleo, con lo que el coeficiente de autoinducción queda constante y la forma de onda de la corriente de excitación para un flujo sinusoidal, es también sinusoidal. También se supone que el flujo se halla confinado totalmente en el núcleo y que éste tiene unas proporciones tales que en todo el hierro se tenga la misma inducción magnética. A pesar de estas hipótesis, sin embargo, resultará evidente que los principales resultados serán aplicables a bobinas con núcleo de hierro de forma cualquiera, y que cuando tengan importancia las fugas magnéticas y la no linealidad, sus efectos podrán determinarse a partir de medidas realizadas en un modelo. Además de los símbolos ya definidos, sean

J	\equiv valor eficaz de la densidad de corriente en el devanado
ρ	\equiv resistividad del cobre del devanado
μ_s	\equiv permeabilidad del núcleo de acero
A_{cu}	\equiv área total de cobre en una sección del devanado
l_{mu}	\equiv longitud media de una espira del devanado
V_{cu}	\equiv volumen del cobre del devanado
V_s	\equiv volumen del núcleo de acero
W_{med}	\equiv valor medio de la energía magnética almacenada en el núcleo
w_{med}	$\equiv W_{med}/V_s$, energía media acumulada por unidad de volumen en el núcleo
p_c	$\equiv P_c/V_s$, pérdida en el núcleo por unidad de volumen de éste.

Como la principal misión de una bobina es absorber potencia reactiva, para poder comprender claramente los fenómenos asociados al comportamiento de las bobinas con núcleo de hierro habrá que conocer la naturaleza física de la potencia reactiva. En los tratados de Electricidad se demuestra que «la potencia reactiva puede interpretarse físicamente como la amplitud de la oscilación de la potencia resultante de la componente de la intensidad de corriente que está en cuadratura con la tensión». Como esta oscilación de la potencia se debe al intercambio de energía entre el generador y el campo magnético, se deduce que la potencia reactiva está asociada con la energía magnética almacenada. La relación puede deducirse del hecho conocido de que la energía acumulada en una autoinducción constante L es $\frac{1}{2}Li^2$ cuando la intensidad instantánea de la corriente es i . Con una corriente alterna permanente, la energía acumulada varía cíclicamente entre cero y un valor máximo. El valor medio de la energía almacenada es

$$W_{med} = \frac{1}{2}L \times (\text{valor medio de } i^2) \quad (67)$$

Pero el valor medio de i^2 es el cuadrado de la intensidad eficaz, y en consecuencia,

$$W_{med} = \frac{1}{2}LI^2, \quad (68)$$

donde I es la intensidad eficaz de la corriente. Multiplicando ambos miembros por 2ω se tiene:

$$2\omega W_{med} = \omega LI^2 = I^2X, \quad \blacktriangleright (69)$$

donde X es la reactancia inductiva, siendo I^2X la potencia reactiva.

► La potencia reactiva absorbida por una autoinducción constante es, pues, igual al producto de 2ω por la energía magnética media acumulada. Este concepto de la naturaleza física de la potencia reactiva en un circuito inductivo, resulta muy útil. ◀

En el apartado 5 del capítulo IV se vio que la energía acumulada en un campo magnético por unidad de volumen es (empleando un sistema de unidades no racionalizado) $b^2/8\pi\mu$ donde b es el valor instantáneo de la inducción magnética y μ (supuesta constante) es la permeabilidad del medio en que existe el campo. Si la inducción magnética es alterna, la energía media acumulada por unidad de volumen es:

$$w_{med} = \frac{\text{valor medio de } b^2}{8\pi\mu} \quad (70)$$

Pero el valor medio de b^2 es el cuadrado de su valor eficaz. Por tanto,

$$w_{med} = \frac{B^2}{8\pi\mu} \quad (71)$$

donde B es la inducción magnética eficaz.

Así, si se prescinde de las fugas magnéticas, si se supone que la inducción magnética es la misma en todas las partes del núcleo y si se supone constante la permeabilidad del núcleo, la energía media acumulada en el campo magnético de una bobina es

$$W_{med} = w_{med}V_s = \frac{B^2}{8\pi\mu_s} V_s. \quad \blacktriangleright (72)$$

De las ecuaciones (69) y (72) resulta que la potencia reactiva absorbida por una bobina con núcleo de hierro puede expresarse en la forma,

$$I^2X_a = 2\omega W_{med} = 2\omega w_{med}V_s, \quad (73)$$

donde X_a es la reactancia aparente. Pero, de la ecuación (71),

$$2\omega w_{med} = \frac{4\pi f B^2}{8\pi\mu_s} = \frac{f B^2}{2\mu_s}, \quad (74)$$

por consiguiente,

$$I^2X_a = \frac{f B^2}{2\mu_s} V_s. \quad \blacktriangleright (75)$$

La ecuación (75) presenta varios hechos importantes relativos al diseño de aparatos con núcleo de hierro. Corrientemente, la frecuencia f está especificada por los requisitos de funcionamiento, el valor óptimo de la inducción magnética eficaz B está determinado por las propiedades magnéticas del núcleo (tales como saturación magnética y generación de armónicos) y la permeabilidad magnética μ_s está fijada por la inducción magnética.

► Especificadas f , B y μ_s , la potencia reactiva absorbida por una bobina es proporcional al volumen del núcleo y es independiente del diseño del devanado. Estos hechos son muy útiles en el diseño de una bobina para absorber una potencia reactiva determinada a una frecuencia dada, ya que el volumen del núcleo puede determinarse en el momento en que se seleccione el valor de la inducción magnética. Así, de la ecuación (75),

$$V_s = \frac{2\mu_s(\text{volt-ampere reactivos})}{fB^2} \quad \blacktriangleright(76)$$

Aun cuando la potencia reactiva es independiente de la disposición del devanado cuando son despreciables las fugas magnéticas, el diseño del devanado influye sobre el factor de calidad Q_a según veremos en seguida. ◀

Según el circuito serie de la figura 1b, el factor de calidad Q_a es:

$$Q_a = \frac{X_a}{R_a} = \frac{X_a}{R + r_c} \quad (77)$$

Multiplicando numerador y denominador por I^2 queda,

$$Q_a = \frac{I^2 X_a}{I^2 R + I^2 r_c} \quad (78)$$

En la ecuación (78), $I^2 X_a$ es la potencia reactiva, $I^2 R$ es la pérdida en el cobre del devanado, e $I^2 r_c$ es la pérdida en el núcleo. Con auxilio de la ecuación (73), pues, podremos interpretar físicamente el factor de calidad como

$$Q_a = \frac{2\omega(\text{energía media acumulada})}{\text{pérdida en el cobre} + \text{pérdida en el núcleo}} \quad \blacktriangleright(79)$$

En el estudio que sigue, es conveniente utilizar la *razón de pérdidas*; es decir, el recíproco del factor de calidad, o sea

$$\frac{1}{Q_a} = \frac{R_a}{X_a} = \frac{\text{pérdida en el cobre} + \text{pérdida en el núcleo}}{2\omega(\text{energía media acumulada})} \quad \blacktriangleright(80)$$

Si se definen los factores de calidad del devanado y del núcleo, respectivamente, en la forma,

$$Q_w = \frac{X_a}{R} = \frac{I^2 X_a}{I^2 R} \quad (81)$$

$$= \frac{2\omega W_{med}}{\text{pérdida en el cobre}} \quad \blacktriangleright(82)$$

y

$$Q_c = \frac{X_a}{r_c} = \frac{I^2 X_a}{I^2 r_c} \quad (83)$$

$$= \frac{2\omega W_{med}}{\text{pérdida en el núcleo}} \quad \blacktriangleright(84)$$

entonces, la razón de pérdidas de la bobina (Ec. 80) puede expresarse en la forma:

$$\frac{1}{Q_a} = \frac{1}{Q_w} + \frac{1}{Q_c} \quad \blacktriangleright(85)$$

Así, las variables que determinan los factores de calidad del devanado y del núcleo se podrán estudiar por separado y luego combinar los resultados en la forma indicada por la ecuación (85).

El factor de calidad del núcleo puede expresarse en la forma,

$$Q_c = \frac{2\omega w_{med} V_s}{p_c V_s} = \frac{2\omega w_{med}}{p_c} \quad \blacktriangleright(86)$$

donde p_c es la pérdida en el núcleo por unidad de volumen y w_{med} es la energía media acumulada por unidad de volumen. Si se especifica el espesor de las láminas, la pérdida por unidad de volumen queda determinada por la frecuencia, inducción magnética y propiedades magnéticas del material del núcleo —las mismas variables que determinan la energía acumulada por unidad de volumen. La pérdida en el núcleo por unidad de volumen es independiente del tamaño del núcleo si son despreciables las corrientes de Foucault entre láminas.

► Luego, para un espesor fijo de las láminas, el factor de calidad Q_c del núcleo queda determinado por la frecuencia y la inducción magnética y es independiente del volumen del núcleo. ◀

En cambio, el factor de calidad del devanado depende de un cierto número de variables. La inducción magnética, la permeabilidad y la longitud media l_s del núcleo determinan la fuerza magnetomotriz que debe crear el devanado. Así,

$$4\pi N I_m = H l_s = \frac{B l_s}{\mu_s} \quad (87)$$

o sea,

$$N I_m = \frac{B l_s}{4\pi \mu_s} \quad (88)$$

todo ello empleando un sistema de unidades no racionalizado. Además de la corriente magnetizante reactiva I_m , el devanado deberá transportar una corriente I_c que

transporte la energía perdida en el núcleo, y como estas componentes están en cuadratura, la intensidad de la corriente resultante vendrá dada por

$$I^2 = I_m^2 + I_c^2 = I_m^2 \left[1 + \left(\frac{I_c}{I_m} \right)^2 \right] \quad (89)$$

$$= I_m^2 \left[1 + \left(\frac{EI_c}{EI_m} \right)^2 \right], \quad (90)$$

donde E es la tensión inducida por el flujo. Pero EI_c es la potencia perdida en el núcleo y EI_m es la potencia reactiva. En consecuencia, en la ecuación (90),

$$\frac{EI_c}{EI_m} = \frac{1}{Q_c}, \quad (91)$$

y de las ecuaciones (90) y (91) resulta como relación entre la intensidad de la corriente total y la de su componente magnetizante

$$I = I_m \sqrt{1 + \frac{1}{Q_c^2}}. \quad (92)$$

Multiplicando la ecuación (92) por el número de espiras N y sustituyendo en el resultado la ecuación (88),

$$NI = \text{ampere-espiras} = \frac{Bl_s}{4\pi\mu_s} \sqrt{1 + \frac{1}{Q_c^2}}. \quad (93)$$

Esta ecuación da la relación entre la fuerza magnetomotriz que debe desarrollar el devanado y las condiciones magnéticas en el núcleo.

El producto NI es igual a la intensidad de la corriente total que enlaza el circuito magnético. No obstante, en el análisis que sigue no es necesario considerar el número de espiras, ya que la fuerza magnetomotriz puede considerarse como el resultado de una capa de corriente de intensidad NI , más bien que como el resultado de la corriente de intensidad I circulando por N espiras. Esta capa de corriente puede expresarse convenientemente en función de la densidad de corriente J y del área total A_{cu} del cobre en una sección del devanado; así,

$$NI = \text{ampere-espiras} = JA_{cu}. \quad (94)$$

La pérdida en el cobre puede expresarse en función de la densidad de corriente; así,

$$\text{Pérdida en el cobre} = J^2 \rho V_{cu}. \quad (95)$$

La ecuación (95) es la expresión general de la pérdida en el cobre en un volumen V_{cu} de cobre de resistividad ρ por el que circula una corriente de densidad J . La densidad de corriente puede expresarse en función de la capa de corriente JA_{cu} ; así,

$$J = \frac{JA_{cu}}{A_{cu}} = \frac{\text{ampere-espiras}}{A_{cu}}. \quad (96)$$

El volumen de cobre puede expresarse en la forma,

$$V_{cu} = l_{mi} A_{cu}, \quad (97)$$

donde l_{mi} es la longitud media de una espira. Sustituyendo en la ecuación (95) las (96) y (97), se tiene,

$$\text{Pérdida en el cobre} = \left(\frac{\text{ampere-espiras}}{A_{cu}} \right)^2 \rho l_{mi} A_{cu} \quad (98)$$

$$= (\text{ampere-espiras})^2 \frac{\rho l_{mi}}{A_{cu}}. \quad (99)$$

Obsérvese que $\rho l_{mi}/A_{cu}$ es la resistencia de una tira maciza de cobre de longitud l_{mi} y sección recta de área A_{cu} .

Si se sustituye la ecuación (93) en la (99), la pérdida en el cobre podrá expresarse en función de las condiciones magnéticas del núcleo; así,

$$\text{Pérdida en el cobre} = \left(1 + \frac{1}{Q_c^2} \right) \left(\frac{Bl_s}{4\pi\mu_s} \right)^2 \frac{\rho l_{mi}}{A_{cu}}. \quad (100)$$

El factor de calidad del devanado podrá expresarse en la forma:

$$Q_d = \frac{\text{potencia reactiva}}{\text{pérdida en el cobre}} \quad (101)$$

y, de las ecuaciones (75) y (100),

$$Q_d = \frac{\frac{fB_s}{2\mu_s} A_s l_s}{\left(1 + \frac{1}{Q_c^2} \right) \frac{B_s^2 l_s^2}{16\pi^2 \mu_s^2} \frac{\rho l_{mi}}{A_{cu}}} \quad (102)$$

$$= \frac{8\pi^2 f}{1 + \frac{1}{Q_c^2}} \left(\frac{A_{cu}}{\rho l_{mi}} \right) \left(\frac{\mu_s A_s}{l_s} \right) \quad (103)$$

Obsérvese que en la ecuación (103),

$$\frac{\mu_s A_s}{l_s}$$

es la permeancia del núcleo, y

$$\frac{A_{cu}}{\rho l_{mi}}$$

es la conductancia de una tira maciza de longitud l_{mi} y sección recta de área A_{cu} .

► La ecuación (103) indica que el factor de calidad Q_d del devanado depende de las dimensiones del núcleo y devanados. Es independiente del número de espiras del devanado. ◀

Aun cuando en la ecuación (103) no aparece explícitamente la inducción magnética, μ_s y Q_c están determinadas por ella y por tanto Q_d está influido por las condiciones magnéticas del núcleo. Según la ecuación (103), la mejor disposición geométrica para una bobina de Q grande sería aquella para la cual las razones área: longitud para el camino del flujo y para el de la corriente fueran ambas lo mayores posible. Para una forma fija de bobina, la multiplicación por k de todas las dimen-

siones lineales lleva consigo la multiplicación de las razones A/l por el factor k^2/k , es decir, k , con lo que Q_d quedaría multiplicado por k^2 .

► Así, según se indicó en el apartado 3, aumentando el tamaño puede asegurarse un factor de calidad Q_d más elevado para el devanado de una forma dada cualquiera. En cambio, el factor de calidad Q_c del núcleo depende únicamente de las condiciones magnéticas del núcleo y es independiente del volumen y disposición del material magnético. Fijadas B y f , Q_c no varía al aumentar el tamaño. Por tanto, el factor de calidad Q_c del núcleo puede convertirse en la característica limitadora al determinar el factor de calidad combinado Q_a de la bobina. ◀

5. EFECTOS DE UN ENTREHIERRO

La inserción de un entrehierro en el circuito magnético de una bobina con núcleo de hierro altera las características de la bobina de diversas maneras. Salvo para las bobinas sometidas a campos magnéticos continuo y alterno superpuestos, la inserción origina una disminución de autoinducción. En cambio, si la bobina funciona con campos magnéticos alterno y continuo superpuestos, la inserción de un pequeño entrehierro puede ocasionar un aumento de la permeabilidad incremental a causa de la disminución de la componente unidireccional del flujo. El entrehierro reduce también los efectos de las características magnéticas no lineales del núcleo. Así, pues, la inserción del entrehierro hace que el coeficiente de autoinducción se haga constante ante las variaciones de inducción magnética, y también origina una reducción de la distorsión por armónicos *. Otro efecto de la inserción de un entrehierro es una variación del factor de calidad de la bobina. Según veremos, la inserción incrementa el factor de calidad del circuito magnético, pero hace disminuir el factor de calidad del devanado.

5a. *Reducción de los efectos no lineales por medio de un entrehierro.* En el diseño de bobinas con núcleo de hierro que deban funcionar en un amplio dominio de inducciones magnéticas surge frecuentemente el problema de determinar la longitud del entrehierro que hay que insertar en el núcleo para reducir las variaciones de coeficiente de autoinducción de manera que queden comprendidas dentro de las tolerancias especificadas. En el análisis siguiente se supone que el flujo y la intensidad de la corriente tienen formas de onda sinusoidales y que la componente de las pérdidas en el núcleo de la corriente es tan pequeña frente a la componente magnetizante que la intensidad de la corriente total es prácticamente igual a la de su componente magnetizante. El coeficiente de autoinducción L puede, pues, expresarse en la forma,

$$L = \frac{N\phi}{I} = \frac{4\pi N^2 \phi}{4\pi NI} \quad (104)$$

$$= 4\pi N^2 \frac{\phi}{F}, \quad (105)$$

donde ϕ es el valor del flujo y F el valor eficaz de la fuerza magnetomotriz. Ahora bien, F/ϕ es la reluctancia \mathcal{R} del circuito magnético, de donde,

$$L = \frac{4\pi N^2}{\mathcal{R}}. \quad (106)$$

* Véase el apartado 10a, del capítulo VI.

La reluctancia \mathcal{R} es la combinación serie de las reluctancias del camino en el acero y en el entrehierro, o sea,

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_s + \mathcal{R}_a = \frac{l_s}{\mu_s A_s} + \frac{l_a}{\mu_a A_a}, \quad (107)$$

donde el subíndice s se refiere al acero y el a al aire (entrehierro).

Cuando se varía la inducción magnética, también varía el coeficiente de autoinducción a causa de las variaciones de permeabilidad del acero. Para un determinado dominio de inducciones magnéticas se conocen los valores máximo y mínimo de la permeabilidad y por tanto la variación máxima de coeficiente de autoinducción en este dominio de inducciones magnéticas es:

$$\Delta L = 4\pi N^2 \left(\frac{1}{\mathcal{R}_{min}} - \frac{1}{\mathcal{R}_{max}} \right) \quad (108)$$

$$= 4\pi N^2 \left(\frac{\mathcal{R}_{max} - \mathcal{R}_{min}}{\mathcal{R}_{max}\mathcal{R}_{min}} \right), \quad (109)$$

donde \mathcal{R}_{max} y \mathcal{R}_{min} son los valores máximo y mínimo de la reluctancia. Si la mayor parte de la reluctancia corresponde al entrehierro,

$$\mathcal{R}_{max}\mathcal{R}_{min} \approx \mathcal{R}_a^2, \quad (110)$$

y por tanto,

$$\Delta L \approx 4\pi N^2 \left(\frac{\mathcal{R}_{max} - \mathcal{R}_{min}}{\mathcal{R}_a^2} \right). \quad (111)$$

Una expresión aproximada del coeficiente de autoinducción es:

$$L \approx \frac{4\pi N^2}{\mathcal{R}_a}. \quad (112)$$

Luego, la variación fraccional máxima de coeficiente de autoinducción para el dominio especificado de inducciones magnéticas resulta ser, por división de la ecuación (111) por la (112),

$$\frac{\Delta L}{L} \approx \frac{\mathcal{R}_{max} - \mathcal{R}_{min}}{\mathcal{R}_a} \quad (113)$$

$$\approx \frac{l_s}{A_s} \left(\frac{1}{\mu_{s\ min}} - \frac{1}{\mu_{s\ max}} \right) \frac{l_a}{\mu_a A_a} \quad (114)$$

$$\approx \frac{l_s}{l_a} \frac{A_a}{A_s} \left(\frac{\mu_a}{\mu_{s\ min}} - \frac{\mu_a}{\mu_{s\ max}} \right) \quad (115)$$

$$\approx \frac{l_s}{l_a} \frac{A_a}{A_s} \frac{\mu_a}{\mu_{s\ min}} \left(1 - \frac{\mu_{s\ min}}{\mu_{s\ max}} \right), \quad (116)$$

donde $\mu_{s \max}$ y $\mu_{s \min}$ son los valores máximo y mínimo de la permeabilidad del acero en el dominio de inducciones magnéticas mencionado.

La ecuación (116) sugiere un método de ataque del problema de diseñar una bobina cuyo coeficiente de autoinducción no deba variar en más de una cantidad determinada al variar las condiciones de funcionamiento. Así, si es δ la tolerancia de la variación unitaria de coeficiente de autoinducción,

$$\delta = \frac{\Delta L}{L}, \quad (117)$$

y en virtud de la ecuación (116) la razón de la longitud de entrehierro a la longitud del camino en el acero puede expresarse en función de δ en la forma,

$$\frac{l_a}{l_s} = \frac{1}{\delta} \frac{A_a}{A_s} \frac{\mu_a}{\mu_{s \min}} \left(1 - \frac{\mu_{s \min}}{\mu_{s \max}} \right). \quad (118)$$

Corrientemente, la primera etapa del diseño consiste en elegir el dominio de inducciones magnéticas para el funcionamiento. Hecho esto pueden determinarse $\mu_{s \min}$ y $\mu_{s \max}$. La razón de las áreas A_a/A_s de la ecuación (118) se puede estimar suponiendo un factor de apilamiento y una corrección para la dispersión. El valor mínimo del cociente l_a/l_s necesario para satisfacer la tolerancia específica δ se puede calcular entonces a partir de la ecuación (118).

5b. *Efectos de un entrehierro sobre el factor de calidad.* Consideremos los efectos que produce la variación de longitud de un entrehierro en el circuito magnético de una bobina determinada. La razón de pérdida de la bobina podrá expresarse en la forma,

$$\text{Razón de pérdidas} = \frac{1}{Q_a} = \frac{\text{pérdida en el núcleo} + \text{pérdida en el cobre}}{\text{volt-ampere reactivos}} \quad (119)$$

$$= \frac{P_c + I^2 R}{EI_m} \quad (120)$$

$$= \frac{P_c + I_c^2 R + I_m^2 R}{EI_m}, \quad (121)$$

donde,

$P_c \equiv$ pérdida en el núcleo,

$E \equiv$ tensión eficaz inducida,

$I \equiv$ intensidad eficaz igual a $\sqrt{I_c^2 + I_m^2}$,

$I_c \equiv$ intensidad eficaz de la componente de pérdida en el núcleo,

$I_m \equiv$ intensidad eficaz de la componente magnetizante de la corriente,

$R \equiv$ resistencia del devanado.

Mantengamos constante la frecuencia y el valor eficaz del flujo (ajustando la tensión aplicada al variar el entrehierro), y supongamos que la forma de onda del flujo es sinusoidal; despreciemos también los efectos de las variaciones de las fugas magnéticas ocasionados por las variaciones de longitud del entrehierro. Con estas hipó-

tesis, el valor eficaz de la inducción magnética en el núcleo es constante. La pérdida en el núcleo P_c y la tensión inducida E son, por tanto, constantes. Como

$$I_c = \frac{P_c}{E}, \quad (122)$$

la intensidad de la corriente de pérdida en el núcleo I_c es también constante. Luego, en la ecuación (121) solamente queda afectada por las variaciones de longitud del entrehierro la intensidad I_m de la corriente reactiva magnetizante. Esta deberá ajustarse por sí misma para crear el mismo flujo a pesar de las variaciones de reluctancia debidas a las variaciones en el entrehierro.

La ecuación (121) indica que la razón de pérdidas se halla afectada de dos maneras. El primer efecto producido por el aumento de longitud del entrehierro es una mejora del factor de calidad Q_c del circuito magnético. Así, la razón de pérdidas del circuito magnético (incluido el entrehierro) es

$$\frac{1}{Q_c} = \frac{P_c}{EI_m}, \quad (123)$$

y por tanto la intensificación de la corriente magnetizante hace disminuir la razón de pérdidas; es decir, mejora la Q_c . Podía esperarse este resultado porque se producen pérdidas en el núcleo cuando se almacena energía pulsante en el hierro, pero no hay pérdidas cuando se almacena en el aire. La manera de incrementar Q_c es, pues, acumular más energía en el aire; en otras palabras, insertar un entrehierro en el circuito magnético o incrementar la longitud del existente. Por otra parte, el segundo efecto de intensificar la corriente magnetizante es una reducción del factor de calidad Q_d del devanado. La razón de pérdidas del devanado es:

$$\frac{1}{Q_d} = \frac{I^2 R}{EI_m} = \frac{I_c^2 + I_m^2}{EI_m} R, \quad (124)$$

y como la intensidad I_m de la corriente magnetizante suele ser considerablemente mayor que la I_c de las pérdidas en el núcleo, la pérdida en el cobre es aproximadamente proporcional al cuadrado de la intensidad de la corriente magnetizante. Así, cuando se intensifica la corriente magnetizante alargando el entrehierro, la pérdida en el cobre aumenta más que la potencia reactiva. Por tanto, la razón de pérdidas del devanado aumenta y el factor de calidad Q_d disminuye al incrementar la longitud del entrehierro.

La razón de pérdidas de la bobina es la suma de las razones de pérdidas del circuito magnético y del devanado, una de las cuales disminuye mientras la otra aumenta al aumentar la longitud del entrehierro. ¿Hasta cuánto se intensificará la corriente magnetizante al insertar un entrehierro cuando se desea una razón de pérdidas total mínima? De la ecuación (121),

$$\text{Razón de pérdidas total} = \frac{P_c + I_c^2 R}{EI_m} + \frac{RI_m}{E}, \quad (125)$$

y si son constantes la frecuencia y la inducción magnética, la única variable existente cuando varía la longitud del entrehierro es I_m . Para determinar el valor de I_m que da

una razón de pérdidas mínima, se deriva la ecuación (125) respecto a I_m y se anula la derivada; así,

$$0 = -\frac{P_c + I_c^2 R}{EI_m^2} + \frac{R}{E} \quad (126)$$

o sea,

$$I_m^2 R = P_c + I_c^2 R. \quad (127)$$

Por tanto, si se mantienen constantes la frecuencia y el valor eficaz de la inducción magnética se obtendrá la razón de pérdidas mínima cuando se ajuste la longitud del entrehierro, de manera que la pérdida en el cobre debida a la corriente magnetizante sea igual a la suma de la pérdida en el núcleo más la pérdida en el cobre debida a la corriente correspondiente a las pérdidas en el núcleo.

6. TEORÍA DE MODELOS APLICADA A REDES

En muchas aplicaciones de elementos de circuito no lineales a las redes hay que tener en cuenta los efectos del elemento no lineal sobre la red total. En muchos circuitos de mando que utilizan elementos no lineales; por ejemplo, la no linealidad es quien crea la acción deseada del circuito. Una aplicación útil de la teoría de modelos se halla en el diseño de redes no lineales que deban tener, por ejemplo, valores determinados de la tensión y la intensidad y deban comportarse respecto al tiempo de una manera determinada. La tensión, intensidad y constantes de tiempo de la red buscada pueden ser grandes y el aparato, por tanto, caro. Se puede, sin embargo, construir un prototipo de disposición semejante a la de la red buscada, pero que tenga tensión, intensidad y constantes de tiempo menores y ajustarlo hasta que tenga las características adecuadas. Entonces podrá construirse la red deseada sin más que cambiar de escala las dimensiones y parámetros. Supongamos que se ha construido la red prototipo y se ha ajustado de manera que se comporte de la manera deseada. Hay que diseñar una nueva red que se comporte en forma análoga, pero habrá que realizar los siguientes cambios de escala:

1. Los intervalos de tiempo entre sucesos en la red derivada deben ser k_t veces mayores que los intervalos correspondientes en el prototipo.
2. Todas las tensiones de la red derivada deben ser k_v veces mayores que en el prototipo.
3. Todas las corrientes en la red derivada deben ser k_i veces más intensas.

Los factores de escala k_t , k_v y k_i pueden elegirse arbitrariamente. ¿Qué variaciones deben realizarse en los parámetros del circuito y en el diseño de la bobina para que la red derivada se comporte semejantemente a la red prototipo? Esta pregunta puede contestarse por comparación de las ecuaciones diferenciales de las ramas correspondientes de las dos redes¹, tal como se indica en el análisis siguiente.

¹ Otro estudio se realizaría mediante el análisis dimensional. Por ejemplo, véase FREDERICK E. FOWLE, editor, *Smithsonian Physical Tables* (octava ed. revisada; Washington: The Smithsonian Institution, 1933), p. xxxiii.

6a. *Relaciones entre las variables.* Consideremos, en primer lugar, los efectos de los factores de escala sobre las relaciones entre las variables de ambas redes. Sean

t \equiv tiempo,

e_s \equiv fuerza electromotriz instantánea del generador,

v \equiv caída instantánea de tensión en una rama del circuito,

i \equiv intensidad instantánea de la corriente,

q \equiv carga instantánea.

Designemos con el subíndice 0 a los valores pertenecientes al prototipo y con el subíndice 3 los pertenecientes a la red derivada. Las variables y parámetros de ambas redes se expresarán en el mismo sistema de unidades. De acuerdo con el factor de escala, se tendrán instantes de tiempo correspondientes cuando

$$t_3 = k_t t_0. \quad (128)$$

Los tiempos se miden a partir de puntos de referencia cuando en las dos redes tengan lugar sucesos correspondientes —por ejemplo, cuando se cierran interruptores correspondientes—. De acuerdo con los factores de escala para tensión e intensidad, en instantes de tiempos correspondientes

$$e_{s3}(t_3) = k_v e_{s0}(t_0) \quad (129)$$

$$v_3(t_3) = k_v v_0(t_0) \quad (130)$$

$$i_3(t_3) = k_i i_0(t_0). \quad (131)$$

La relación entre valores instantáneos correspondientes de las cargas y de las velocidades de variación de las intensidades correspondientes en ambos circuitos puede determinarse ahora a partir de las ecuaciones (128) y (131). Derivando la ecuación (128),

$$\frac{dt_3}{dt_0} = k_t \quad (132)$$

o sea,

$$dt_3 = k_t dt_0, \quad (133)$$

y derivando la ecuación (131),

$$\frac{di_3}{di_0} = k_i \quad (134)$$

o sea,

$$di_3 = k_i di_0. \quad (135)$$

En las ecuaciones (134), (135) y siguientes se omite la notación funcional, entendiéndose que los símbolos de las variables significan sus valores en instantes correspondientes de tiempo dados por la ecuación (128). Las ecuaciones (133) y (135) indican que un incremento de tiempo dt_0 en el prototipo corresponde en la red derivada a un incremento de tiempo dt_3 que es k_t veces mayor que el incremento corres-

pondiente dt_0 en el prototipo. La derivada respecto al tiempo de la intensidad en el prototipo se puede expresar en la forma,

$$\frac{di_3}{dt_3} = \frac{di_0}{dt_0} \frac{di_3}{di_0} \frac{dt_0}{dt_3}, \quad (136)$$

y sustituyendo en la ecuación (136) las ecuaciones (132) y (134),

$$\frac{di_3}{dt_3} = \frac{k_l}{k_t} \frac{di_0}{dt_0}. \quad (137)$$

► En instantes correspondientes de tiempo, la velocidad de variación de la intensidad de la corriente en la red derivada es k_l/k_t veces mayor que en el prototipo, porque el incremento de la intensidad es k_l veces mayor y el incremento de tiempo lo es k_t veces. ◀

La carga en la red derivada es:

$$q_3 = \int i_3 dt_3, \quad (138)$$

en donde $\int i_3 dt_3$ significa $\int_0^{t_3} i_3 dt_3 + q_3(0)$, siendo $q_3(0)$ la carga en el instante en que t_3 es igual a 0. Si se expresa i_3 en función del valor correspondiente de i_0 (ec. 131) y dt_3 en función de dt_0 (ec. 133), la ecuación (138) queda en la forma,

$$q_3 = k_l k_t \int i_0 dt_0 = k_l k_t q_0. \quad (139)$$

► La carga en la red derivada es $k_l k_t$ veces mayor que la carga instantánea correspondiente en el prototipo, porque la intensidad de la corriente es k_l veces mayor y dicha intensidad dura un tiempo k_t veces mayor. ◀

6b. *Relaciones entre los parámetros lineales correspondientes.* Podemos determinar ahora las relaciones entre parámetros correspondientes en las partes lineales de ambas redes comparando las ecuaciones de la tensión de dos ramas correspondientes. Así, para la red derivada tendríamos la ecuación de una rama

$$v_3 = L_3 \frac{di_3}{dt_3} + R_3 i_3 + \frac{q_3}{C_3}, \quad (140)$$

y para el prototipo en el instante correspondiente de tiempo

$$v_0 = L_0 \frac{di_0}{dt_0} + R_0 i_0 + \frac{q_0}{C_0}, \quad (141)$$

donde L , C y R son parámetros lineales. Multiplicando la ecuación (141) por k_v y expresando las variables en función de las variables correspondientes en la red

derivada —según indican las ecuaciones (130), (131), (137) y (139)— la ecuación (141) se convierte en

$$k_v v_0 = v_3 = \frac{k_v k_t}{k_l} L_0 \frac{di_3}{dt_3} + \frac{k_v}{k_l} R_0 i_3 + \frac{k_v}{k_l k_t} \frac{q_3}{C_0}. \quad (142)$$

Comparando las ecuaciones (140) y (142) puede verse que los coeficientes de los términos correspondientes de las dos ecuaciones diferenciales deben ser iguales. En condiciones análogas con los factores de escala deseados para tiempo, tensión e intensidad, las relaciones entre los parámetros correspondientes en las partes lineales de ambas redes deberán ser, pues,

$$L_3 = \frac{k_v k_t}{k_l} L_0 \quad \blacktriangleright (143)$$

$$R_3 = \frac{k_v}{k_l} R_0 \quad \blacktriangleright (144)$$

$$C_3 = \frac{k_l k_t}{k_v} C_0. \quad \blacktriangleright (145)$$

Obsérvese que

$$\frac{L_3}{R_3} = k_l \frac{L_0}{R_0} \quad (146)$$

y

$$R_3 C_3 = k_l R_0 C_0. \quad (147)$$

Es decir, las constantes de tiempo del circuito derivado son k_t veces mayores que las constantes de tiempo correspondientes del prototipo.

6c. *Relaciones entre las bobinas prototipo y derivada.* Si quiere mantenerse una semejanza geométrica estricta entre la bobina derivada y el prototipo pueden realizarse dos variaciones: número de espiras y tamaño. En vez de restringir el análisis a bobinas semejantes geoméricamente como en los apartados 2 y 3, en el análisis siguiente se supone que pueden despreciarse las fugas magnéticas*. El método de análisis que presentamos no hace más que ilustrar una línea de razonamiento que puede aplicarse ante varias hipótesis. La hipótesis de ausencia de fugas permite variar el área de la sección recta del núcleo independientemente de su longitud, sometiéndola a las siguientes restricciones cuando el área de la sección recta no es la misma a lo largo de todo el núcleo: Primero, las áreas de las secciones rectas, si varían, deben variar todas en la misma razón; segundo, las longitudes de las partes del núcleo, si varían, deben variar todas en la misma razón. No obstante, las razones de las áreas y de las longitudes pueden ser diferentes. Este enunciado incluye a cualquier entrehierro que pueda haber en el circuito magnético.

La condición que no puede alterarse, si deben mantenerse las relaciones de semejanza entre la bobina derivada y el prototipo, es que las condiciones de B y H deban ser iguales en puntos correspondientes de los dos núcleos. Así, si

$b \equiv$ inducción magnética instantánea,

$h \equiv$ intensidad instantánea del campo magnético,

* La hipótesis de ausencia de fugas se podía haber empleado igualmente como punto de partida para la teoría de modelos de las bobinas, análoga a la dada en los apartados 2 y 3, con resultados algo diferentes.

se tiene,

$$b_3(t_3) = b_0(t_0) \quad (148)$$

$$h_3(t_3) = h_0(t_0). \quad (149)$$

Las tensiones inducidas en las bobinas en instantes correspondientes son

$$e_3 = N_3 A_3 \frac{db_3}{dt_3} \quad (150)$$

$$e_0 = N_0 A_0 \frac{db_0}{dt_0}, \quad (151)$$

donde N es el número de espiras y A el área de la sección recta en el punto en que la inducción magnética es b . De acuerdo con la escala de tensiones deseada, la tensión inducida en la bobina derivada debe ser k_v veces la tensión inducida en el prototipo en los instantes correspondientes, y, por tanto, dividiendo miembro a miembro las ecuaciones (150) y (151) se tiene,

$$\frac{e_3}{e_0} = k_v = \frac{N_3 A_3 db_3/dt_3}{N_0 A_0 db_0/dt_0}. \quad (152)$$

Pero como b_3 es igual a b_0 , el cociente de las derivadas de la ecuación (152) es:

$$\frac{db_3/dt_3}{db_0/dt_0} = \frac{dt_0}{dt_3} = \frac{1}{k_t}. \quad (153)$$

En consecuencia, la ecuación (152) queda en la forma,

$$k_v = \frac{N_3 A_3}{k_t N_0 A_0} \quad (154)$$

o sea,

$$N_3 A_3 = k_v k_t N_0 A_0. \quad (155)$$

► Para mantener las mismas condiciones de B y H en el núcleo, el producto espiras-área $N_3 A_3$ de la bobina derivada debe ser igual al producto de $k_v k_t$ por el producto espiras-área $N_0 A_0$ del prototipo, porque la tensión en la bobina derivada es k_v veces mayor y la velocidad de variación de la inducción magnética es $1/k_t$ veces mayor. ◀

También debe variarse el diseño de la bobina de manera que para las mismas condiciones de B y H la intensidad de la corriente se halle afectada por el factor de escala de intensidades k_i . Las relaciones entre las intensidades de las corrientes y de los campos magnéticos en ambas bobinas son:

$$4\pi N_3 i_3 = h_3 l_3 \quad (156)$$

$$4\pi N_0 i_0 = h_0 l_0, \quad (157)$$

donde l es la longitud del núcleo. Dividiendo miembro a miembro las ecuaciones (156) y (157),

$$\frac{N_3 i_3}{N_0 i_0} = \frac{h_3 l_3}{h_0 l_0}. \quad (158)$$

Pero para instantes correspondientes, h_3 es igual a h_0 (ec. 149) y de la escala de intensidades (ec. 131),

$$\frac{i_3}{i_0} = k_i. \quad (159)$$

Por tanto, la ecuación (158) se reduce a

$$k_i \frac{N_3}{N_0} = \frac{l_3}{l_0} \quad (160)$$

o sea,

$$\frac{l_3}{N_3} = k_i \frac{l_0}{N_0}. \quad (161)$$

► Para mantener en el núcleo las mismas condiciones de B y H , la razón longitud-espiras l_3/N_3 de la bobina derivada debe ser igual al producto de k_i por la razón longitud-espiras l_0/N_0 del prototipo cuando la intensidad de la corriente es k_i veces mayor. ◀

En el diseño de una bobina pueden realizarse tres cambios: en el número de espiras N , en la longitud del núcleo l , y en el área de la sección recta del núcleo A . Pero sólo deberán satisfacerse para estos cambios las dos condiciones expresadas por las ecuaciones (155) y (161) para tener las mismas condiciones de B y H en tiempos correspondientes y con factores de escala para tiempo, tensión e intensidad especificados. Por tanto, habrá que elegir arbitrariamente una condición adicional —por ejemplo, mantener constante el número de espiras. El cambio de tensión podría ponerse de manifiesto alterando el área de la sección recta del núcleo como en la ecuación (155), y el cambio de intensidad de corriente alterando la longitud del núcleo como en la ecuación (161).

Vale la pena anotar las relaciones entre las energías acumuladas en los dos sistemas. Puede demostrarse que la razón de la energía W_3 a la W_0 es:

$$\frac{W_3}{W_0} = \frac{\frac{1}{2} C_3 v_3^2}{\frac{1}{2} C_0 v_0^2} = \frac{\frac{1}{2} L_3 i_3^2}{\frac{1}{2} L_0 i_0^2} \quad (162)$$

$$= \frac{\text{volumen del núcleo 3}}{\text{volumen del núcleo 0}} \quad (163)$$

En las ecuaciones (148) y (149) se halla implícita una restricción que pudiera no ser evidente. La relación $B(H)$ debe ser la misma en el prototipo y en la bobina derivada. Luego, la característica $B(H)$ verdadera, incluido el efecto de las corrientes de Foucault, debe ser la misma para ambas. Si se cambia la escala de tiempos se alteran los efectos de las corrientes de Foucault y por tanto la característica $B(H)$ de una bobina no será igual a la de la otra, a menos que al mismo tiempo se cambie

en forma adecuada el espesor de las láminas. En la práctica, esta restricción tendrá poca importancia por lo general, pero debemos señalarla para evitar las dificultades que pudieran presentarse en casos poco corrientes.

A veces podrán surgir dificultades porque las constantes de tiempo de aparatos inductivos pequeños son inherentemente menores que las de los aparatos grandes, a menos que se emplee un valor adecuado de k_t .

► El concepto de circuitos no lineales semejantes es muy importante y tiene muchas aplicaciones prácticas a problemas que podrían ser muy difíciles, económica o analíticamente, de resolver sin él. Siempre que se tengan que desarrollar o diseñar aparatos no lineales de cualquier clase, eléctricos o no, habrá que tener en cuenta el método de los modelos. ◀

PROBLEMAS

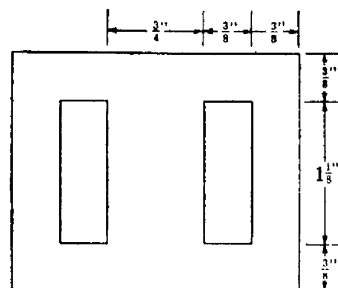
1. Un transformador de 500 kVA 11 000 V, 60 Hz consume en vacío 3,35 A y 2 960 W cuando se le aplica la tensión de funcionamiento a la frecuencia de funcionamiento. Otro transformador tiene un núcleo cuyas dimensiones lineales son todas $\sqrt{2}$ veces mayores que las correspondientes del núcleo del primer transformador y cuyas propiedades magnéticas son idénticas que las del primer transformador. En ambos transformadores pueden despreciarse las pérdidas en el cobre del primario y la caída de tensión por reactancia de fugas en vacío.

Si en los primarios se emplea el mismo número de espiras, ¿qué corriente y potencia en vacío consumirá el segundo transformador cuando se aplique a su primario una tensión de 22 000 V a 60 Hz?

2. Los siguientes datos corresponden a una bobina tipo coraza con un devanado de 1 000 espiras:

Frecuencia	Tensión entre terminales	Intensidad	Potencia
60 Hz	180 V	0,0624 A	1,13 W
60	160	0,0239	0,91
60	140	0,0145	0,71
60	120	0,0106	0,54

Suponiendo despreciables la pérdida en el cobre y la caída óhmica efectiva hallar el número de espiras y el factor de escala k que den una bobina semejante geométrica-mente con una pérdida de potencia de 10 W y una intensidad de corriente de 0,30 A a una tensión entre terminales de 120 V, 60 Hz.



Factor de apilamiento = 0,95
Altura de la pila 3 1/4 pulg
Acero al silicio 4,25 %
Devanado: 500 espiras de hilo
de cobre 24 AWG

FIG. 3. Sección de un núcleo de bobina. Problema 3.

3. En la figura 3 puede verse una sección del núcleo de una bobina. En la figura misma se consignan los datos del núcleo y del devanado. En las figuras 19, 20 y 21, pp 182, 183 y 184, pueden hallarse los datos magnéticos del material del núcleo.

a) Calcular el factor de calidad de la bobina para una tensión sinusoidal aplicada de 50 V a 60 Hz.

b) Calcular el factor de calidad de una bobina semejante geoméricamente y que funcione con la misma inducción magnética y el mismo coeficiente de autoinducción eficaz, pero con una tensión de 150 V a 60 Hz.

4. Se quiere practicar en la bobina del problema 3 un entrehierro de longitud tal que la inductancia no varíe en más de un 5 %, referido a su valor máximo, cuando se varíe una tensión sinusoidal aplicada de 25 a 60 V a 60 Hz.

a) Hallar la longitud máxima presumible del entrehierro.

b) Dense especificaciones completas para el caso de una bobina de 1 H a 50 V, y un 5 % de variación de la inductancia en el intervalo entre 20,8 y 50 V a 60 Hz.

5. Hallar la longitud del entrehierro que hay que practicar en el núcleo de la bobina del problema 3, para obtener un factor de calidad máximo si la inducción magnética se mantiene al valor empleado en dicho problema. Comparar el valor del factor de calidad obtenido con el entrehierro, con el obtenido en el problema 3.

6. En la figura 4 puede verse un circuito no lineal que emplea una bobina con núcleo de hierro que se utiliza en ciertos sistemas de mando. Dicho circuito puede diseñarse para tener una tensión crítica por debajo de la cual circula una corriente muy débil, pero por encima de la cual la corriente se intensifica muy rápidamente.

Trabajando dicho circuito a 60 Hz se han obtenido los datos siguientes:

	Intensidad de la corriente	Tensión
	0,02 A	10 V
	0,02	50
	0,02	80
	0,12	95
	0,60	100
	0,80	102
	1,00	107
	1,20	116
	1,40	128

FIG. 4. Circuito no lineal para dar una tensión crítica de gobierno. Problema 6.

En el circuito en que se obtuvieron estos datos la resistencia R era de 67 ohm y la capacidad 25 μ F. Los datos en la bobina con núcleo de hierro son los siguientes:

Longitud media del circuito magnético = 7,4 pulg.

Área de la rama central del núcleo = 1,3 pulg².

Devanado: 480 espiras.

Se quiere construir un circuito de este tipo para actuar como regulador de tensión sobre un sistema de 50 Hz cuando la tensión alcance los 117 V. En serie con los elementos de la figura 4, se conecta un pequeño relé, de poca autoinducción. Este relé se dispara con una corriente de 1 A y pone en funcionamiento el regulador.

Determinar los valores de R y C que, utilizados con una bobina adecuada, den el funcionamiento más sensible en la aplicación descrita. Para la condición de que la bobina del nuevo circuito de mando esté constituida de láminas troqueladas iguales a las de la bobina experimental, determinar el área de su núcleo y el número de espiras. Supóngase que el relé magnético no tiene efecto alguno sobre las características eléctricas del circuito.

7. Dos ramas no lineales del tipo estudiado en el problema 6 dan un circuito de extraordinaria selectividad de tensiones cuando se montan en puente. Como la salida de dicho circuito puede utilizarse para cerrar un contactor magnético, el circuito es ade-

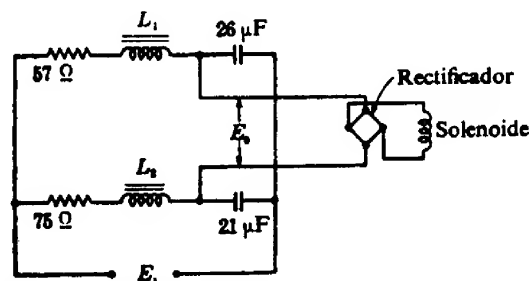


FIG. 5. Circuito puente no lineal selector de tensiones.

cuado como relé selector de tensiones. En la figura 5 puede verse el circuito relé completo. De este circuito se obtuvieron los siguientes datos a la frecuencia de 60 Hz:

E_1 —volt	E_2 —volt
50	0
90	1
100	2
109	10
110	88
111	12
120	3
130	2

Se quieren conectar dos de estos circuitos selectivos en paralelo con un sistema de 1 000 Hz para gobernar dos relés diferentes. Las tensiones de entrada E_1 a las que son sensibles los circuitos han de ser 80 y 120 V. La tensión máxima de salida E_2 de cada circuito puente ha de ser 60 V. Si todas las bobinas con núcleo de hierro son semejantes geoméricamente al modelo, especificar la razón α de números de espiras y el factor de escala lineal k para cada bobina. Especificar también las resistencias y capacidades. Supóngase que los relés magnéticos no tienen efecto sobre las características eléctricas de los circuitos.

Propiedades térmicas y circulación del calor

En general, todas las pérdidas de energía en los aparatos eléctricos de potencia se convierten en calor a razón de 860 kilocalorías por cada kilowatthora de energía así convertida. Cuando se alcanza una temperatura de funcionamiento estacionaria, el calor extraído por los efectos combinados de conducción, convección y radiación debe ser igual al calor producido por conversión a partir de las formas de energía eléctrica y mecánica. El criterio más universal para calibrar la maquinaria eléctrica en punto a su potencia de salida es la elevación de temperatura. La carga continuada máxima permisible para un funcionamiento seguro es aquella a la cual la temperatura estacionaria tiene su valor máximo de seguridad. Como es el calentamiento, más que las consideraciones mecánicas o eléctricas, quien determina la potencia útil permisible de una máquina, el estudio de las propiedades térmicas y de la circulación del calor resulta ser un importantísimo elemento en el diseño.

1. EFECTOS DEL CALOR SOBRE LOS MATERIALES

En la maquinaria eléctrica, los materiales aislantes son los que más sufren con el sobrecalentamiento, si bien no es despreciable el efecto del calor sobre el cobre conductor de la corriente y sobre los materiales magnéticos.

En un amplio dominio de temperaturas, la resistencia del cobre varía proporcionalmente a su exceso de temperatura sobre los $-234,5^\circ\text{C}$. En consecuencia, la pérdida en el cobre por efecto Joule a una temperatura 40°C por encima de la temperatura ambiente es un 15 % superior a la correspondiente a la temperatura ambiente.

Las pérdidas en el núcleo del circuito magnético se reducen ligeramente cuando la temperatura sufre su elevación normal —aproximadamente 40°C — asociada al funcionamiento a plena carga.

Los materiales aislantes de uso corriente en maquinaria y equipos eléctricos han sido clasificados por el American Institute of Electrical Engineers en los cuatro grupos consignados en la tabla I.

El American Institute of Electrical Engineers, ha establecido a efectos de normalización, los siguientes valores máximos de «mancha más caliente» para las temperaturas:

Clase O	90°C
Clase A	105°C
Clase B	130°C
Clase C	No hay límite señalado

La temperatura ambiente límite normal del aire se toma igual a 40°C, que es próxima al máximo hallado en la mayor parte del territorio de los Estados Unidos.

El deterioro de los aislantes orgánicos de las clases A y B, a temperaturas elevadas es gradual y resulta ser una función de la temperatura carente de pendientes ni cambios bruscos. Se manifiesta principalmente por resecarse y carbonizarse el material, lo que lo hace quebradizo, haciéndole perder resistencia mecánica más que rigidez dieléctrica. Tras una carbonización severa, la rigidez dieléctrica puede quedar muy perjudicada, pero el fallo se asocia más generalmente a defectos mecánicos del aislante originados por vibraciones o esfuerzos mecánicos en los cortocircuitos.

TABLA I

CLASIFICACION DE LOS MATERIALES AISLANTES¹

Clase Descripción del material

- O La clase O de los aislantes está constituida por algodón, seda, papel y materiales orgánicos similares que no estén impregnados ni sumergidos en líquido dieléctrico.
- A La clase A de los aislantes está constituida por: 1, algodón, seda, papel y materiales orgánicos análogos cuando estén impregnados o sumergidos en líquido dieléctrico; 2, materiales moldeados y laminados con henchidor de celulosa, resinas fenólicas y otras resinas de propiedades análogas; 3, películas y hojas de acetato de celulosa y otros derivados de la celulosa de propiedades análogas, y 4, barnices (esmalte) aplicados a los conductores.
- B La clase B de los aislantes está constituida por mica, amianto, fibra de vidrio y materiales inorgánicos análogos en forma reforzada con sustancias orgánicas aglutinantes. Con fines estructurales solamente, pueden emplearse materiales de la clase A en pequeña proporción.
- C La clase C de los aislantes está constituida enteramente por mica, porcelana, vidrio, cuarzo y materiales inorgánicos análogos.

¹ De «American Institute of Electrical Engineers Standards», núm. 1: *General Principles upon Which Temperature Limits are Based in the Rating of Electrical Machinery and Apparatus* (New York: American Institute of Electrical Engineers, 1940), 6.

V. M. MONTSINGER² ha demostrado, mediante pruebas repetidas, que la velocidad de deterioro mecánico se duplica en cada incremento de temperatura de 8°C. El deterioro es más rápido cuando existe impregnación con aceite que cuando no. Los aislantes impregnados con aceite de la clase A, perdían su rigidez a la tensión al cabo de 18 semanas a 110°C, al cabo de 40 semanas a 100°C y al cabo de 85 semanas a 90°C. Aun cuando la presencia de aceite u otro material impregnador pueda acelerar el deterioro del aislante fibroso, tiene en compensación las ventajas de incrementar la conductibilidad calorífica y la rigidez dieléctrica.

El aceite caliente, en presencia de aire u oxígeno, se oxida lentamente y forma un barro. En los aparatos refrigerados por aceite, tales como los transformadores, este barro, al adherirse a las superficies, perjudica a la convección y a la extracción del calor de los lugares en que se genera. La oxidación y la formación de barro se combaten mediante el empleo de gases inertes sobre el aceite y con un filtrado e inspección continuos y cambiando el aceite cuando sea necesario.

² V. M. MONTSINGER, «Loading Transformers by Temperature», *A. I. E. E. Trans.*, 49, abril, 1930, 776-790.

2. CONDUCCIÓN DEL CALOR

La conducción del calor por el volumen de una sustancia es muy aproximadamente proporcional al gradiente de temperatura. La conducción estacionaria del calor por un volumen cualquiera es un fenómeno de campo análogo, matemáticamente, a otros muchos, tales como el paso de un flujo eléctrico a través de un dieléctrico no conductor o del flujo magnético a través de un campo. Si se genera el calor en el interior del volumen del material que lo conduce, el problema es análogo al del campo eléctrico con carga espacial. El ejemplo más sencillo de circulación del calor es aquel en que la dirección de circulación del calor es paralela en todos los puntos a una dirección dada, y entonces el calor que circula por unidad de tiempo y por grado de diferencia de temperatura a través de una placa de material es igual, simplemente, al producto de la conductibilidad calorífica por el área de la sección y dividido por el espesor. Expresado en forma de ecuación, la diferencia de temperatura resultante de una cierta circulación de calor es

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{Pd}{Ak}, \quad (1)$$

donde,

θ_2 y θ_1 son las temperaturas estacionarias a uno y otro lado,

P es la cantidad de calor que circula en unidad de tiempo,

d es el espesor en la dirección de circulación del calor,

A es el área de la sección en un plano perpendicular a la dirección del calor,

k es la conductibilidad calorífica.

En el caso de un flujo radial simple entre los radios r_2 y r_1 de una capa cilíndrica,

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{P_u}{2\pi k} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad (2)$$

donde P_u es el calor que circula en unidad de tiempo por unidad de longitud del cilindro.

Es conveniente y de aplicación muy general, al abordar problemas térmicos asociados a la maquinaria eléctrica, emplear las unidades: watts, centímetros y grados centígrados. El elemento tiempo se halla incluido en la unidad watt, que es una energía que circula por unidad de tiempo.

La tabla II presenta valores aproximados de conductibilidades caloríficas, resistividades caloríficas y capacidades caloríficas específicas de materiales empleados corrientemente en equipos eléctricos de potencia. La conductibilidad calorífica de un material es el calor que circula en unidad de tiempo a través de un cubo unitario por unidad de diferencia de temperatura entre las dos caras opuestas. De la ecuación (1),

$$k = \frac{P}{A \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{d}}, \quad (3)$$

TABLA II

PROPIEDADES TÉRMICAS APROXIMADAS DE LOS MATERIALES

Material	Resistividad °C cm/W	Conductibilidad W/°C cm	Capacidad calorífica específica J/cm³ °C
Cobre	0,28	3,6	3,3
Aluminio	0,76	1,3	2,3
Hierro batido	1,3	0,79	3,7
Chapa de acero al carbón	2,3	0,43	3,7
Hierro colado	2,5	0,39	3,7
Acero al silicio (longitudinal)	5,8	0,17	3,7
Chapas de acero al silicio (transversal)	38-130	0,03-0,008	3,7
Mica (transversal)	360	0,003	2,0
Batista barnizada	500	0,002	1,4
Goma	640	0,002	...
Cartón prensado, aceitado	640	0,002	1,4
Ladrillo	1000	0,001	...
Cartón prensado, seco	1000-1300	0,0008-0,001	...
Tejido sin tratar o fieltro	150	0,00063	...

donde $(\theta_2 - \theta_1)/d$ es el gradiente de temperatura. De la ecuación (3), resulta que las dimensiones de la conductibilidad térmica en el sistema cegesimal son:

$$[k] = \frac{[\text{watt}]}{[\text{cm}]^2 \frac{[^\circ\text{C}]}{[\text{cm}]}} = \frac{[\text{watt}]}{[^\circ\text{C}] [\text{cm}]} \quad (4)$$

La resistividad térmica es el recíproco de la conductibilidad térmica y se puede expresar en grados centígrado centímetro por watt. La capacidad calorífica específica de un material es la energía calorífica acumulada en la unidad de volumen por unidad de elevación de temperatura y puede expresarse en joules por centímetro cúbico por grado centígrado.

La conductibilidad térmica, según se ha dicho, se incrementa mucho en los materiales fibrosos impregnados. El aislante relativamente nuevo que es la fibra de vidrio, sin impregnación, podría soportar con éxito una temperatura sorprendentemente elevada; pero esta ventaja queda anulada por su baja conductibilidad calorífica. Con impregnación, su máxima temperatura de funcionamiento seguro se debe más al material impregnador que a la fibra.

La conducción transversal del calor a través de pilas de láminas delgadas de acero halla principalmente la resistencia térmica en los espacios ocupados por el barniz y el aire entre las láminas. Cualquier variación del espesor del barniz y de la compacidad del apilamiento tendrá su efecto correspondiente sobre la resistividad trans-

versal. En general, los datos de la tabla II deben considerarse solamente como aproximados.

Para estudiar la circulación general bidimensional de calor, que es el caso de un inducido o inductor ranurado largo, puede utilizarse el trazado de líneas del campo. En muchos problemas prácticos existe generación de calor en el material conductor. Ello complica el problema, y suele utilizarse para la solución un método de prueba y error. A veces, se divide el volumen arbitrariamente en capas y se suman las caídas a lo largo de las distintas capas. Se suman entonces las pérdidas caloríficas en las sucesivas capas hasta llegar a la circulación total de calor.

El cálculo completo de la circulación del calor en máquinas complicadas desde el punto de vista geométrico es un problema de diseño demasiado intrincado para ilustrarlo aquí por completo. En las referencias consignadas en la bibliografía se encuentran tratamientos más completos.

3. RADIACIÓN DEL CALOR

El calor radiado es energía en forma de ondas electromagnéticas infrarrojas. El proceso de radiación no tiene mucha importancia en la refrigeración de la maquinaria eléctrica de potencia; pero, para dispositivos pequeños poco ventilados, su efecto es apreciable. La refrigeración de los anodos en determinadas válvulas termoiónicas depende en gran manera de la radiación.

El aire limpio y, claro está, el vacío, mantienen la radiación sin pérdida apreciable. El vidrio, particularmente el que contiene óxido ferroso FeO, tiene una absorción considerable; el agua aún tiene más.

La ley fundamental de la radiación térmica por una sustancia a una temperatura de θ grados centígrados es

$$P = Ke(273 + \theta)^4, \quad (5)$$

conocida con el nombre de ley de Stefan de la emisión. En ella

P es el calor emitido en unidad de tiempo,
 K es una constante que depende principalmente del tamaño de la superficie,
 $273 + \theta$ es la temperatura absoluta,
 e es el coeficiente de emisividad del material de la superficie.

El dominio de e va desde la unidad para el cuerpo negro ideal hasta aproximadamente 0,025 para una superficie especular pulida.

Como el calor radiado por un cuerpo rugoso, irregular o replegado, puede alcanzar otras partes del mismo cuerpo, y la determinación analítica precisa de los efectos de radiación, constituirá un complicadísimo problema que dependerá de la geometría exacta del cuerpo en cuestión y de sus alrededores, así como de sus coeficientes térmicos. No obstante, para muchos fines bastará con un método aproximado sencillo.

La ley de Stefan que da el calor radiado en watt por centímetro cuadrado es:

$$p = 5,7e \left(\frac{\theta + 273}{1000} \right)^4 \text{ W/cm}^2. \quad (6)$$

TABLA III

COEFICIENTES DE EMISIVIDAD TÉRMICA APROXIMADOS

Material	Emisividad e
Cuerpo negro ideal	1,00
Negro de humo	0,98
Material aislante rugoso	0,90
Hierro oxidado	0,75
Cobre oxidado	0,65
Aluminio oxidado	0,15
Aluminio pulido	0,05
Cobre pulido	0,04
Plata pulida	0,025

El cuerpo que irradia calor obedeciendo a esta ley estará recibiendo calor por radiación de los cuerpos que lo rodean. Si la temperatura del cuerpo es de θ grados centígrados y está rodeado totalmente por un recinto mucho mayor de temperatura θ_1 , la radiación *total* de calor será

$$p = 5,7e \left[\left(\frac{\theta + 273}{1\,000} \right)^4 - \left(\frac{\theta_1 + 273}{1\,000} \right)^4 \right] \text{ W/cm}^2. \quad (7)$$

En la refrigeración de la maquinaria eléctrica ordinaria, la diferencia entre la temperatura de la máquina caliente y la del recinto en que se halla (es decir, las caras interiores de las paredes y el techo) es una fracción pequeña, quizá una décima, de la temperatura absoluta. Si es $\theta_a + \Delta$ la temperatura absoluta del dispositivo, y θ_a la de las paredes que lo rodean, la radiación total es:

$$\begin{aligned} p &= 5,7e10^{-12}[(\theta_a + \Delta)^4 - \theta_a^4] \\ &= 5,7e10^{-12}(4\theta_a^3\Delta + 6\theta_a^2\Delta^2 + 4\theta_a\Delta^3 + \Delta^4) \end{aligned} \quad (8)$$

Si Δ es pequeña frente a θ_a ,

$$p \approx 5,7e10^{-12}(4\theta_a^3\Delta) \text{ W/cm}^2. \quad (9)$$

Así pues, cuando la diferencia de temperatura es pequeña, los watts radiados por centímetro cuadrado son, aproximadamente,

$$p \approx 0,0228e \left(\frac{273 + \theta}{1\,000} \right)^3 \Delta \text{ W/cm}^2, \quad (10)$$

donde Δ es la elevación de temperatura por encima de la ambiente. La variación de p con Δ es aproximadamente lineal para elevaciones de temperatura pequeñas.

Si se supone una temperatura ambiente de 25°C, la radiación total por centímetro cuadrado resulta ser,

$$p \approx 0,00060e\Delta \text{ W/cm}^2. \quad (11)$$

Una elevación de temperatura de 40°C originaría, pues, un desprendimiento de menos de 1/40 W/cm² por radiación si la emisividad fuera próxima a la unidad.

Para elevaciones muy grandes de la temperatura por encima de la temperatura ambiente, el calor absorbido por el cuerpo caliente de la radiación emitida por los cuerpos que lo rodean puede ser despreciable y podemos considerar como calor total radiado el calor total emitido.

Puede demostrarse que el coeficiente de emisividad eficaz e entre superficies paralelas de coeficientes de emisividad e_1 y e_2 es

$$e = \frac{1}{\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} - 1} \quad (12)$$

Para un cuerpo radiante pequeño cuya superficie tiene un área A_1 y una emisividad e_1 rodeado por una superficie mayor de área A_2 y emisividad e_2 , la emisividad eficaz viene dada por

$$e = \frac{1}{\frac{1}{e_1} + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{e_2} - 1 \right)}. \quad (13)$$

Obsérvese que cuando A_1/A_2 es nulo, e se hace igual a e_1 ; y cuando A_1 y A_2 son iguales, esta expresión se convierte en la correspondiente a superficies paralelas.

Según A. D. MOORE³, los incrementos de radiación obtenidos con ranuras cuadradas son los consignados en la tabla IV. Las superficies replegadas suelen dar mayor radiación que las planas de igual área proyectada.

TABLA IV

EFECTO APROXIMADO DE LAS RANURAS CUADRADAS SOBRE LA RADIACIÓN DEL CALOR

Coeficiente de emisión de una superficie plana	Coeficiente eficaz * con ranuras cuadradas
0,25	0,48
0,50	0,75
0,75	0,89
1,00	1,00

* Este es el coeficiente de emisión eficaz a utilizar con el área proyectada.

³ A. D. MOORE, *Fundamentals of Electrical Design* (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1927), 116.

4. CONVECCIÓN DEL CALOR

Aun cuando el aire es muy mal conductor del calor, todo cuerpo caliente sumergido en una atmósfera fría creará corrientes naturales de convección que ayudarán materialmente a la refrigeración. La cantidad de calor disipada por la convección *natural* del aire es del mismo orden de magnitud que la disipada por radiación, para diferencias de temperatura como las existentes ordinariamente en la maquinaria eléctrica. Sin embargo, utilizando corrientes forzadas de aire u otros gases, o utilizando fluidos tales como el aceite y el agua que tienen una capacidad calorífica (en volumen) mucho mayor que el aire, puede incrementarse mucho la disipación del calor.

La cantidad de calor extraída por la convección natural en el aire es función no lineal del tamaño, forma, material de la superficie, condición y orientación del cuerpo caliente; de su temperatura y de la del aire que le rodea; y del carácter de sus alrededores especialmente en lo que puedan afectar a la circulación libre de las corrientes de aire. Es evidente que no pueden existir constantes de la convección general, ya que las relaciones no son lineales. No obstante, la tabla V, nos puede dar una idea general de las cantidades que intervienen.

La disipación total en unidad de tiempo varía como la potencia 1,25 de la diferencia de temperaturas en cada caso. Para la posición primera.

$$p = 0,000243\Delta^{1.25} \text{ W/cm}^2, \quad (14)$$

donde Δ es la elevación de temperatura en grados centígrados. Para la posición segunda (vertical),

$$p = 0,000191\Delta^{1.25} \text{ W/cm}^2 \quad (15)$$

y para la tercera,

$$p = 0,000125\Delta^{1.25} \text{ W/cm}^2. \quad (16)$$

En general, los cuerpos más pequeños son capaces de disipar más calor por centímetro cuadrado debido a ejercer un efecto menor sobre la temperatura del aire local por parte de otras porciones del cuerpo caliente. El aire al que se halla expuesto el centro de una placa cuadrada caliente de un metro de lado está caliente a causa de la gran superficie caliente adyacente; una superficie pequeña a igual temperatura dispondría de mucho más aire fresco para extraer el calor, siendo iguales las demás cosas.

El calor extraído mediante ventilación forzada varía casi linealmente con la velocidad, para velocidades de hasta 1 500 metros por minuto, y más despacio para velocidades mayores. En los tubos largos o conductos de refrigeración, el aire es más frío a la entrada y por ello la disipación de calor por centímetro cuadrado de superficie del conducto disminuye al aumentar la longitud, siendo iguales las demás condiciones. Debido a la no linealidad de la variación de la disipación con la forma, tamaño y longitud del conducto, así como con la velocidad, los datos de refrigeración utilizables requieren, para su presentación adecuada, varias familias de curvas. Estas pueden encontrarse en diversos tratados de diseño de maquinaria eléctrica. Una expresión poco aproximada pero que da el orden de magnitud de la disipación en conductos es 0,005 W/cm² por cada 1 000 metros por minuto y por grado centígrado de exceso de temperatura sobre la temperatura media del aire.

TABLA V

DISIPACIÓN DEL CALOR EN WATT POR PULGADA CUADRADA DEBIDA A LA CONVECCIÓN NATURAL POR UNA PLACA CUADRADA DE ALUMINIO O ACERO DE TRES PIES

Elevación °C	Cara horizontal hacia arriba		Vertical		Cara horizontal hacia abajo	
	Por °C	Total	Por °C	Total	Por °C	Total
0		0		0		0
10	0,0027	0,027	0,0021	0,021	0,0014	0,014
20	0,0033	0,066	0,0025	0,050	0,0017	0,034
30	0,0036	0,108	0,0029	0,087	0,0019	0,057
40	0,0039	0,156	0,0031	0,124	0,0021	0,084
50	0,0041	0,205	0,0033	0,165	0,0022	0,110
60	0,0043	0,258	0,0034	0,204	0,0023	0,138
70	0,0045	0,315	0,0035	0,245	0,0024	0,168
80	0,0047	0,376	0,0036	0,288	0,0024	0,192
90	0,0048	0,432	0,0037	0,333	0,0025	0,225
100	0,0049	0,490	0,0038	0,380	0,0025	0,250

⁴ De E. GRIFFITHS y A. H. DAVIS, «The Transmission of Heat by Radiation and Convection», *Special Report, 9* (Londres: H. M. Stationery Office, 1931). Véase también A. D. MOORE, *Fundamentals of Electrical Design* (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1927), 119.

5. REFRIGERACIÓN DE LOS APARATOS ELÉCTRICOS

De todo lo visto anteriormente se deduce que la disipación total de calor por medios naturales, radiación y convección, es del orden de 1/15 W/cm² para una elevación de temperatura de 40°C en dispositivos tales como relés y motores pequeños encerrados. Este número debe considerarse como base aproximada para el diseño conservador de aparatos que dependen de una refrigeración natural. Con aislantes orgánicos, una disipación que superara a un sexto de watt por centímetro cuadrado en forma continuada, probablemente originaría perturbaciones. En las máquinas grandes, la disipación de calor por centímetro cuadrado aún sería menor si no se toman disposiciones especiales para la refrigeración.

En la maquinaria electromagnética, las densidades de corriente y las inducciones magnéticas son del mismo orden de magnitud en las máquinas pequeñas que en las grandes, y, por tanto, las pérdidas varían aproximadamente como el volumen, o sea, como el cubo de las dimensiones lineales. La superficie, al variar como el cuadrado de las dimensiones lineales, crece con el tamaño más lentamente que las pérdidas. En consecuencia, cuanto mayor sea la máquina, tanto mayor será, en general, el diseño de un sistema de refrigeración adecuado.

El problema de la refrigeración aumenta su importancia en forma análoga a como ocurre con el tamaño y la potencia característica de las válvulas electrónicas. Sin embargo, el problema que nos ocupa es de distinta naturaleza ya que por lo menos

el cátodo debe trabajar a una temperatura de varios centenares de grados, a fin de proveer la emisión electrónica necesaria. A él hay que aplicar calentamiento en vez de refrigeración. En las válvulas ordinarias no hay aislante orgánico, por lo que son permisibles temperaturas más elevadas, aun cuando en ciertas aplicaciones el ruido térmico desarrollado en la válvula puede hacer conveniente una temperatura de cátodo lo más baja posible. La variación de forma y tamaño con el calentamiento afecta al funcionamiento de las válvulas en ciertos circuitos críticos. En las válvulas de mucha potencia son corrientes los ánodos refrigerados por agua. No obstante, en general, la refrigeración de dispositivos electrónicos, aun siendo imprescindible para su funcionamiento satisfactorio, tiene una solución proporcionalmente menos costosa que la refrigeración de la maquinaria de potencia.

5a. *Transformadores* *. Los transformadores de no más de 100 kVA que funcionan a baja tensión pueden refrigerarse satisfactoriamente mediante una circulación natural de aire alrededor de los devanados y de la coraza exterior.

En tamaños mayores, y muy frecuentemente también en tamaños inferiores a los 10kVA, la coraza del transformador se llena de aceite, con lo que se proporciona refrigeración y se incrementa la rigidez dieléctrica. En un transformador con aceite se pueden dejar huecos menores y puede lograrse un diseño más compacto. El aceite es tan eficaz en la extracción del calor de los devanados y núcleo que el principal problema térmico del transformador autorrefrigerado por inmersión en aceite es el del paso del calor de la coraza al exterior. Puede utilizarse una coraza mayor, pero para transformadores de 30 kVA en adelante suele aumentarse la superficie refrigeradora por corrugación, o por el uso de radiadores exteriores unidos al tanque y que transportan el aceite en circulación.

En los transformadores muy grandes, a veces se hace circular agua por el interior del cobre sumergido en aceite. Este método de refrigeración requiere grandes cantidades de agua, pero el costo inicial suele ser inferior que el de los transformadores equipados con los grandes radiadores que, de otra manera, serían necesarios.

A veces, se hace circular el aceite mediante bombas a través de una tubería exterior sumergida en agua. Este método tiene la ventaja de evitar la formación de incrustaciones en el interior de las tuberías. Toda incrustación debida a las impurezas del agua se formará en el exterior, donde puede limpiarse con relativa facilidad.

Puede aumentarse la capacidad de seguridad de los transformadores autorrefrigerados por inmersión en aceite, añadiendo ventiladores que fuercen el aire sobre las superficies de los radiadores. Por ejemplo, los transformadores del extremo receptor de la línea de transmisión que va de Boulder Dam a Los Angeles ** son de 48 750 kVA cada uno cuando están autorrefrigerados y de 65 000 kVA cuando funcionan con ventiladores. El incremento de la potencia es de un $33\frac{1}{3}\%$.

5b. *Máquinas giratorias*. Los núcleos de inducidos de motores y generadores están constituidos de láminas de chapa de acero o de láminas troqueladas y se dividen en secciones, corrientemente de 5 a 8 cm de longitud, separados por conductos de ventilación. La anchura de éstos suele estar comprendida entre 1 cm y 1,25 cm, y la separación suelen proporcionarla pequeñas vigas en I soldadas por puntos a una lámina en una de sus caras. El giro de la máquina origina un gran arrastre del aire,

* Para un ulterior estudio de la refrigeración de los transformadores, véase el apartado 3 del capítulo XI.

** Estos transformadores pueden verse en la figura 4 del capítulo X.

y para incrementar la circulación suelen unirse a un extremo del motor, por lo menos, palas de un ventilador.

Hay que insuflar enormes cantidades de aire refrigerante mediante turbo-alternadores muy grandes. Por ejemplo, una unidad de 50 000 kW que funcione con un rendimiento del 98 % tendría pérdidas de 1 000 kW que requerirían un caudal de 1 700 m³ de aire por minuto, en la hipótesis de que la temperatura del aire se eleva 30°C al pasar por la máquina. Para hacer pasar esta enorme cantidad de aire por los conductores y entrehierros habría que utilizar velocidades de huracán y las pérdidas por rozamiento serían muy grandes.

Para reducir estas pérdidas por rozamiento y tener una refrigeración mejor, se ha sustituido el aire por el hidrógeno en los modernos generadores rápidos y en los reactores síncronos. En estas máquinas se hace necesario que estén encerradas por completo, de manera que con pocas precauciones contra las fugas se haga posible utilizar hidrógeno en vez de aire. El refrigerante, sea aire o hidrógeno, suele circular por unidades refrigerantes y lavadoras y vuelve a la máquina.

El hidrógeno tiene, aproximadamente, el mismo calor específico *por unidad de volumen* que el aire, a pesar de ser 14 veces más ligero. Su viscosidad es menor y la energía necesaria para acelerarlo a una velocidad dada es mucho menor. En el caso del hidrógeno, las pérdidas totales en su circulación sólo son el diez por ciento de las existentes en el caso del aire. El hidrógeno es mejor conductor del calor.

Las cubiertas que rodean las máquinas refrigeradas por hidrógeno suelen diseñarse con suficiente rigidez como para evitar daños exteriores debidos a una explosión del hidrógeno contenido cuando se mezcla con aire en la proporción que da la mezcla más explosiva. En un aspecto, el empleo de hidrógeno en lugar de aire da seguridad, porque el hidrógeno no soporta la combustión del material orgánico aislante.

También parece probable que el deterioro con el tiempo se retarde algo a causa de la eliminación de la oxidación lenta. No se dispone de una evidencia concluyente de esto a causa del poco tiempo que lleva empleándose la refrigeración por hidrógeno.

6. CALENTAMIENTO TRANSITORIO

Para determinar la capacidad de sobrecarga corta de las máquinas y conductores eléctricos se precisa de un conocimiento de sus características de calentamiento transitorio. Ello también será interesante para determinar el tiempo que pueden circular corrientes de cortocircuito de diversas intensidades sin dañar seriamente al aislante. Problema relacionado con esto es la determinación del calentamiento debido a cargas cíclicas.

Las corrientes de cortocircuito intensas originan un calentamiento tan rápido que la disipación de calor tiene entonces una importancia secundaria. Si se desprecia por completo la disipación, y se supone que todo el calor producido por efecto Joule permanece en el conductor, puede calcularse directamente el tiempo t necesario para llevar un conductor desde una temperatura inicial θ_0 hasta una temperatura θ , a causa de una corriente estacionaria de I amperes iniciada en el instante $t_0 = 0$. El calentamiento en unidad de tiempo, expresado en watt es $I^2 R$, donde R es la resistencia del conductor en ohm. Puesto que la resistencia del cobre varía como $234,5 + \theta$

en el intervalo considerado, el calentamiento por unidad de tiempo y unidad de longitud de conductor es

$$\frac{I^2 \varrho_0}{A} \times \frac{234,5 + \theta}{234,5 + \theta_0} \text{ watt}, \quad (17)$$

donde ϱ_0 es la resistividad a θ_0 grados centígrados y A es el área de la sección. Representando por G la capacidad calorífica por unidad de volumen del material conductor, AG será la capacidad calorífica de la unidad de longitud del conductor. La elevación de temperatura en unidad de tiempo es proporcional al calor desarrollado por segundo e inversamente proporcional a la capacidad calorífica, luego,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{I^2 \varrho_0}{A^2 G} \times \frac{234,5 + \theta}{234,5 + \theta_0}. \quad (18)$$

Integrando esta ecuación se tiene,

$$t = \frac{A^2 G}{I^2 \varrho_0} (234,5 + \theta_0) \ln \frac{234,5 + \theta}{234,5 + \theta_0} \text{ s.} \quad (19)$$

Para el cobre a $\theta_0 = 20^\circ\text{C}$,

$$t = 5,12 \times 10^8 \frac{A^2}{I^2} \ln \frac{234,5 + \theta}{234,5 + \theta_0} \text{ s}, \quad (20)$$

donde A viene dada en centímetros cuadrados e I en amperes.

Ejemplo. ¿Qué tiempo emplearía un pedazo de alambre de cobre del Núm. 0000 en calentarse desde 20°C hasta 200°C si conduce una corriente de 10 000 A?

Solución: La sección del N.º 0000 es de $0,11 \text{ cm}^2$

$$t = 5,12 \times 10^8 \frac{0,11^2}{10\,000^2} \ln \frac{434,5}{254,5} \\ = 3,1 \text{ s.}$$

Puede justificarse la omisión de las pérdidas de calor durante este corto período de tiempo comparando los watt de calor disipados a 200°C con la potencia $I^2 R$ convertida en calor por efecto Joule. En el problema específico, este método es totalmente satisfactorio, dada la pequeñez del cociente entre el calor disipado y el desarrollado. Por otra parte, si el mismo alambre transportara una corriente de 1 000 A solamente (la décima parte que antes) no se calentaría en modo alguno hasta 200°C en 310 s, según indica la fórmula, ya que la disipación de calor sería un factor regulador.

En la maquinaria eléctrica, las características de calentamiento transitorio suelen expresarse dando la capacidad a la sobrecarga durante un período de media hora, una hora o dos horas, a continuación de un tiempo de funcionamiento continuo a plena carga. Por ejemplo, una máquina normal que presente una elevación de temperatura de 40°C funcionando continuamente a plena carga puede soportar el 125 % de su plena carga durante dos horas con una elevación total de temperatura de 55°C sobre la temperatura ambiente.

A muchas máquinas eléctricas se les exige un funcionamiento cíclico. El calentamiento no será siempre el factor limitador si las cargas son muy cortas e intensas. En ciclos cortos de variación de la carga puede calcularse el calor como debido a una corriente hipotética de carga de intensidad constante igual a la intensidad eficaz de la corriente verdadera durante el ciclo de carga, más las pérdidas constantes tales como pérdida en el núcleo, pérdida del campo en el cobre, y en el devanado. Para que sea adecuado este método, el ciclo de carga debe solamente ser una fracción pequeña de la constante de tiempo térmica de la máquina. En estas condiciones, la variación cíclica de temperatura sólo será una pequeña fracción de la elevación total sobre la temperatura ambiente y puede despreciarse.

Ejemplos de ciclos de trabajo cortos son los de los generadores y transformadores para soldadura eléctrica; los de motores de máquinas herramientas tales como limadoras y cepilladoras, en las que se precisa inversión; y en los ascensores, montacargas de minas y laminadores.

En ciclos de trabajo que cubran un tiempo comparable o superior que la constante de tiempo térmica de la máquina deben considerarse la capacidad calorífica, la conductancia térmica y la disipación de la máquina, ya que existirá una variación cíclica considerable de la temperatura.

El hablar de una simple «constante de tiempo térmica» de una máquina, aun siendo conveniente, es en realidad una supersimplificación. Las distintas partes de una máquina no alcanzan sus temperaturas finales respectivas a carga constante siguiendo la misma curva, ni siquiera curvas semejantes.

Los ciclos largos de trabajo se presentan en los generadores, transformadores y cables de sistemas de potencia (ciclo de 24 horas) y en los motores que accionan perforadoras o tornos que requieren a veces varias horas para realizar un trabajo. Los transformadores que alimentan hornos o baños electroquímicos, o arcos eléctricos, pueden tener ciclos de trabajo largos. Hasta la fecha no existe ningún método normalizado para calibrar máquinas sometidas a tales ciclos *, observándose gran interés en esta cuestión en las publicaciones técnicas modernas. Sugerimos consultar las referencias consignadas en la bibliografía.

* En el apartado 8 del capítulo XIV, se estudian las normas americanas propuestas para calibrar los transformadores de potencia y de distribución.

Consideraciones generales de diseño y costo

Hasta ahora se han considerado individualmente diversos tipos de fenómenos de campo y de circuito: eléctricos, dieléctricos, magnéticos y térmicos. De ahora en adelante estudiaremos los tipos más importantes de aparatos y maquinaria eléctrica. Las teorías de las que pueden calcularse sus características eléctricas se desarrollarán combinando los conceptos fundamentales de los circuitos eléctricos, dieléctricos, magnéticos y térmicos contenidos.

1 MAQUINARIA ELÉCTRICA

El mejor diseño es el mejor compromiso entre los diversos elementos contendientes que deban entrar en él. En maquinaria eléctrica son:

1. El circuito (o circuitos) eléctrico,
2. El circuito magnético,
3. El circuito dieléctrico (aislamiento),
4. El circuito térmico,
5. El circuito mecánico (medios para soportar los diferentes esfuerzos mecánicos),
6. Balance del costo,
7. Facilidad de fabricación,
8. Facilidad de mantenimiento y reparación,
9. Características acústicas (funcionamiento razonablemente silencioso).

El costo es esencial en ingeniería y constituye un factor regulador en el diseño de la maquinaria eléctrica. Prácticamente todas las máquinas existentes pueden volver a diseñarse con facilidad para lograr mayores rendimientos y mejores características de funcionamiento, a expensas de un mayor costo de fabricación; pero, cuando el diseño existente se ha realizado adecuadamente a la luz de los conocimientos técnicos del momento, el costo incremental correspondiente a la mejora del rendimiento o de otras características será mayor que el valor de dicha mejora. Específicamente, el rendimiento de una máquina de un cierto diseño es el mejor posible si la suma del costo inicial y el valor actual de las pérdidas a lo largo de toda su vida útil prevista es mínima, siendo igual todo lo demás. La competencia de precios puede forzar a un diseño de costo más bajo, pero esa economía es falsa.

La elección de los materiales está influida por los costos y el continuo desarrollo de materiales mejores mantiene al diseño en continua evolución, como ocurre con el aumento de conocimientos técnicos. El cobre es superior en conductibilidad a todos los demás metales menos la plata, por lo que se emplea casi exclusivamente en los devanados de las máquinas, ya que el costo de la plata es unas 50 veces mayor. El aluminio suele competir en costo con el cobre (costo por mho-metro), pero a causa de su mayor tamaño para una conductancia dada no suele ser adecuado para devanados, ya que el espacio disponible debe repartirse celosamente entre los materiales magnético y aislante y los medios de refrigeración —conductos y demás—

Parte II

TRANSFORMADORES

así como entre los mismos conductores. Los rotores en jaula de ardilla de los motores de inducción se hacen muchas veces de aluminio fundido, por razones que más adelante se verán.

A las grandes inducciones magnéticas utilizadas en la maquinaria eléctrica de potencia, los mejores materiales magnéticos son el hierro puro y el hierro dulce, desde los puntos de vista del costo y del funcionamiento. A inducciones magnéticas bajas, las aleaciones níquel-hierro (grupo «permalloy») y el hierro muy puro son superiores, y así hallan su aplicación en los transformadores para comunicaciones y en las bobinas de choke. Para reducir los efectos de las corrientes de Foucault inducidas por los flujos variables con el tiempo, el circuito magnético suele construirse con láminas barnizadas de acero al silicio, cuyo espesor es el determinado por el compromiso óptimo entre el gasto de fabricación y la ganancia en características de funcionamiento. En los transformadores para sistemas de potencia suelen emplearse láminas de espesor 0,014 pulgadas (0,36 mm). Las caras y piezas polares que soportan principalmente un flujo continuo al que se encuentra superpuesto un cierto rizado, suelen emplear láminas mucho más gruesas. Los rotores de los alternadores movidos por turbina de vapor rápidas están constituidos por piezas de forja macizas de acero, a causa de los grandes esfuerzos centrífugos que deben soportar, a pesar de la existencia de pérdidas ocasionadas por el rizado. Incidentalmente, en este caso todo el diseño está afectado por la gran velocidad y la máquina se construye relativamente larga y delgada a fin de reducir al mínimo los esfuerzos centrífugos y las pérdidas por generación de viento. Las características de la máquina motriz, que exigen gran velocidad para tener buen rendimiento, afectan al diseño en forma primordial.

La resistencia mecánica de las diversas partes de la máquina suele ser varias veces mayor que las fuerzas de carga normales. Hay que proporcionar una robustez suficiente para soportar las fuerzas de cortocircuito, las fuerzas de inercia debidas a disminuciones bruscas de velocidad o a inversión rápida y a los fuertes golpes que siempre pueden esperarse en la práctica. Las máquinas giratorias que no tienen que realizar trabajo exterior, tales como los motores síncronos sobreexcitados y los convertidores síncronos suelen estar dotados de árboles mucho más ligeros que los motores de igual potencia aparente.

En la fabricación de maquinaria eléctrica se procura utilizar piezas individuales normalizadas en los diseños del mayor número de máquinas. Por ejemplo, en docenas de motores de velocidades, tensiones, potencias, número de fases e incluso tipos, se emplea el mismo diseño de laminación. Puede servirse un encargo de un motor especial de tamaño moderado sin recurrir al método prohibitivo, por lo caro, de realizar un diseño completo nuevo, sino seleccionando primeramente un tamaño adecuado de armadura, luego de láminas, de bobinas preformadas y de otras partes normalizadas que pueden conjuntarse en una máquina que reúna los requisitos pedidos.

Muy frecuentemente, el diseñador se guía por dos o más objetivos y debe realizar una valorización relativa de ellos. Por ejemplo, un motor de inducción tiene unas características de funcionamiento limitadas por su par máximo y por el calentamiento de su estator. Hay que decidir cuántas veces mayor que el par a plena carga ha de ser el par máximo. Una reactancia síncrona debe poder consumir potencia reactiva adelantada o atrasada. Hay que decidir cuál es el valor adecuado del cociente entre las dos capacidades.

Las máquinas giratorias suelen llevar los devanados dentro de ranuras y el flujo magnético de la máquina encuentra la parte más restringida de su camino en el hierro en los dientes que limitan dichas ranuras. Hay que tener un cuidado especial en la valoración de la inducción magnética en las partes más estrechas de los dientes, a causa de la rapidez con que crecen con la inducción magnética por encima del codo de la curva de saturación, las pérdidas en el núcleo y el campo magnético. Si en los dientes es débil la inducción magnética, el diseño es pobre porque se desperdicia mucho material y peso en otras partes del circuito magnético en donde la inducción magnética es aún menor. Hay, muy poca tolerancia para un buen diseño.

No pretendemos presentar aquí, ni aún brevemente, los detalles del diseño de máquinas eléctricas, sino simplemente indicar algunos de los principios básicos que lo guían. El conocimiento y la apreciación de estos principios sirven para dar una perspectiva en el estudio de la teoría del funcionamiento y de sus características.

2. SISTEMAS DE POTENCIA

El diseño adecuado de un sistema de potencia, utilizando equipo y unidades individuales de máquinas está guiado por los mismos principios fundamentales que el diseño de las propias unidades. Las características de los dispositivos de carga imponen ciertos requisitos definidos. La potencia eléctrica suministrada por un sistema estará caracterizada por su tensión constante o casi constante, seguridad, fases equilibradas (si es polifásico), forma de onda sinusoidal y frecuencia constante. Además de estos requisitos impuestos por las cargas, hay que combatir la interferencia inductiva con circuitos de comunicaciones y todo el sistema debe estar diseñado para que realice las funciones requeridas con un costo anual total mínimo. Las centrales generadoras hidroeléctricas deberán complementarse con térmicas si son de esperar períodos de estiaje. Las centrales térmicas deberán instalarse en lugares en que sea fácil una refrigeración por agua adecuada y sea económico el transporte del combustible. Entre los problemas que debe tratar el diseñador de un sistema de potencia se cuentan: la selección del tamaño de los generadores y el número de unidades auxiliares; la elección de la frecuencia, tensión, número de fases, tipo de sistema de distribución y la determinación de los tipos de pararrayos y grado de protección contra las descargas atmosféricas y tipo y número de relés automáticos protectores.

3. DISPOSITIVOS ELECTRÓNICOS

En comunicaciones, mando y otros circuitos se utilizan dispositivos eléctricos y electrónicos de poca potencia. En tales equipos, la disipación del calor no constituye problema alguno y la potencia consumida podrá despreciarse salvo en lo que afecta al funcionamiento general. Para tales dispositivos, entre los que se cuentan las válvulas de vacío para recepción, condensadores pequeños, relés, bobinas de choke, altavoces, etc., el criterio de diseño contiene un equilibrio entre el costo incremental y la calidad del funcionamiento. En los aparatos de gran calidad y pequeño tamaño, la consideración del costo puede quedar relegada a segundo término durante

el desarrollo del diseño, hasta que se considere el problema de la producción. Esto no vale para aparatos grandes. Las válvulas de gran potencia para transmisión requieren que se les proporcione refrigeración a los anodos, siendo muy común la circulación de agua por el anodo. El empleo de los mejores materiales para los cátodos y para las demás partes, el montaje robusto para reducir al mínimo las vibraciones y el microfonismo y la situación y separación precisas de los diversos electrodos, aun teniendo importancia, no aumentan prácticamente el costo de la válvula cuando se trata de grandes cantidades.

La limitación de potencia de las válvulas puede deberse a su capacidad de tensión, a la facilidad de establecerse descargas disruptivas entre el ánodo y los otros electrodos o, en los tubos de gas, a su tensión inversa disruptiva. La limitación de la intensidad de la corriente puede deberse al calentamiento del ánodo o a la emisión catódica modificada por efecto de la carga espacial. A frecuencias ultraelevadas, el tiempo de tránsito de los electrones tiene gran importancia y en las válvulas ordinarias puede exigir una modificación drástica del tamaño y disposición de los electrodos. Para una válvula de potencia dada cualquiera, la elección por los diseñadores de la tensión de placa y de la intensidad de la corriente características representa un compromiso al que se llega considerando los costos incrementales relativos de la válvula y también los costos de los generadores de potencia y de otros elementos de circuito y dispositivos que se tengan que usar con las válvulas. Por ejemplo, una válvula de 5 W diseñada para 500 V y 10 mA es mucho más económica que otra que se diseñe para 50 V y 100 mA, porque la gran emisión catódica, las grandes capacidades requeridas por los circuitos exteriores y el bajo rendimiento de rectificación asociados a la segunda válvula incrementarán los costos mucho más que los hará disminuir el pequeño ahorro debido a la menor separación y al menor aislante requerido por la nueva tensión disruptiva.

Existen tantos tipos de válvulas electrónicas que cualquier estudio breve de los principios de diseño sólo podrán reducirse a cuestiones muy generales. Partiendo de un diseño de prueba, se justifica todo cambio que aumente de alguna manera la efectividad de la válvula a menos que su ventaja quede anulada por alguna otra disminución de efectividad, o a menos que el costo del diseño reformado pese más que la ganancia en las características de la válvula.

En el mercado se halla un gran número de diseños de válvulas. Una consideración importante en el diseño de toda una serie de válvulas es el equilibrio adecuado entre, por una parte, la normalización de relativamente pocos diseños a fin de obtener los beneficios máximos de la producción en masa y el mínimo número de requisitos de catálogo y, por otra parte, la producción de un número relativamente grande de diseños a fin de poder disponer de válvulas diseñadas individual y específicamente para un campo de aplicación más reducido y especializado. Por ejemplo, entre las válvulas de recepción deben haber rectificadoras, indicadoras, conversoras, amplificadoras de tensión, detectoras y amplificadoras de potencia. Para la mayoría de las aplicaciones a radioreceptores bastan aproximadamente 30 válvulas de entre todas esas categorías, si bien se fabrican varios centenares.

4. CIRCUITOS ELECTRÓNICOS Y DE OTROS TIPOS

Los análisis de muchos circuitos y dispositivos que utilizan elementos de gobierno electrónicos o de otro tipo de poco consumo, se caracterizan por una gran complejidad, especialmente cuando se consideran circuitos equivalentes. El diseñador de estos dispositivos suele considerar suficiente seleccionar entre las unidades disponibles en el mercado aquellas que son más adecuadas y disponer su circuito de manera que se obtengan los resultados deseados de la manera más sencilla y directa. Hasta un cierto límite, pueden utilizarse provechosamente los métodos experimentales de diseño, ya que el análisis teórico completo del circuito podría ser muy engorroso o casi imposible, y por tanto costoso. En cambio, el costo de los métodos experimentales de prueba y error, bien dirigidos, puede ser relativamente bajo a causa de los bajos costos de los elementos y del montaje del conjunto experimental de todos ellos.

En los circuitos de señalización y mando, la seguridad debe ser el único criterio importante. Por ejemplo, en la señalización de ferrocarriles el fallo de un mecanismo, de un circuito, o de una fuente de alimentación de potencia puede hacer que un maquinista de locomotora perciba la señal de peligro en vez de la luz verde. Los fallos de los circuitos pueden reducirse empleando relés de contactos dobles, e incluso cableado en paralelo. En el diseño de circuitos de mando y para otros fines especiales, puede surgir el conflicto entre el costo inicial y el de mantenimiento. Por ejemplo, el empleo de un relé que realice varias funciones puede reducir materialmente el número de relés de un circuito; pero los ajustes que habrá que realizar sobre él serán probablemente más críticos y más difícil la formación de personal para su mantenimiento.

No es raro encontrar que un tipo particular de dispositivos se pueda volver a diseñar repetidamente con el máximo cuidado para un fin específico, sin poder cumplir adecuadamente la función para la que se destina. Esta situación es, a menudo, precursora de la *invención* de un método totalmente nuevo para conseguir el resultado deseado. Si dicha invención es importante, suele pasar por una serie de desarrollos y perfeccionamientos del diseño. Ejemplos de esto son el arte de «cargar» las líneas telefónicas, debido a HEAVISIDE y posteriormente perfeccionado por M. I. PUPIN y G. A. CAMPBELL; el invento del triodo termiónico amplificador, que desplazó al «repetidor» electromecánico; y el tubo de modulación de la velocidad, generador de frecuencias ultraelevadas que evita las perturbaciones debidas al tiempo de tránsito de los electrones haciendo uso de él, que representa una seria limitación en las válvulas ordinarias.

En la técnica hay que realizar continuamente compromisos y el mejor técnico es aquel que reconoce y valora mejor las fuerzas pertinentes que actúan sobre el diseño, aplicación y funcionamiento, y con imaginación, precisión, destreza y recursos sabe elegir el mejor compromiso.

Transformadores: Principios generales

En su forma más simple, un transformador consiste en dos devanados conductores que se ejercen inducción mutua. El *primario* es el devanado que recibe la potencia eléctrica, y el *secundario* es el que puede entregarla a una red exterior. Los devanados suelen estarlo sobre un núcleo laminado de material magnético, o constituido por una aleación pulverizada y comprimida, y entonces se habla de un *transformador con núcleo de hierro*. A veces, como ocurre en muchos transformadores de radiofrecuencia, no hay núcleo alguno y se dice que se trata de un *transformador con núcleo de aire*. En otros tipos, como ocurre en la bobina de inducción, el núcleo puede estar constituido por un haz compacto de alambres finos de hierro, constituyendo el aire el camino de retorno para el flujo magnético. Otros ejemplos de esta construcción abierta se encuentran en los transformadores utilizados en teléfonos y algunos tipos de transformadores de radiofrecuencia.

1. TEORÍA ELEMENTAL DEL TRANSFORMADOR

Cuando se desprecian las corrientes de desplazamiento debidas a las capacidades de los devanados, los principios fundamentales a partir de los cuales se desarrolla la teoría de los transformadores vienen expresados por las ecuaciones

$$v_1 = R_1 i_1 + \frac{d\lambda_1}{dt} = R_1 i_1 + e_1 \quad (1)$$

$$v_2 = R_2 i_2 + \frac{d\lambda_2}{dt} = R_2 i_2 + e_2, \quad (2)$$

donde los subíndices 1 y 2 se refieren a los devanados primario y secundario, y

- v_1 y v_2 son las tensiones instantáneas terminales,
- i_1 e i_2 son las intensidades instantáneas de las corrientes,
- R_1 y R_2 son las resistencias efectivas,
- λ_1 y λ_2 son los flujos instantáneos que atraviesan todas las espiras de primario y secundario,
- e_1 y e_2 son las tensiones instantáneas inducidas en primario y secundario por los flujos variables con el tiempo.

Puede emplearse cualquier sistema compatible de unidades. En estas ecuaciones, los sentidos positivos de las tensiones se toman como caídas de potencial en el sentido de un tornillo directo respecto a un sentido del flujo tomado como positivo y se indican con los signos + y - en la figura 1. También es conveniente considerar sentidos positivos para las corrientes de primario y secundario en este mismo sentido del tornillo directo respecto al flujo positivo, según indican las flechas i_1 e i_2 de la figura 1.

Para estos sentidos positivos, los signos algebraicos de las ecuaciones fundamentales son los que figuran en las ecuaciones (1) y (2) *.

Para utilizar las ecuaciones (1) y (2) es necesario hallar las relaciones existentes entre los flujos y las intensidades de corriente en los devanados. Si es constante la permeabilidad del núcleo, los flujos serán proporcionales a las intensidades de las

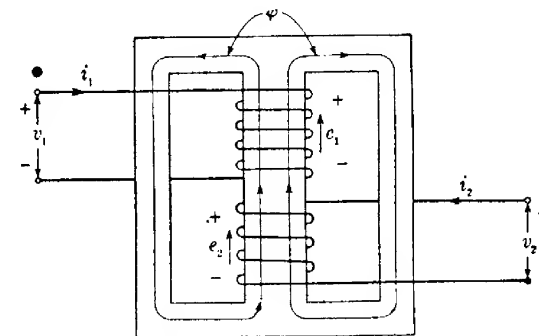


FIG. 1. Esquema de un transformador, indicando los sentidos positivos de las corrientes y tensiones que figuran en las ecuaciones (1) y (2)

corrientes que los crean y, en consecuencia, por el principio de superposición, podrán expresarse los flujos totales como suma de las componentes creadas por cada corriente actuando por sí sola. Es decir,

$$\lambda_1 = L_1 i_1 + M i_2 \quad (3)$$

$$\lambda_2 = L_2 i_2 + M i_1, \quad (4)$$

donde L_1 y L_2 son los coeficientes de autoinducción de los devanados y M es el coeficiente de inducción mutua. En estas ecuaciones, $L_1 i_1$ es la componente del flujo que atraviesa el primario creada por la corriente primaria, y $M i_2$ es la componente del flujo que atraviesa el primario creada por la corriente del otro devanado. Análogamente, $L_2 i_2$ y $M i_1$ son las componentes de autoinducción y de inducción mutua del flujo que atraviesa el secundario. Los coeficientes L_1 , L_2 y M son las constantes de proporcionalidad que relacionan las componentes de los flujos con las corrientes que las crean. Entonces, según la teoría clásica de los circuitos lineales acoplados, las ecuaciones fundamentales pueden escribirse en la forma

$$v_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (5)$$

$$v_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \quad (6)$$

La permeabilidad del núcleo de hierro de un transformador no es constante, y por tanto sus coeficientes de autoinducción no son constantes; sus valores dependen de las condiciones magnéticas instantáneas en el núcleo. Así, pues, es evidente que la

* Con relación a estos signos algebraicos, repárese el apartado 4 del capítulo VI.

aplicación de las ecuaciones (3), (4), (5) y (6) con coeficientes de autoinducción constantes, a un transformador con núcleo de hierro, no es rigurosa, si bien se utilizan a menudo como base para el análisis de dichos transformadores y los resultados así obtenidos, adecuadamente interpretados, suelen concordar satisfactoriamente con los resultados experimentales. En el capítulo XVII se estudia este método de análisis, pero de momento es aconsejable adoptar otro método particularmente adecuado para el análisis de los transformadores con núcleo de hierro y que no implica la superposición de componentes del flujo, proceso éste que requiere una considerable justificación cuando se aplica a núcleos magnéticos no lineales.

Para obtener un concepto físico del comportamiento de un transformador con núcleo de hierro y una primera aproximación a la teoría de su comportamiento, supongamos que todo el flujo se halla confinado en el núcleo magnético de gran permeabilidad y que por tanto atraviesa a todas las espiras de ambos devanados. Luego se estudiarán los efectos de las fugas magnéticas. De acuerdo con esta hipótesis, los flujos totales que atraviesan a primario y secundario son:

$$\lambda_1 = N_1 \varphi \quad (7)$$

$$\lambda_2 = N_2 \varphi, \quad (8)$$

donde N_1 y N_2 son los números de espiras de primario y secundario y φ es el valor instantáneo del flujo en el núcleo (o flujo por espira) creado por las fuerzas magnetomotrices combinadas de las corrientes de primario y secundario. Es decir, los flujos de las ecuaciones (7) y (8) son los flujos resultantes creados por la acción combinada de las dos fuerzas magnetomotrices de primario y secundario actuando simultáneamente, en vez de la suma de las componentes debidas a cada una de las corrientes actuando por separado, como ocurría en la teoría de circuitos lineales de las ecuaciones (3), (4), (5) y (6). En tal caso, las ecuaciones (1) y (2) pueden escribirse en la forma

$$v_1 = R_1 i_1 + N_1 \frac{d\varphi}{dt} = R_1 i_1 + e_1 \quad (9)$$

$$v_2 = R_2 i_2 + N_2 \frac{d\varphi}{dt} = R_2 i_2 + e_2, \quad (10)$$

donde e_1 y e_2 son las tensiones inducidas por el flujo variable con el tiempo en el núcleo.

Consideremos, en primer lugar, las condiciones existentes cuando está abierto el secundario y a los terminales del primario se aplica una tensión alterna de amplitud y frecuencia constantes. Según la ecuación (9), el flujo deberá ajustarse por sí mismo de manera que la suma de la caída óhmica en el primario más la fuerza contraelectromotriz inducida por el flujo variable con el tiempo equilibre exactamente a la tensión aplicada, y la corriente del primario que crea el flujo debe ajustar su intensidad para satisfacer estas condiciones. Como la caída óhmica en vacío en el primario suele ser muy pequeña, la tensión inducida en el primario será casi igual a la tensión aplicada. El flujo en el núcleo induce también una tensión en el secundario y como la mayoría del flujo está confinado en el núcleo, la razón de la tensión en el primario a la tensión en el secundario es casi igual a la razón del número de espiras del primario al número de espiras del secundario. De esta manera, este sencillo dispositivo está-

tico es capaz de cambiar la tensión a la cual se dispone de la potencia de un generador de corriente alterna.

Si se conecta el secundario a un circuito de utilización, circulará corriente por el secundario. El núcleo se halla ahora accionado por la fuerza magnetomotriz de la corriente del secundario pero, a pesar de esta fuerza magnetomotriz, el flujo en el núcleo queda prácticamente inalterado, puesto que en virtud de la ecuación (9), este flujo debe inducir aún una fuerza contraelectromotriz en el primario que difiera de la tensión a él aplicada solamente en la caída óhmica en el primario, que suele ser pequeña incluso a plena carga. Luego, cuando por el secundario circula corriente, la intensidad de la corriente del primario varía de manera que compense a la fuerza contraelectromotriz de la corriente del secundario.

Suele convenir considerar la corriente del primario como suma de una *componente de excitación* i'_φ y una *componente de carga* i'_L . Es decir,

$$i_1 = i'_\varphi + i'_L. \quad (11)$$

La corriente de excitación i'_φ es la componente de la corriente del primario que es suficiente por sí misma para crear el flujo requerido para inducir la fuerza contraelectromotriz en el primario y es igual a la intensidad de la corriente en vacío correspondiente a unas condiciones en vacío para las cuales el flujo en el núcleo sea el mismo que en carga. La componente de carga i'_L de la corriente del primario crea una fuerza magnetomotriz que se opone y equilibra exactamente a la fuerza magnetomotriz de la corriente del secundario. Si se toman en el mismo sentido respecto al núcleo los sentidos positivos de las corrientes de primario y secundario —como i_1 e i_2 en la figura 1— la relación entre la intensidad de la corriente de secundario i_2 y la componente de carga i'_L de la corriente del primario es:

$$N_1 i'_L = -N_2 i_2. \quad (12)$$

Por tanto, cuando se conecta el secundario a un circuito de utilización, la corriente consumida por la carga origina una variación compensadora en la corriente del primario.

2. TRANSFORMADOR IDEAL

El moderno transformador con núcleo de hierro se acerca tanto a la perfección que puede considerarse en muchos problemas como un dispositivo transformador perfecto. En la forma más sencilla de la teoría del transformador se supone que:

1. Son despreciables las resistencias de los devanados;
2. Es despreciable la pérdida en el núcleo;
3. El flujo magnético total atraviesa todas las espiras de ambos devanados;
4. La permeabilidad del núcleo es tan elevada que con una fuerza magnetomotriz despreciable se consigue el flujo necesario;
5. Las capacidades de los devanados son despreciables.

Es decir, se supone que el transformador tiene unas características que se aproximan a las de un transformador ideal, sin pérdidas, sin fugas magnéticas y sin corriente de excitación².

De acuerdo con las hipótesis 1 y 3, las ecuaciones (9) y (10) se reducen para un transformador ideal a

$$v_1 = e_1 = N_1 \frac{dq}{dt} \quad (16)$$

$$v_2 = e_2 = N_2 \frac{d\varphi}{dt}, \quad (17)$$

donde φ es el flujo resultante creado por la acción simultánea de las corrientes de primario y secundario. Luego

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad \blacktriangleright (18)$$

Así, para un transformador ideal, las tensiones instantáneas entre terminales son proporcionales a los números de espiras de los devanados y sus formas de onda son exactamente iguales. Además, cuando se recorren los devanados de la figura 1 desde sus terminales marcados con punto hasta sus terminales sin marcar, el núcleo se halla rodeado en el mismo sentido por ambos devanados y por tanto, para un transformador ideal, las tensiones entre terminales de primario y secundario están en concordancia de fase cuando se toman sus sentidos positivos en los sentidos indicados por los signos + y - de la figura 1. Es decir, en un instante cualquiera, el terminal del primario marcado con un punto, tiene, en realidad, la misma polaridad relativa que el terminal del secundario marcado con un punto.

► Obsérvese que el funcionamiento de un transformador depende del flujo variable con el tiempo y por tanto, en el estado permanente, el transformador funciona únicamente con tensión alterna. ◀

Según las hipótesis 2 y 4, la fuerza magnetomotriz total necesaria para crear el flujo resultante es nula. La fuerza magnetomotriz total es la resultante de los

² El transformador ideal se estudia basándose en las ecuaciones de los circuitos acoplados y se demuestra que, según la hipótesis 3, los cocientes entre los coeficientes de autoinducción de un transformador ideal son

$$\frac{L_1}{M} = \frac{M}{L_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (13)$$

$$\frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2. \quad (14)$$

El coeficiente de acoplo k , definido por

$$k \equiv \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (15)$$

es una cantidad útil en la teoría de los circuitos acoplados. De las ecuaciones (13) y (14) resulta que el coeficiente de acoplo de un transformador ideal es la unidad. Según la hipótesis 4, los coeficientes de autoinducción de un transformador ideal son infinitamente grandes, pero entre ellos se cumplen las relaciones indicadas en las ecuaciones (13) y (14).

ampere-espiras de primario y secundario y por tanto, si se toman los sentidos positivos de las corrientes de primario y secundario en el mismo sentido respecto al núcleo, como en la figura 1,

$$N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0. \quad (19)$$

Es decir, para un transformador ideal, la corriente de excitación es nula y por tanto, en virtud de la ecuación (11), la corriente del primario coincide con su componente de carga y la ecuación (12) se reduce a la (19), para un transformador ideal,

$$\frac{i_1}{i_2} = - \frac{N_2}{N_1}. \quad \blacktriangleright (20)$$

El signo menos de la ecuación (20) indica que las corrientes crean fuerzas magnetomotrices de sentidos opuestos. Cuando se emplean las ecuaciones (19) y (20) como aproximaciones para un transformador real, no se aplicarán a las corrientes continuas estacionarias que puedan existir en los devanados debido a causas exteriores.

Obsérvese que las flechas i_1 e i_2 de la figura 1, sólo indican los sentidos positivos de las corrientes, supuestos ambos en el sentido del tornillo directo, respecto al flujo positivo. Las flechas no significan que mientras la corriente i_1 circule en su sentido positivo, la corriente del secundario circule también en su sentido positivo. Como las corrientes de primario y secundario crean fuerzas magnetomotrices opuestas, las corrientes de primario y secundario en el sentido directo en un transformador ideal, están en oposición de fase, según indica el signo menos, de la ecuación (20). Es decir, mientras la corriente del primario penetra por el terminal marcado con un punto, la corriente del secundario sale por el terminal marcado con punto y entra en el terminal correspondiente del circuito de utilización.

Multiplicando la ecuación (18) por la (20),

$$\frac{v_1 i_1}{v_2 i_2} = -1. \quad (21)$$

Es decir, para un transformador ideal, las potencias instantáneas en primario y secundario son numéricamente iguales. El signo menos demuestra que, mientras el secundario entrega potencia al circuito de utilización, el primario absorbe potencia del generador.

Dividiendo la ecuación (18) por la (20) se tiene,

$$\frac{v_1/i_1}{v_2/i_2} = - \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \quad (22)$$

o sea,

$$\frac{v_1}{i_1} = - \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \frac{v_2}{i_2} \quad (23)$$

Si se conecta al secundario una carga resistiva R_L , como se indica en la figura 2, la corriente instantánea que circula por la carga, tiene el mismo sentido que la caída

instantánea de potencia en la carga. Si es v_2 la tensión entre los terminales del secundario de la figura 2, la intensidad de la corriente que atraviesa la carga en el sentido de la caída de potencia es i_L . Obsérvese que, en la figura 2,

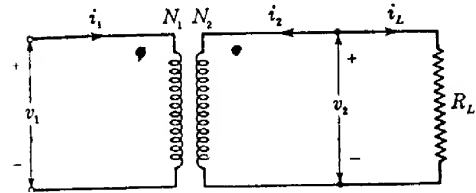


FIG. 2. Esquema simplificado de un transformador. Los terminales marcados con punto son de igual polaridad relativa y corresponden a los terminales marcados con punto en la figura 1

$$i_L = -i_2. \quad (24)$$

Luego,

$$v_2 = R_L i_L = -R_L i_2 \quad (25)$$

o sea,

$$\frac{v_2}{-i_2} = R_L \quad (26)$$

De las ecuaciones (23) y (26),

$$\frac{v_1}{i_1} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 R_L. \quad (27)$$

Así, en la parte del primario, la combinación de la carga y el transformador equivale a una resistencia

$$R'_L = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 R_L \quad \blacktriangleright (28)$$

conectada en el circuito del primario. Este resultado puede extenderse a un transformador ideal con una impedancia Z_L conectada a los terminales del secundario. Luego, si se interpone un transformador entre una carga y un generador, la impedancia aparente que la carga presenta al generador se puede transformar en un valor diferente del de la impedancia real de la carga.

► Por tanto, puede decirse que un transformador es un dispositivo que transforma tensiones alternas, intensidades de corriente alterna, o impedancias. También puede servir para aislar un circuito de otro o para aislar la corriente continua, manteniendo al mismo tiempo la continuidad de la corriente alterna entre los circuitos. ◀

3. USOS DE LOS TRANSFORMADORES

En la distribución de potencia eléctrica, razones de seguridad exigen que la tensión a que se suministre la potencia a los usuarios no supere los 300 V. En la mayoría de las localidades españolas, la tensión de suministro es de 125 V, si bien modernamente se tiende a adoptar las de 220 V para alumbrado y 380 V para usos industriales. Supongamos que en un lugar situado a 15 km de la estación generadora exista una demanda de 500 kW de una potencia suministrada en forma de corriente monofásica de tensión 125 V con un factor de potencia unidad. Si se ajusta la cantidad de cobre de los hilos de manera que las pérdidas por transmisión ($I^2 R$) sean de 75 kW, o sea, un rendimiento del 87 %, para realizar la trans-

misión a 125 V se necesitarán unos 34 000 000 kg de cobre, y solamente se necesitarían 3 400 kg para la transmisión a 12 500 V. Si el cable de cobre cuesta a 25 pesetas kilo, el costo de los cables de transmisión, solamente sería en el primer caso de 850 000 000 de pts, y en el segundo, solo de 85 000 pts. Un transformador de 500 kVA que reduzca la tensión de la línea de 12 500 V a 125 V, cuesta unas 110 000 pesetas. Su rendimiento a plena carga es, aproximadamente del 98,5 %.

El sistema de transmisión y distribución por corriente alterna se ha hecho casi universal a causa de que el transformador hace posible el funcionamiento de las diferentes partes del sistema a sus tensiones más adecuadas. Otros factores importantes que favorecen los sistemas de corriente alterna son las excelentes cualidades de los generadores sincrónicos y de los motores de inducción. No es exagerado afirmar que sin la simplicidad, manejabilidad y gran rendimiento del transformador, hubiera sido imposible el enorme desarrollo de los sistemas de transmisión y distribución eléctrica de los últimos cincuenta años.

En el campo de las comunicaciones eléctricas, también es indispensable el transformador. Entre otros empleos, hace posible una transmisión máxima de potencia de una sección a otra de un circuito. Por ejemplo, consideremos un amplificador lineal (clase A) de válvula de vacío, que suministre potencia a un altavoz. Para la corriente alterna, la salida de un amplificador lineal se puede considerar como un generador de fuerza electromotriz μE_s , en serie con la resistencia dinámica de placa r_p de la válvula, donde μ es el factor de amplificación de la válvula y E_s es la tensión alterna de señal aplicada entre rejilla y cátodo. Consideremos una válvula amplificadora que tenga un factor de amplificación de 5 y una resistencia de placa de 2 000 ohm y que suministre potencia a un altavoz dinámico que, en primera aproximación, puede considerarse como resistencia pura R_L de 10 ohm. Si se conectara directamente en serie el altavoz de 10 ohm con el circuito de placa de la válvula y si el valor eficaz μE_s de la tensión alterna de señal fuera 100 V, la potencia suministrada al altavoz, sería

$$I^2 R_L = \left(\frac{\mu E_s}{r_p + R_L} \right)^2 R_L = \left(\frac{100}{2.010} \right)^2 \times 10 = 0,025 \text{ W} \quad (29)$$

Según se sabe, la potencia suministrada a una resistencia es máxima cuando ésta es igual a la resistencia interna del generador (se supone que no existen reactancias y que la fuerza electromotriz y resistencia del generador son constantes). Luego, si fuera despreciable la distorsión, la potencia máxima que se podría obtener de la válvula amplificadora cuya fuerza electromotriz es de 100 V y cuya resistencia interna es de 2 000 ohm se tendría para una resistencia de carga de 2 000 ohm y sería:

$$\left(\frac{100}{4\,000} \right)^2 \times 2\,000 = 1,25 \text{ W} \quad (30)$$

En los amplificadores reales, la distorsión obliga muchas veces a que la resistencia de carga sea doble o triple que la resistencia de placa de la válvula. En este ejemplo, si el altavoz estuviera conectado al circuito de placa de la válvula a través de un transformador ideal cuya razón N_1/N_2 fuera igual a $\sqrt{500}$, la ecuación (28) nos indica que la carga aparecería como una resistencia de 5 000 ohm, o sea 2,5 r_p , conectada al

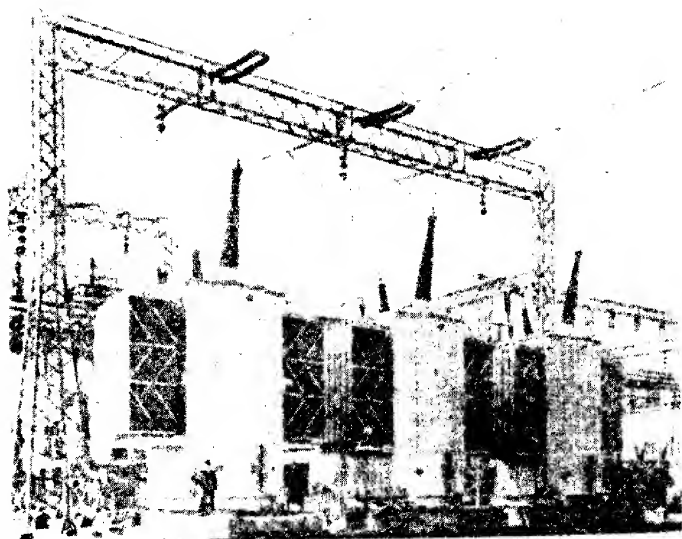
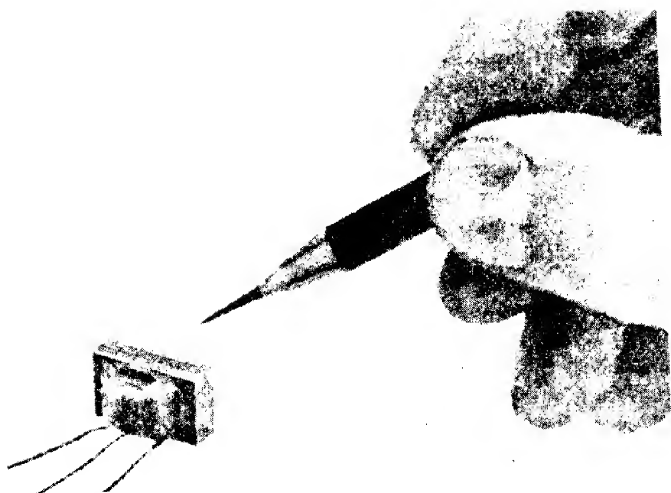


Fig. 3 y 4. Contrastes entre tamaños y aplicaciones de los transformadores. La minúscula unidad de la figura 3 es el conjunto núcleo-bobina de un autotransformador utilizado en el circuito de un audífono. Tiene una autoinducción incremental de 20 H. La figura 4 presenta un banco trifásico de autotransformadores de 275000 V, instalado en el extremo receptor de la línea de transmisión que va de Boulder Dam a Los Angeles. Cada unidad tiene ventiladores montados en la parte trasera para refrigerar el aceite cuando circule por los radiadores exteriores. Cada unidad, con los ventiladores en funcionamiento, tiene una potencia aparente de 65000 kVA.

circuito de placa de la válvula. La potencia entregada al altavoz para la misma intensidad de señal sería

$$\left(\frac{100}{7\,000}\right)^2 \times 5\,000 = 1,02 \text{ W} \quad (31)$$

o sea, unas 41 veces mayor que sin transformador. La pérdida en un transformador real es muy pequeña frente a la gran ganancia de potencia que se logra.

Los transformadores son, probablemente, los aparatos electromagnéticos más ampliamente utilizados. Varían muchísimo en tamaño y deben diseñarse para reunir los requisitos de una gran variedad de condiciones de funcionamiento. Por ejemplo, los empleados en circuitos de comunicación suelen funcionar con tensiones y frecuencias muy variables y deben introducir diferencias lo menores posibles entre las formas de onda de las tensiones y corrientes de los lados de primario y de secundario. Por otra parte, los transformadores de sistemas de potencia suelen funcionar con tensión y frecuencia nominalmente constantes y tiene más importancia un buen rendimiento que en los transformadores para comunicaciones, puesto que la potencia que interviene suele ser mucho mayor.

★ Los transformadores utilizados en circuitos de comunicaciones suelen clasificarse de acuerdo con el dominio de frecuencias en que deben utilizarse en: *transformadores*

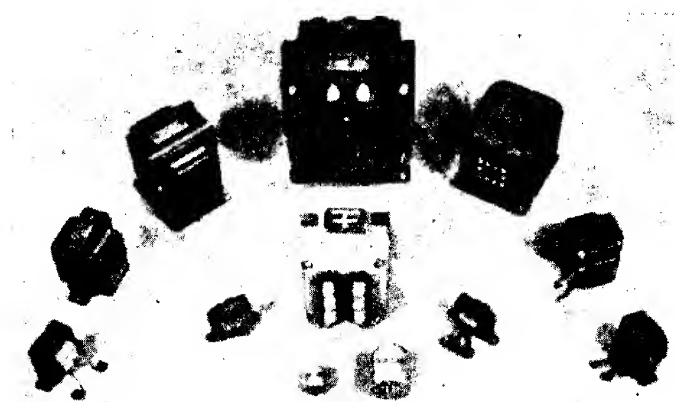


Fig. 5. Diversos transformadores para comunicaciones, de formas clásicas

de radiofrecuencia, frecuencias intermedias y audiofrecuencia. Dentro de estas clases de frecuencias, también se clasifican con arreglo a su misión en transformadores de entrada, de acoplo interetapa y de salida. Los *transformadores de entrada* suelen emplearse para conectar un micrófono u otro generador de señales a los terminales rejacadado de una válvula de vacío de tal manera que aplique a la reja una tensión lo más elevada posible compatible con las características razonables de respuesta a las frecuencias*. La potencia entregada suele ser de pocos microwatt. Los *transformadores de acoplo interetapa* se utilizan a veces en los amplificadores de válvulas

* Las características de respuesta a las frecuencias se estudian en el capítulo XVIII.

de vacío para conectar el circuito de placa de una válvula con el circuito de reja de la siguiente y deben realizar, por lo general, la misma función que los transformadores de entrada. Los transformadores de salida suelen tener fijado el dominio de frecuencias de funcionamiento y deben suministrar la máxima potencia sin distorsión a un cir-

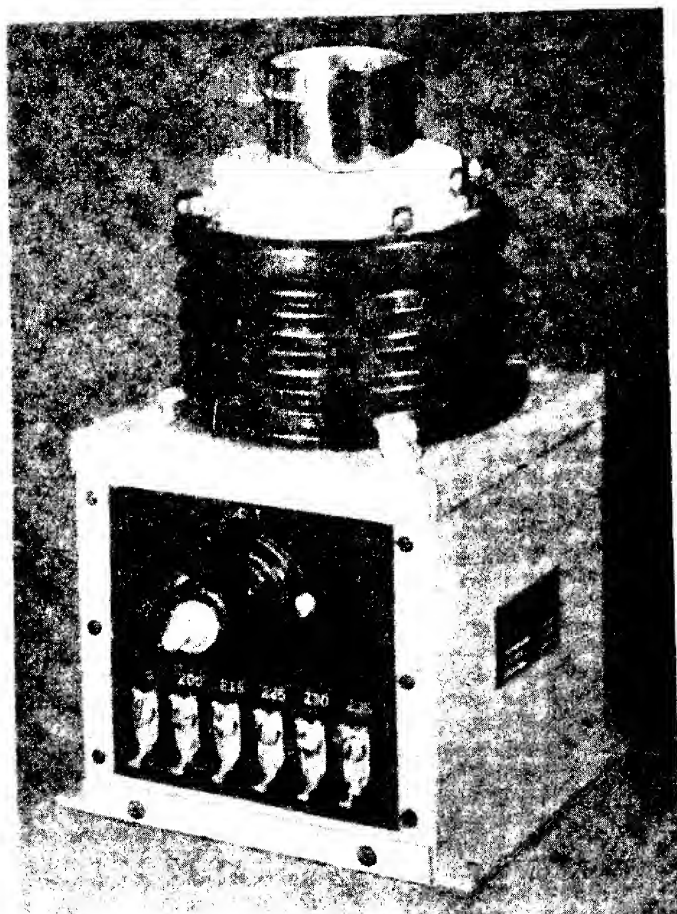


Fig. 6. Transformador para filamento de una válvula rectificadora para radio. La válvula se monta en el zócalo aislado soportado por el transformador. La altura total de la unidad es de 30 cm

cuito de utilización tal como un altavoz, una línea de transmisión o una antena emisora. La potencia suministrada puede variar desde una fracción de watt hasta varios centenares de kilowatt. Los transformadores moduladores sirven para superponer una señal de audiofrecuencia a una onda portadora de frecuencia elevada. En ciertas emisoras de radio, el transformador modulador pesa varias toneladas. Los transformadores para filamentos son de uso universal para suministrar potencia

a los filamentos de las válvulas de vacío en los sistemas de comunicaciones y mando. Se emplean transformadores en los circuitos «fantasma» telefónicos para permitir transportar simultáneamente tres señales de audiofrecuencia por dos pares de hilos, y en circuitos «simplex» para permitir el funcionamiento simultáneo de una señal telegráfica y una telefónica por un par de hilos; en estas aplicaciones, los transformadores reciben el nombre de *bobinas repetidoras*. Los transformadores separan la corriente alterna, o de «voz», de la continua en un circuito transmisor telefónico con batería local y transmiten a las líneas solamente la corriente de «voz»; en estas aplicaciones, los transformadores reciben el nombre de *bobinas de inducción**.

Los transformadores de los sistemas de potencia se clasifican en transformadores de potencia y transformadores de distribución según que se utilicen ordinariamente en las centrales y subcentrales generadoras de potencia o en las redes de distribu-

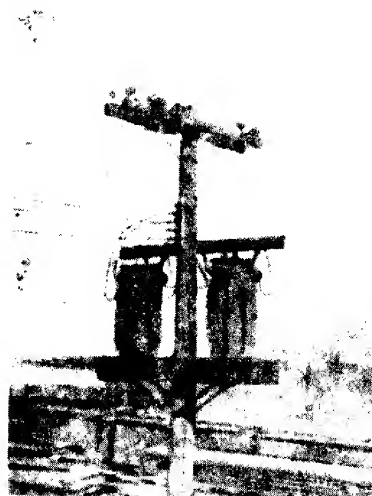


Fig. 7. Dos transformadores de distribución de $37 \frac{1}{2}$ kVA montados sobre una plataforma elevada. El banco se usa para transformar de un circuito de distribución trifásico de 4 hilos y 416 V a un circuito de distribución bifásico de 5 hilos y 120/240 V.



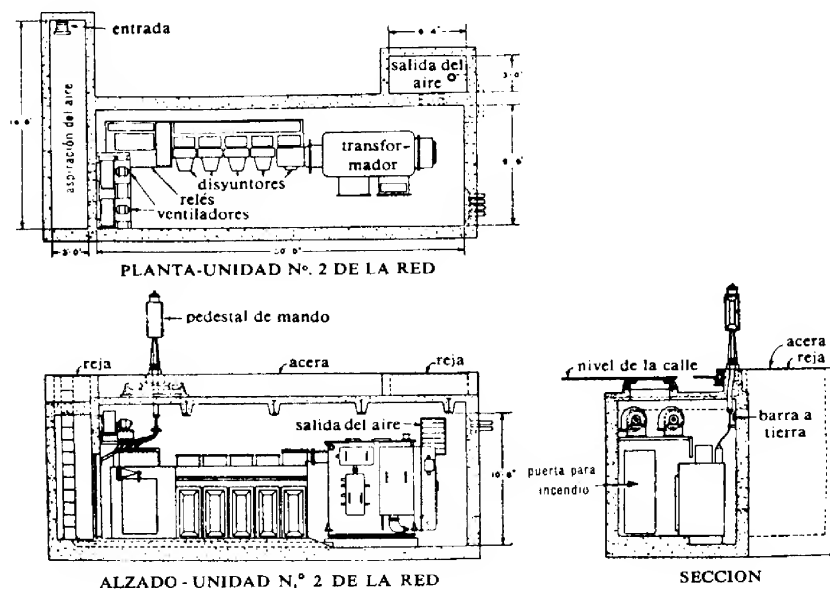
Fig. 8. Transformadores de distribución almacenados en una compañía suministradora de energía. Algunos son usados y otros nuevos.

ción. Los transformadores montados en lo alto de postes o subterráneos, que constituyen la última transformación de tensión entre el sistema de la central y el consumidor de la energía eléctrica reciben el nombre de *transformadores de distribución*. Constituyen un elemento importantísimo entre los transformadores fabricados. Los transformadores de distribución se fabrican de tensión y frecuencia normalizadas y de potencias aparentes que llegan hasta los 500 kVA **. Se fabrican

* En el capítulo XX, se realiza un estudio más extenso de las aplicaciones de los transformadores a circuitos telefónicos.

** En el apéndice A, se consignan los valores normalizados de los transformadores de distribución.

en serie y los menores suelen encontrarse siempre en el comercio. Los transformadores grandes cuyas potencias aparentes son superiores a los 500 kVA reciben el nombre de *transformadores de potencia*. Se han construido unidades monofásicas de potencia aparente en funcionamiento continuo de 65 000 kVA y de 80 000 kVA en funcionamiento de dos horas con ventiladores auxiliares; también existen bancos trifásicos conectados en estrella con tensiones entre fase y fase de 275 000 V. En la figura 4 puede verse uno de estos bancos trifásicos. Cada transformador pesa más de 180 toneladas*. También se han construido transformadores para dar más de un millón de volt, destinados a laboratorios de alta tensión.



En sistemas de potencia y para fines especiales se emplean otros muchos transformadores**. Por ejemplo, para suministrar una corriente de intensidad eficaz nominalmente constante a un sistema de alumbrado urbano de lámparas conectadas en serie se emplean transformadores de distribución de *intensidad constante*. Para regular la tensión de circuitos individuales o de partes de un sistema se emplean

* W. G. JAMES y F. J. VOGEL, «Power Transformers for 287,5 kV Service», *A. I. E. E. Trans.*, 55 (mayo, 1936), 438-444.

** En el capítulo XIX, se estudian algunas de estas aplicaciones especiales.

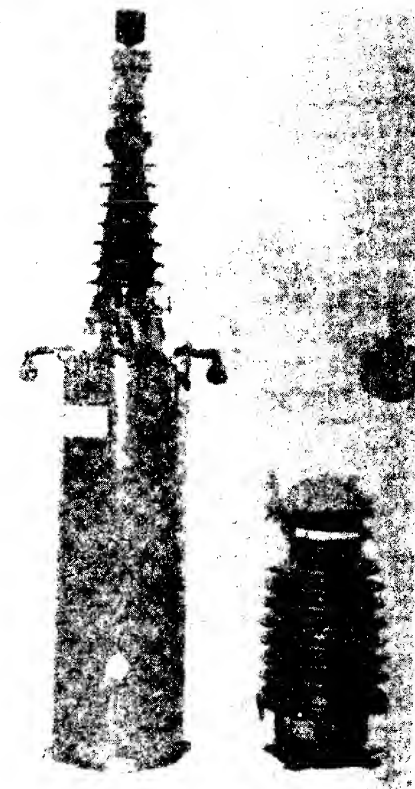
transformadores *reguladores de tensión*. En instrumentos de medida y relés de mando se utilizan *transformadores para instrumentos*, cuyas tensión e intensidad en el secundario son casi proporcionales a la tensión e intensidad del primario. Los transformadores para instrumentos se llaman *transformadores de potencial* o *transformadores de intensidad* según que su misión sea medir tensiones o intensidades.

Además de su utilización en sistemas de comunicación y potencia, los transformadores también se utilizan en muchas aplicaciones domésticas y especiales, tales como el accionamiento de timbres eléctricos, circuitos termostáticos, tubos luminosos y cercas eléctricas; para las bujías y bobinas de ignición y para otros muchos fines.

4. EVOLUCIÓN DE LOS TRANSFORMADORES

En el desarrollo y perfeccionamiento de los transformadores han influido varios factores. Las propiedades físicas de los materiales de que están contruidos —especialmente los aislantes y materiales magnéticos para núcleos— han mejorado en gran manera. La experiencia ha llevado a un empleo más eficaz de los materiales disponibles y a mejorar los métodos de conjuntamiento de los mismos. El empleo del aceite como aislante y como medio de refrigeración ha hecho posible la construcción de grandes transformadores de potencia de alta tensión. Para el cálculo de los detalles del diseño se han desarrollado métodos más exactos. Los fundamentos sobre los que se apoya gran parte de este progreso son los principios de los campos eléctrico y magnético y de la inducción electromagnética.

Los mismos principios se aplican al diminuto transformador del radioreceptor que al gigantesco de un sistema de potencia. No obstante, no debe concluirse que sea suficiente el conocimiento de estos principios para realizar el análisis de un transformador, ya que rara vez conviene, o es posible, aplicarlos exactamente. Los métodos matemáticos disponibles o son inadecuados o demasiado complicados para poder tratar las configuraciones reales de los campos eléctrico y magnético existentes en un transformador, por lo que ha sido necesario idear métodos de análisis aproximados que salven estas dificultades. La elección del método aproximado apropiado al análisis de un problema específico cualquiera, no sólo depende de un conocimiento completo de la teoría física, sino, también, de la experiencia.



5. PROBLEMAS DE LOS TRANSFORMADORES

Aun cuando muchos problemas referentes a las aplicaciones de los transformadores se puedan resolver satisfactoriamente considerando el transformador como un dispositivo perfecto, otros muchos problemas surgen a causa de la divergencia de las características respecto a las de un transformador ideal. La solución satisfactoria de tales problemas es importante en el diseño, y también porque estas características del transformador suelen afectar notablemente al comportamiento de la red eléctrica de la que forma parte el transformador. A continuación se estudiarán brevemente algunos de estos problemas y el resto de este libro se dedicará principalmente a la solución de algunos de ellos.

5a. Pérdidas. El rendimiento de un transformador está determinado por las pérdidas en el cobre de los devanados y por las pérdidas por histeresis y corrientes de Foucault en el núcleo. El costo de estas pérdidas es tema de gran importancia para la mayoría de los transformadores que suministren potencias de algunos watt. Como el aumento del rendimiento suele llevar consigo el encarecimiento del transformador, el diseño correspondiente a la mejor economía total depende principalmente del equilibrio adecuado entre el costo anual de las pérdidas y los costos anuales de capital del transformador. Aun cuando el costo de las pérdidas no suele tener importancia en muchos transformadores pequeños para comunicaciones, las pérdidas pueden tener importancia en otro sentido: por lo que afectan a la amplificación, distorsión y características de respuesta del circuito a las frecuencias. Luego, será importante para el diseñador poder predecir las pérdidas y para el técnico que utilice el transformador, comprender sus efectos y la manera en que varían con las condiciones de funcionamiento. En el análisis de problemas en que intervienen pérdidas de potencia, suele ser suficientemente preciso el despreciar las fugas magnéticas y la corriente de excitación.

5b. Refrigeración. Las pérdidas desarrollan calor en el interior de los devanados y del núcleo; la eficacia con que se disipa determina la elevación de temperatura a una carga dada y por tanto la duración del aislante *. El costo del transformador y su duración determinan las cargas anuales de depreciación. Como la reducción de la elevación de temperatura a una carga dada incrementa el costo del transformador, la carga de seguridad máxima o potencia aparente característica del transformador estará determinada principalmente por el balance entre la duración del transformador y su costo inicial que dé origen al costo anual de capital más bajo. Así, las pérdidas dan lugar a muchos problemas térmicos de importancia económica. Aun cuando en los transformadores pequeños los problemas térmicos suelen ser relativamente sencillos, se hacen extraordinariamente complicados en los grandes transformadores de potencia, puesto que, al aumentar el tamaño, las pérdidas crecen más de prisa que el área de la superficie que debe disiparlas en forma de calor. Es interesante observar que el diseño de un transformador grande, el incremento del rendimiento por encima del valor mínimo aceptable puede dar lugar, en realidad, a un costo más bajo, a causa de la disminución del costo de los medios de refrigeración.

5c. Fugas magnéticas. Si no hubieran fugas magnéticas, la razón de la ten-

* Véase el apartado I, del capítulo VIII.

sión entre terminales del primario a la del secundario diferiría de la razón de los números de espiras tan sólo en las caídas óhmicas, relativamente pequeñas, de los devanados indicados en las ecuaciones (9) y (10). No obstante, las fugas magnéticas contribuyen a la caída de tensión a través del transformador con una componente reactiva adicional y aumentan la diferencia entre la razón de las tensiones y la razón ideal. Como esta caída de tensión es inductiva, no sólo dependerá de la carga sino que crece con la frecuencia y la razón de tensiones de un transformador para comunicaciones será diferente a frecuencias elevadas que a bajas. La determinación de estas características de respuesta a las frecuencias es un problema extraordinariamente importante en los circuitos de comunicaciones.

Aun cuando la frecuencia de un sistema de potencia es sustancialmente constante, el consumo varía y por tanto variará la tensión de secundario de un transformador de un sistema de potencia aun cuando se mantenga constante la tensión del primario. Esta nociva regulación de tensión está determinada principalmente por las fugas magnéticas. Por otra parte, las fugas magnéticas tienen un efecto beneficioso al reducir las corrientes excesivamente intensas debidas a cortocircuitos accidentales en los sistemas de potencia. Estas corrientes de cortocircuito crean en los devanados grandes fuerzas electromagnéticas y por tanto afectan al diseño mecánico de los transformadores de los sistemas de potencia.

De esta manera, las fugas magnéticas introducen varios problemas importantes en los circuitos de comunicaciones y de potencia. En el análisis de estos problemas suele permitirse el despreciar la corriente de excitación y las pérdidas en el núcleo y también suele permitirse el despreciar las resistencias de los devanados.

5d. Corriente de excitación. La corriente de excitación da lugar a un cierto número de problemas estudiados en el capítulo VI y que aquí bastará mencionarlos brevemente. En los circuitos de comunicaciones la corriente de excitación origina una caída de tensión en la impedancia interna del generador al que está conectado el primario del transformador y así hace que la tensión entre los terminales del primario sea diferente de la fuerza electromotriz del generador. Este efecto es particularmente importante a frecuencias bajas, cuando la corriente de excitación puede ser relativamente intensa. Luego, el extremo de baja frecuencia de la característica de respuesta a las frecuencias está determinado principalmente por la corriente de excitación y además de este efecto —que existiría aun cuando fueran lineales las propiedades magnéticas del núcleo— la falta de linealidad del núcleo introduce armónicos en la forma de onda de la tensión. Así, pues, la corriente de excitación será importante en los problemas en que intervenga la respuesta a las frecuencias y la distorsión por armónicos en los circuitos de comunicaciones.

En los sistemas de potencia, la corriente de excitación suele hacer disminuir el factor de potencia y por tanto intensifica la corriente requerida para alimentar a una determinada carga de kilowatt, incrementa las pérdidas en el cobre en las líneas de transmisión y generadores, incrementa la potencia aparente necesaria de los generadores e incrementa la regulación de tensión. Además de estos efectos nocivos, los armónicos de las corrientes de excitación de los transformadores de un sistema de potencia puede originar una fuerte interferencia inductiva en los circuitos de comunicaciones adyacentes.

Por tanto, las corrientes de excitación de los transformadores tanto de potencia como para comunicaciones se mantienen tan débiles como sea compatible con un costo

razonable. En el análisis de problemas en los que interviene la corriente de excitación suele ser permisible despreciar las fugas magnéticas, y en los problemas de sistemas de potencia suelen despreciarse también las impedancias de los circuitos primarios.

5e. *Campo eléctrico.* Existen varias clases de problemas que afectan a la distribución del campo eléctrico en la proximidad de los devanados. Este campo hace que los devanados tengan capacidades propias y mutuas, y capacidades a tierra y a los circuitos adyacentes. En los circuitos de comunicaciones, los efectos de estas capacidades pueden ser importantes a frecuencias suficientemente elevadas y pueden hacer que el transformador se comporte de una manera totalmente diferente de la que sería previsible si se despreciaran las capacidades.

En los transformadores que deban funcionar a más de unos centenares de volt, es problema importante el diseño del aislante. El gradiente de potencial en el aislante en condiciones normales de funcionamiento afecta a la duración del aislante y por tanto es un factor importante en la determinación del valor de la tensión normal de funcionamiento. En condiciones anormales, los esfuerzos debidos a pulsos de tensión originados por descargas atmosféricas y otras causas pueden ser mucho mayores que durante el funcionamiento normal. Es particularmente importante que los transformadores de sistemas de potencia se diseñen para soportar estos esfuerzos anormales.

5f. *Problemas de fabricación.* Además de estos problemas pertenecientes a las características eléctricas, térmicas y mecánicas de los transformadores, el diseñador debe enfrentarse a un gran número de problemas de fabricación de tanta importancia, al menos, como los anteriores. La meta que se quiere alcanzar es el mejor compromiso entre la calidad del producto y su costo. Algunos de los principales factores que contribuyen a un costo reducido son la producción en cantidad por procesos mecanizados, normalización de las partes, desarrollo de diseños normalizados convenientes para una variedad de aplicaciones generales y la eliminación de materiales de desperdicio.

5g. *Otras consideraciones.* Otros factores a considerar por el diseñador y el técnico de la aplicación son el costo de la instalación, mantenimiento y reparaciones. El transporte puede tener un efecto importante sobre el diseño, especialmente en unidades grandes. Algunas veces hay que considerar ante todo el tamaño o peso, el ruido magnético, la apariencia y el peligro de incendio.

El estudio que sigue se dedica principalmente al análisis del comportamiento eléctrico del transformador, ya que éste es de importancia fundamental y determina el efecto del transformador sobre la red de la que forma parte. Sin embargo, para el diseñador son de importancia primordial los problemas térmicos, dieléctricos, mecánicos y de fabricación.

PROBLEMAS

1. En cada uno de los esquemas de la figura 11 puede verse la polaridad instantánea de la tensión del primario de un transformador (supuesto ideal) para un instante del ciclo. Indicar: (1) la polaridad de la tensión instantánea inducida en el secundario y (2) los sentidos de las corrientes instantáneas existentes en primario y secundario cuando se conecta cada secundario a una carga resistiva.

2. Con referencia a los esquemas de la figura 11; sea el sentido positivo de la tensión en terminales del primario la indicada. Utilizando los convenios establecidos en este

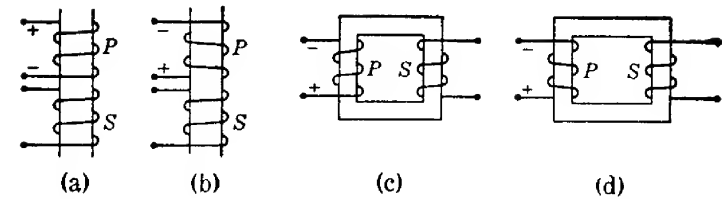


FIG. 11. Devanados de transformador con las polaridades indicadas, Problema 1

capítulo, indicar los sentidos positivos nominales para: (1) el flujo en el núcleo, (2) la tensión entre terminales del secundario, y (3) las corrientes i_1 e i_2 en primario y secundario.

3. Empleando los convenios de este capítulo para los sentidos positivos de tensiones e intensidades de las corrientes que circulan por un transformador, dibujar a escalas de 2 A por cm y de 20 V por cm un diagrama vectorial para un transformador ideal alimentado por una tensión sinusoidal en el primario de 240 V. La razón del número de espiras del primario al de las de secundario es 2 : 1, y la carga es una impedancia de $8,0 + j5,3$ ohm. Inclúyase en el diagrama vectores que representen los valores eficaces de las tensiones entre terminales de primario y secundario, fuerzas electromotrices inducidas en primario y secundario, intensidades de las corrientes de primario y secundario, y un vector que indique la fase del flujo en el núcleo. Indíquese en un esquema del transformador los sentidos positivos.

4. En el transformador ideal de la figura 12, en el instante en que la tensión instantánea del primario es igual a $+100$ V y está creciendo, ¿cuáles son los valores instantá-

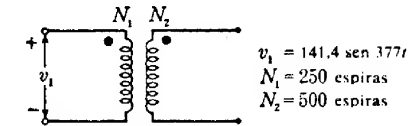


FIG. 12. Circuito del transformador del problema 4.

neos y los sentidos de las corrientes y el valor instantáneo y polaridad de la tensión de secundario:

- ¿Para una resistencia de carga de 100 ohm?
- ¿Para una carga inductiva de impedancia $50 + j86,6$ ohm?
- ¿Para una carga capacitiva de impedancia $0 - j100$ ohm?

5. En una subcentral eléctrica se conecta un transformador monofásico de 66 000 : 2 400 V a una línea corta a 2 400 V que alimenta una carga monofásica. El extremo receptor de la línea se conecta a la carga por medio de un transformador 2 400 : 480 V. La línea tiene una resistencia de 0,40 ohm y una reactancia de 0,60 ohm (ambos conductores). La carga puede considerarse equivalente a una impedancia de $0,30 + j0,34$ ohm. Supóngase que ambos transformadores pueden considerarse ideales.

- Determinar la impedancia total de la línea y la carga vistas desde el lado de alta tensión del transformador 66 000 : 2 400 V.
- En este sistema se desea un factor de potencia unidad en el lado de 66 000 V del circuito monofásico. Para lograrlo hay que conectar un condensador en paralelo con el segundo transformador en el lado de 2 400 V o en el de 480 V.

Hallar: (1) la capacidad necesaria si el condensador se conecta en el lado de los 2 400 V y (2) la capacidad necesaria si se conectara el condensador del lado de los 480 V.

- c) El costo de los condensadores para 480 V en dólares es igual a 1,16 por la potencia aparente en kVA. Los costos de los condensadores para 2400 V correspondientes a diferentes potencias aparentes son los siguientes:

kVA	Costo en dólares
270	690
360	780
540	960
720	1.140
1.080	1.500
1.260	1.680

Suponiendo que se puedan comprar condensadores de cualquier potencia aparente, hallar los costos de un condensador adecuado de 2400 V y de otro de 480 V.

6. Los técnicos de una compañía realizan un estudio para determinar si los transformadores de distribución utilizados para transportar un cierto tipo de carga deben ser de 7,5 kVA o de 10 kVA. La carga estudiada equivale a 9 kVA durante los tiempos de pico y está presente unas 900 horas por año. La carga durante el resto del año es despreciable. Como la carga de pico es corta, el transformador de 7,5 kVA es capaz de transportarla.

Las pérdidas en el transformador incluyen la pérdida en el núcleo, que es constante durante todo el año, y la pérdida en el cobre que en un transformador es proporcional al cuadrado de la carga en kVA. Los datos sobre las pérdidas son:

Pérdida en el núcleo

Transformador de 7,5 kVA: 52 W
Transformador de 10 kVA: 57 W

Pérdida en el cobre

Transformador de 7,5 kVA: 136 W a la carga característica
Transformador de 10 kVA: 188 W a la carga característica

El costo de las pérdidas es de 0,9 centavos/kWh.

El costo anual de impuestos, seguros y demás cargas es el 7 % del costo original del transformador. La depreciación puede cargarse en cantidades anuales iguales sobre la duración del transformador. La inversión en el transformador se hace menor cada año, por lo que hay que cargar el interés sobre la inversión restante —no sobre el costo original. El interés anual viene dado por

$$\text{Interés} = \frac{r}{2} \left[2C - \frac{(n-1)(C-S)}{n} \right] \text{ dólares,} \quad (32)$$

donde

C es el costo original del transformador, en dólares
 n es el número de años de duración prevista del transformador
 S es el valor de salvamento del transformador tras n años
 r es el tanto por ciento anual de interés sobre la inversión y puede considerarse igual al 4 %.

La vida prevista del transformador de 10 kVA es 22 años, mientras que la del trans-

transformador de 7,5 kVA es unos 6 años menos a causa de su temperatura de funcionamiento más elevada. Los costos originales son

Transformador de 10 kVA 112,00 \$
Transformador de 7,5 kVA 96,00 \$

y el valor de salvamento es de 60 centavos por kVA. El costo de mano de obra y materiales en general utilizados para instalar el transformador es de 20,00 \$ para cualquier tamaño. El costo de mantenimiento es como un incremento del costo inicial. Calcular los costos anuales totales aproximados de posesión y funcionamiento de cada transformador para estas cargas.

Características físicas de los transformadores

El servicio que debe realizar un transformador dicta las características físicas de su construcción. El principal servicio que se exige de los transformadores para comunicaciones suele ser su fidelidad en la reproducción de las señales dentro de un amplio dominio de frecuencias y tensiones. En tales transformadores, los materiales y proporciones del núcleo y la disposición de los devanados están regidas por la necesidad de obtener características eléctricas y magnéticas que den origen a una característica de respuesta a las frecuencias satisfactorias y una distorsión tolerable. En la mayoría de los transformadores para comunicaciones el calentamiento tiene una importancia secundaria. En cambio, son otras cuestiones totalmente diferentes las que influyen en el diseño de los transformadores para sistemas de potencia. Las características eléctricas que interesan entonces son gran rendimiento, baja regulación de tensión y gran rigidez dieléctrica. Con ellas, el calentamiento es un factor primordial para la determinación de sus características físicas.

1. NÚCLEOS

Los dos tipos fundamentales de estructura de transformador son el *tipo de núcleo*, en el cual dos grupos de devanados abrazan a un núcleo único, según se indica en

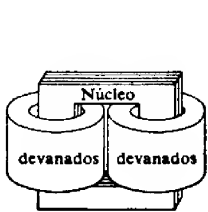


FIG. 1. Transformador tipo núcleo

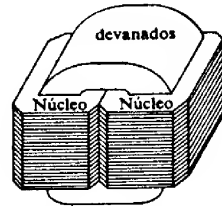


FIG. 2. Transformador tipo acorazado

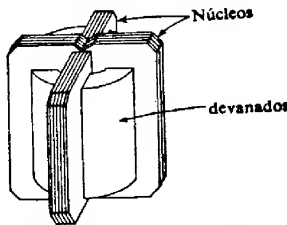


FIG. 3. Transformador tipo acorazado distribuido

la figura 1, y el *tipo acorazado*, en el cual el flujo que atraviesa a un único grupo de devanados está compuesto, al menos, por dos componentes existentes en circuitos magnéticos en paralelo, según se indica en la figura 2. Una modificación de este tipo es el llamado *tipo acorazado distribuido*, indicado en la figura 3, corrientemente

empleado en transformadores de distribución de determinadas potencias. El tipo de núcleo se utiliza corrientemente en transformadores grandes de distribución para alta tensión y en transformadores de potencia. La sección recta del núcleo suele ser cuadrada o rectangular en los transformadores pequeños, pero en los grandes se aprovecha más eficazmente la abertura circular de las bobinas agrupando las láminas en capas de anchura variable de manera que constituyan un núcleo circular escalonado, como indican las figuras 4 y 5.

Además de por la necesidad de obtener unas características eléctricas convenientes, la elección del tipo de construcción del núcleo se ve influida por un cierto número de consideraciones prácticas, tales como el costo de construcción y reparaciones, exigencias de espacio, refrigeración, aislamiento y robustez mecánica. Como frecuentemente el núcleo sirve de estructura, deberá ser robusto. Bajo carga normal, los esfuerzos mecánicos a que se halla sometido el transformador son poco mayores que los debidos a los pesos de sus distintas partes. En cambio, en condiciones de cortocircuito los esfuerzos electromagnéticos pueden hacerse enormes, ya que son proporcionales a los cuadrados de las intensidades de las corrientes que circulan por los devanados. Si se mantiene aplicada al primario de un transformador ordinario de un sistema de potencia la tensión de funcionamiento normal, estando cortocircuitado el secundario, las intensidades de las corrientes suelen ser de 10 a 25 veces mayores que las correspondientes a plena carga y los esfuerzos electromagnéticos de 100 a 625 veces mayores que los valores de plena carga. Las corrientes transitorias pueden ser aún mayores. Estas fuerzas han destruido bastantes transformadores. En los transformadores muy grandes, las fuerzas de cortocircuito que tienden a separar el primario del secundario pueden ser de hasta 700 000 kilos¹.

Los núcleos de transformadores para sistemas de potencia suelen construirse con láminas de acero recocido adecuadamente. En los tipos tradicionales indicados en las figuras 1, 2 y 3, se emplea generalmente acero al silicio que contiene un 4 % de silicio, puesto que este material proporciona un buen compromiso entre el costo, facilidad de manipulación, pérdidas pequeñas por histéresis y por corrientes de Foucault y gran permeabilidad a inducciones magnéticas relativamente elevadas. Los núcleos se suelen hacer funcionar a inducciones magnéticas alternas máximas comprendidas entre 1,0 y 1,4 tesla. En los transformadores pequeños, la capa de óxido que se forma entre las láminas puede constituir un aislante suficiente para evitar las corrientes de Foucault entre láminas, pero en los núcleos mayores las láminas se barnizan o revisten de una capa delgada de vidrio adhesivo al acero. Aun cuando aún pueden reducirse más las pérdidas por corrientes de Foucault empleando láminas más delgadas, el costo de las láminas y de la construcción del núcleo se elevan y se reduce el factor de apilamiento. En los transformadores normales de 60 Hz con láminas de la galga 29 (0,014 pulgadas), las pérdidas por corrientes de Foucault son solamente un quinto de la pérdida total en el núcleo. Poco se ganaría, pues, empleando láminas más delgadas para reducir esta componente relativamente pequeña de la pérdida total en el núcleo. Cuando se sujetan entre sí las láminas, los remaches o roblones de sujeción no deben constituir caminos para las corrientes de Foucault.

Las construcciones tradicionales de núcleos representadas en las figuras 1, 2 y 3

¹ K. K. PALUEV, Power Transformers with Concentric Windings, A. I. E. E. Trans., 55 (junio, 1936), 649-659.

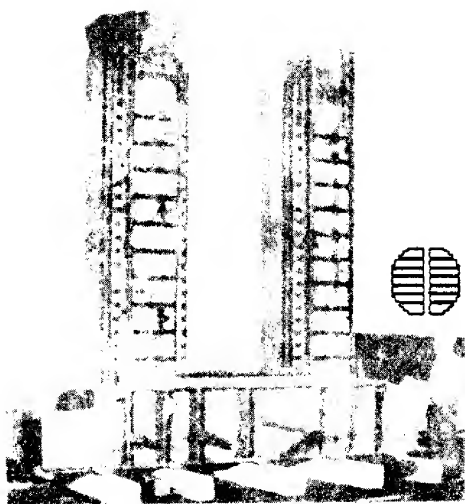


FIG. 4. Las dos ramas principales y el yugo inferior de un transformador de potencia del tipo de núcleo, de 55000 kVA. En el esquema adjunto de la sección recta del núcleo puede verse su construcción circular escalonada y los conductos de ventilación. Este núcleo forma parte de un transformador monofásico utilizado en uno de los bancos trifásicos del extremo emisor de la línea de transmisión que va de Boulder Dam a Los Angeles. Elevan la tensión del generador de 16320 V a 287500 V.

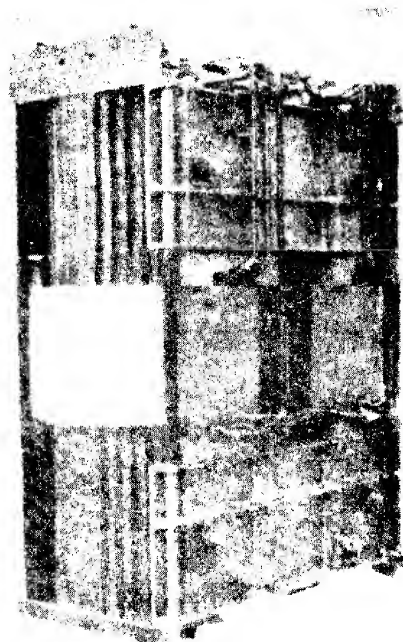


FIG. 5. Núcleo y bobinas de un transformador de acoplo de 180 kW empleado en la cuarta etapa del amplificador de audiofrecuencia de una emisora de radio. El devanado de entrada consta de dos partes separadas, entrelazadas simétricamente respecto al devanado único de salida, y alimentadas por las salidas de dos válvulas de vacío independientes. Cada devanado de entrada puede funcionar a 10200 V, de pico y el de salida a 6000 V, de pico. El conjunto de la figura pesa 12250 kg, de los cuales el acero de la chapa del circuito magnético pesa 11700 Kg.

tienen tres serios inconvenientes. Primero, en estas formas de núcleo deben haber dos o tres entrehierros independientemente de las formas de troquelado que se empleen. Segundo, para ensamblar o apilar las láminas se requiere un gran trabajo manual, ya que las láminas deben solaparse en cada junta. Tercero, existen siempre ciertos lugares del núcleo en donde el flujo tiene dirección perpendicular a la del laminado del metal, aumentándose así la pérdida en el núcleo y la corriente de excitación. A pesar de estas dificultades, estos tres diseños se emplean muchísimo para transformadores de potencia y de distribución de tamaños grandes.

Recientemente, ciertos perfeccionamientos en la técnica de fabricación han producido núcleo en los cuales el flujo magnético es casi paralelo a la dirección de la laminación del acero en todos los puntos del núcleo y en los cuales se reducen mucho los entrehierros y se ahorra trabajo de ensamblado. En la figura 6 puede seguirse la construcción de un tipo acorazado formando cada uno de los dos núcleos a partir de una sola cinta continua de acero soldada por puntos en sus extremos para mantener rígida la cinta. Tras el recocido, se devanan los núcleos a través de la abertura de bobinas preformadas por el ingenioso procedimiento indicado en la figura 7. En la figura 7 se ven tiras de acero que se curvan en una máquina y se solapan formando dos núcleos en forma de D que se recuecen después de haber sido curvados. El método para devanar las bobinas alrededor del núcleo es el indicado en la figura 7. En la figura 8 se devanan sobre una forma cintas de anchuras diferentes haciendo un núcleo continuo cruciforme que se recuece después. Las bobinas se devanan alrededor del núcleo, por medio del ingenioso dispositivo accionado por motor indicado en la figura 8.

Otro avance importante en el diseño y construcción de núcleos de transformador es el empleo de Hipersil, un acero al silicio que a las excitaciones corrientes presenta una permeabilidad superior en una tercera parte a la que suelen tener los aceros al silicio ordinarios³. El Hipersil debe emplearse de manera que el flujo sea paralelo a la dirección de laminación de la tira. Este requisito se logra en los transformadores de distribución pequeños devanando el núcleo con una tira continua sobre un mandril rectangular. Se recuece el núcleo sobre el mandril y luego se corta según indica la figura 9 para permitir la colocación de las bobinas en la abertura del núcleo y formar un transformador de tipo acorazado. Para las potencias más elevadas, se ensamblan tiras sueltas de Hipersil con las juntas cortadas a 45° y solapadas en capas alternas, tal como se indica en la figura 10. Con esta construcción, los caminos del flujo en los ángulos del núcleo tienen una dirección más próxima a la del laminado del acero que en el tipo convencional de junta solapada.

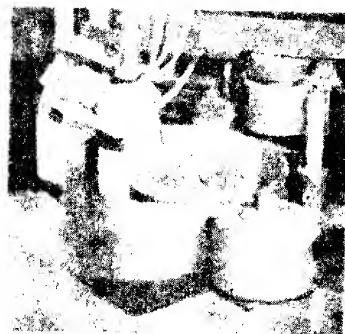
En los circuitos para comunicaciones, los transformadores de entrada suelen funcionar con una inducción magnética alterna relativamente débil, frecuentemente de sólo una fracción de gauss. Para estos transformadores convendrá un núcleo de un material que tenga gran permeabilidad a bajas intensidades de campo. En el primario puede existir una corriente continua relativamente intensa, que puede crear una componente continua de la inducción magnética de varios miles de gauss. En tal caso convendrá para el núcleo un material que tenga permeabilidad incre-

² E. D. TREANOR, «The Wound-Core Distribution Transformer», *A. I. E. E. Trans.*, 57 (noviembre, 1938), 622-625.

³ J. K. HODNETTE y C. C. HORSTMAN, «Hipersil, a New Magnetic Steel and Its Use in Transformers», *The Westinghouse Engineer*, 1 (agosto 1941), 52-56.



(a)



(b)



(c)



(d)



(e)



(f)

FIG. 6

mental relativamente grande a polarizaciones elevadas. Como la histéresis introduce distorsión, las pérdidas por histéresis han de ser bajas. Como las corrientes de Foucault producen un efecto de apantallamiento y por tanto reducen la permeabilidad eficaz en corriente alterna, las corrientes de Foucault deberán reducirse al mínimo, empleando láminas delgadas de un material para núcleos de gran resistividad. A veces, los núcleos de transformadores para comunicaciones se moldean con polvo prensado, según se describe en el apartado 6 del capítulo I. En la figura 20 del capítulo I pueden verse núcleos toroidales fabricados de esta manera. A menudo interesa tener una permeabilidad constante a lo largo del dominio de funcionamiento. Suelen emplearse diversos aceros al silicio y permalloys⁴. Como las propiedades magnéticas de algunas de estas aleaciones quedan perjudicadas por los esfuerzos mecánicos, deberá tenerse cuidado en la fabricación y en el diseño de la estructura de evitar los esfuerzos en las láminas.

Cuando se forman los núcleos con láminas planas troqueladas para transformadores de sistemas de potencia suelen colocarse las láminas con las juntas entre ellas solapadas en capas sucesivas, tal como se indica en la figura 22a del capítulo VI. Este sistema da un núcleo rígido y reduce la reluctancia introducida por las interrupciones de las láminas en cada ángulo. A veces las láminas de capas sucesivas no están interfoliadas, dando una junta franca que tiene un pequeño entrehierro y una mayor reluctancia que una junta solapada. Como la junta franca es más fácil de ensamblar que la solapada, se emplea frecuentemente en los núcleos para transformadores de audiofrecuencia en los que no es importante la robustez mecánica. En un transformador de audiofrecuencia por cuyo primario circule una corriente continua relativamente intensa, la introducción de un pequeño entrehierro en el núcleo reduce el flujo debido a la corriente continua y puede, por tanto, aumentar tanto la permeabilidad incremental en corriente alterna que la adición del entrehierro haga disminuir en realidad la reluctancia eficaz del núcleo a la componente alterna del flujo.

En un transformador del tipo acorazado construido con láminas troqueladas, el núcleo se forma alrededor de las bobinas preformadas, según se indica en la figura 11. Cuando hay que reemplazar una bobina del tipo acorazado averiada hay que sacar todo el núcleo. En un transformador tipo acorazado, el núcleo tiene forma

C. H. CRAWFORD y E. J. THOMAS, «Silicon Steel in Communication Equipment», *A. I. E. E. Trans.*, 54 (diciembre, 1935), 1348-1353.

A. G. GANZ y A. G. LAIRD, «Improvements in Communication Transformers», *A. I. E. E. Trans.*, 54 (diciembre, 1935), 1367-1373.

G. W. ELMEN, «Magnetic Alloys of Iron, Nickel and Cobalt», *A. I. E. E. Trans.*, 54 (diciembre, 1935), 1292-1299.

FIG. 6. Varias etapas de la construcción de un pequeño transformador Spirakore de núcleo devanado. Primeramente se arrolla el núcleo a partir de una tira continua de acero laminado en frío y se coloca entre dos rodillos accionados por motor, como en a), cerca de las bobinas ya devanadas. Se ensarta entonces la espira exterior del núcleo entre las bobinas y se abraza temporalmente a la espira siguiente, como se indica en b). En c), el acero ha sido desenrollado todo él de su rodillo, se fija al aislante de la bobina la espira interior, se saca el rodillo interior y se suelta la espira exterior para que se pueda dar rigidez al conjunto. Los rodillos accionados (arriba, a la derecha en cada figura), se apoyan contra el núcleo y tiran de él por rozamiento. Esta operación forma el conjunto rígido que se ve en d), que se mantiene firme gracias a una soldadura por puntos de la capa exterior a la adyacente. Una vez se ha colocado el segundo núcleo por el mismo procedimiento, el núcleo y las bobinas presentan el aspecto de e), mientras que el conjunto final de núcleo y bobina, con terminales y estructura, es el que se ve en f).

de U, como en la figura 4, y por sus ramas verticales se dejan deslizar las bobinas preformadas, añadiendo después el yugo superior. Cuando hay que sustituir una bobina averiada basta quitar el yugo superior.

2. DEVANADOS

Los devanados suelen consistir en bobinas devanadas sobre horma y cubiertas de cinta aislante, tratadas al vacío, impregnadas de barniz aislante y cocidas. En

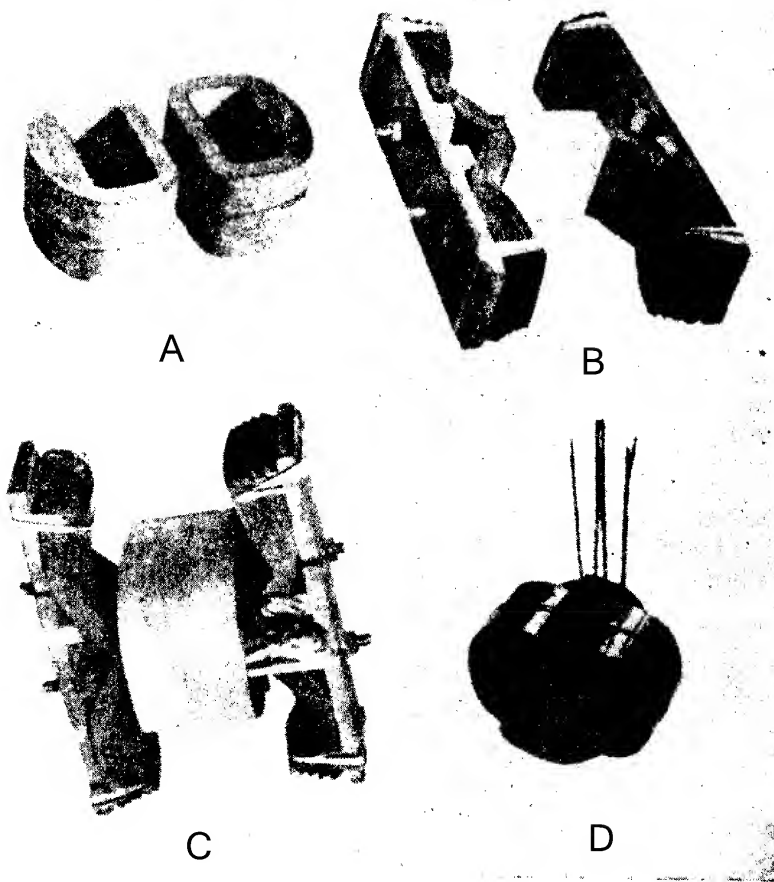


Fig. 7. Cuatro etapas del ensamble de núcleos y bobinas de un transformador de distribución de hierro curvado. Se forman primeramente las dos secciones del núcleo en una plegadora mecánica y se recuecen, quedando en la forma indicada en a). Se abren entonces las láminas y se fijan a una estructura b). A continuación se devanan las bobinas alrededor del núcleo haciendo girar la estructura, como en c). En d) puede verse el conjunto una vez sumergido en un compuesto aislante y cocido.

los transformadores pequeños para baja tensión se emplea hilo redondo, pero en los transformadores grandes los conductores suelen ser rectangulares. Si la sección recta de un conductor macizo es grande o la frecuencia es alta, la resistencia de un conductor a la corriente alterna puede ser apreciablemente mayor que su resistencia a la corriente continua. Para reducir la pérdida adicional debida a la distribución no uniforme de la corriente por el interior del conductor, los conductores grandes suelen subdividirse en hebras o cabos ligeramente aislados entre sí y traspuestos adecuadamente en el devanado según puede verse en la figura 13. Si se trasponen

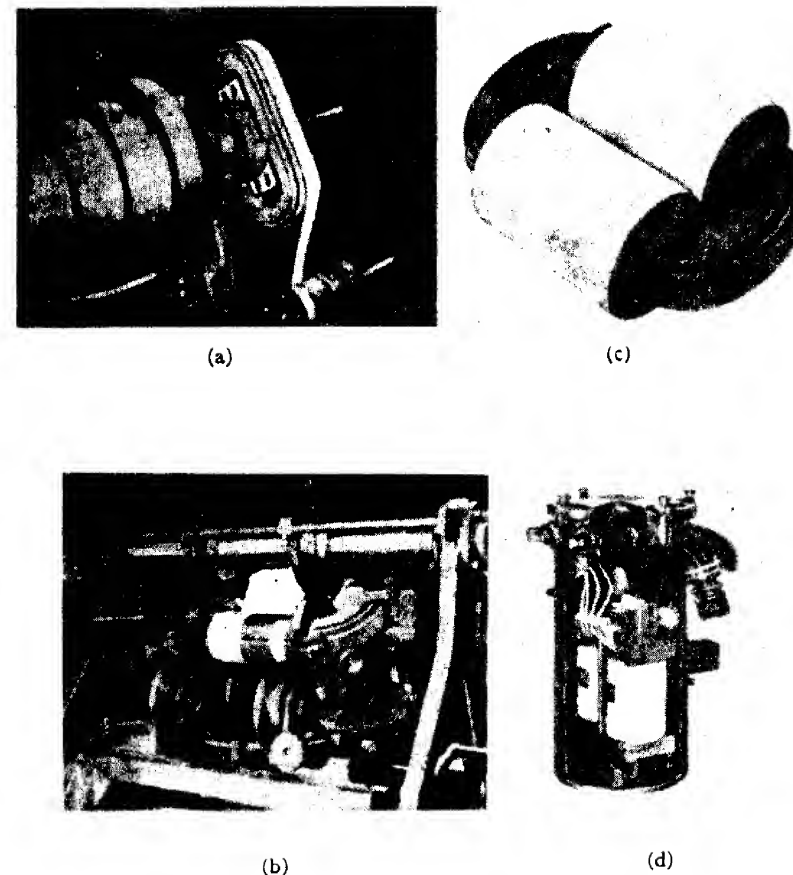


Fig. 8. Diversas etapas de la producción de un transformador de distribución de devanado redondo. El núcleo se construye con tiras continuas de acero arrolladas sobre una horma, según se indica en a), y luego se recuece. Para devanar las bobinas b) se coloca el núcleo en una máquina que hace girar la horma de la bobina entre un par de ruedas. Cuando la bobina se halla totalmente devanada, se quitan las ruedas. El conjunto final de núcleo y bobinas es el indicado en c). El corte d) del transformador completo muestra cómo se montan las distintas partes. El nivel del aceite es suficientemente elevado para que el núcleo y las bobinas queden totalmente sumergidos, pero no cubra los pasatapas de porcelana.

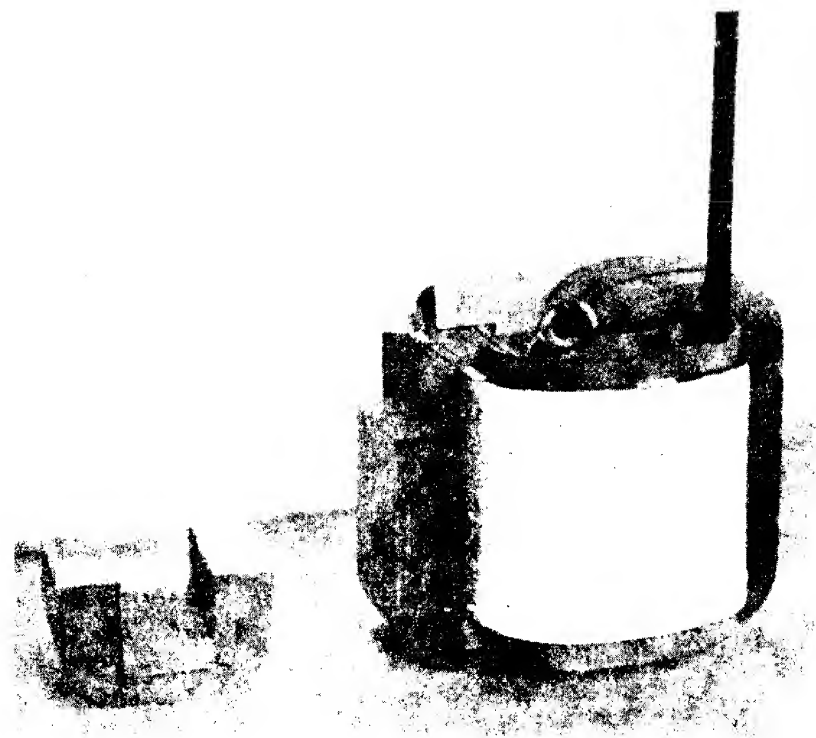


FIG. 9. Núcleo y bobinas de un transformador de distribución de núcleo devanado que utiliza Hipersil como material para el núcleo. Los núcleos se forman devanando una tira continua de acero sobre una horma, luego se sierran en dos partes para permitir la inserción de las bobinas, en la forma indicada por el núcleo de la izquierda.

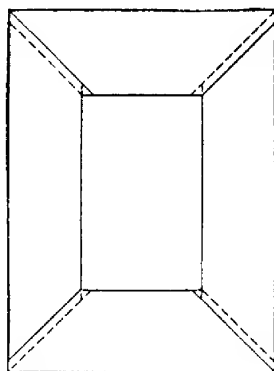


FIG. 10. Núcleo de láminas de Hipersil en donde se indican las juntas solapadas modificadas con los ángulos cortados diagonalmente para hacer que el flujo circule en la dirección del grano.

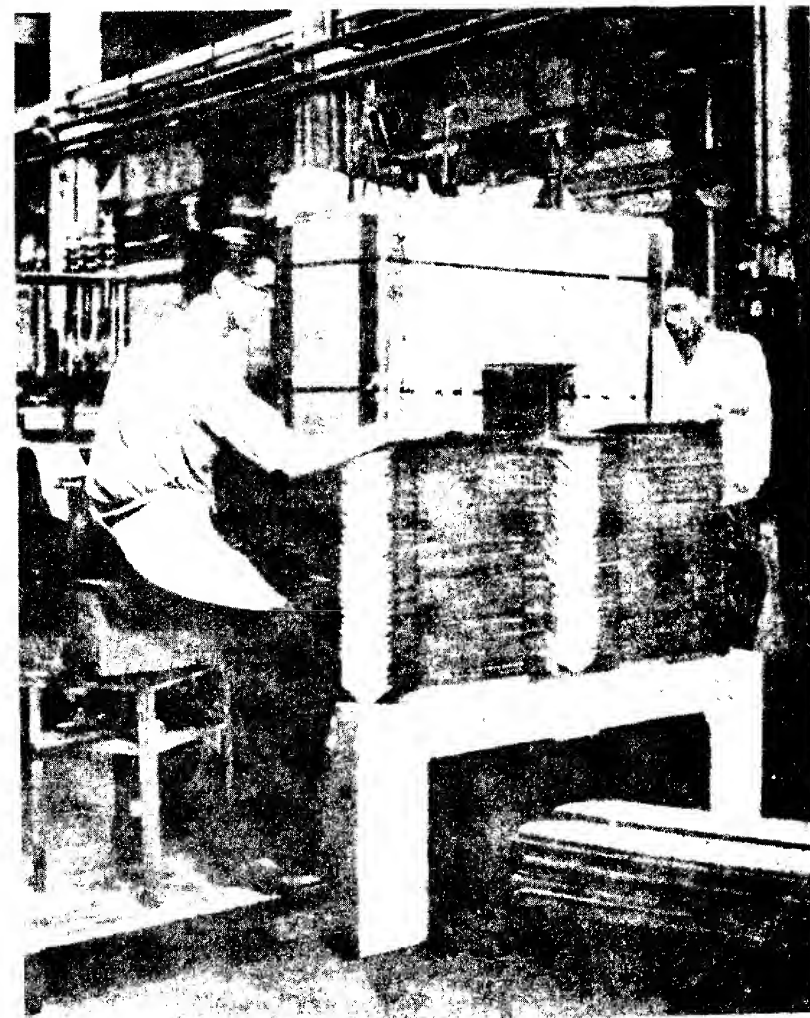


FIG. 11. Apilado de las láminas en un transformador del tipo acorazado.

cabos de igual tamaño de manera que cada uno abrace el mismo flujo total, la corriente total se divide por igual entre los cabos y se reducen a un mínimo las pérdidas en el cobre.

En el transformador del tipo de núcleo, primario y secundario se dividen cada uno en dos partes iguales, colocando una en una rama vertical del núcleo y otra en la otra rama vertical. El fin de esta subdivisión de los devanados es reducir la fuga magnética entre primario y secundario. Los devanados suelen ser coaxiales con el devanado de baja tensión situado inmediato al núcleo, estando separados del núcleo y del otro devanado mediante barreras aislantes. En los transformadores con núcleo escalonado de sección circular pueden emplearse bobinas de sección circu-

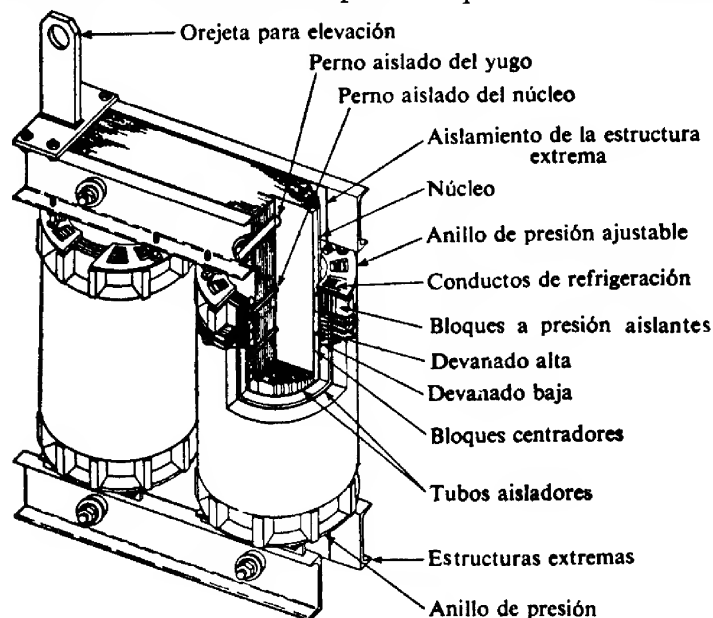


FIG. 12. Transformador de distribución del tipo de núcleo, refrigerado por aire con núcleo escalonado de sección circular y devanados de alta y baja tensión cilíndricos y coaxiales.

lar, las cuales son fáciles de aislar y tienen una gran resistencia mecánica. De este tipo son las bobinas de la figura 12. Cada una de las dos bobinas de baja tensión puede devanarse en forma de hélice continua, como se ve en la figura 13; pero, si la tensión por bobina supera unos miles de volt, suele subdividirse el devanado. En tal caso suelen emplearse bobinas en forma de disco circular. En la figura 14 puede verse una gran bobina de esta forma colocada en la máquina devanadora. Un devanado completo consiste en un cierto número de estas bobinas apiladas una sobre otra, tal como se indica en la figura 15. Los discos suelen llevar entre ellos separadores de madera que faciliten la refrigeración.

En el transformador del tipo acorazado distribuido las bobinas suelen ser coaxiales, con el devanado de alta tensión colocado emparedado entre las dos mitades del devanado de baja. Este tipo de devanado rara vez se emplea para tensiones

superiores a los 5 000 V. También puede emplearse esta disposición de los devanados en transformadores de baja tensión del tipo de núcleo. Esta disposición de los devanados da fugas magnéticas menores que la disposición coaxil simple, pero tiene un costo de fabricación más elevado.

En los transformadores pequeños del tipo acorazado para baja tensión puede emplearse indistintamente la disposición coaxil simple o la de devanados interpuestos. Estas disposiciones son corrientes en los transformadores de audiofrecuencia. En los transformadores grandes del tipo acorazado suelen emplearse bobinas delgadas como la indicada en la figura 16. Se disponen apiladas, alternándose bobinas de alta y de baja tensión y entre cada dos de ellas se coloca un separador que facilita la refrigeración y el aislamiento. A fin de aprovechar eficazmente la abertura del núcleo en el transformador de núcleo devanado de la figura 6, se hace más ancho el devanado de alta tensión que el de baja y se coloca en medio de la abertura. Los devanados completos tienen entonces una sección recta cruciforme.

3. REFRIGERACIÓN Y AISLAMIENTO *

En los transformadores muy pequeños, la superficie es relativamente grande frente al volumen. La refrigeración por radiación y por convección natural suele ser suficiente para mantener la temperatura de funcionamiento por debajo del máximo que puede soportar el aislante sin reducir seriamente su duración. Sin embargo, al aumentar el tamaño de un objeto, el volumen crece como el cubo de sus dimensiones lineales mientras que el área de su superficie lo hace como el cuadrado. Así, para una pérdida dada por unidad de volumen de las partes en funcionamiento, el calor que hay que disipar por unidad de superficie crece proporcionalmente a las dimensiones lineales. Luego, al ir aumentando el tamaño, o hay que aumentar el área de la superficie o hay que proveer medios artificiales para acelerar la disipación del calor. A menudo se combinan estos dos medios para facilitar la refrigeración. Además, al aumentar las dimensiones lineales, aumentan las distancias de las partes interiores a la superficie, por lo que hay que dotar de conductos de ventilación a los devanados y al núcleo.

3a. Refrigeración por aire. En ciertas instalaciones hay que reducir al mínimo el peligro de incendio a causa del transformador, por lo que no resultan convenientes los transformadores refrigerados por aceite. Ejemplos de este caso son los transformadores instalados en el interior de edificios para transformar la tensión de circuitos de 600 V, 480 V y 240 V en 120 V para alumbrado. A este fin se adaptan bien los transformadores refrigerados por aire, a través de los cuales circula el aire por convección. Las dimensiones de un transformador refrigerado por convección del aire son algo mayores que las de un transformador de igual potencia refrigerado por aceite.

3b. Refrigeración por corriente de aire. Cuando la tensión es inferior a 4 000 V y convenga reducir todo lo posible el peso y el espacio requerido, puede refrigerarse el transformador mediante un ventilador. Una aplicación común de este tipo de refrigeración se encuentra en los transformadores empleados en las locomotoras movidas por corriente alterna y en los ferrocarriles de varias unidades.

* Los efectos de la temperatura sobre los materiales aislantes se estudian en el apartado 1 del capítulo VIII, mientras que en el apartado 5 del mismo capítulo se realiza un breve estudio de la refrigeración de aparatos eléctricos.

Fig. 13. Devanado helicoidal en construcción. Esta es una bobina de baja tensión devanada parcialmente, destinada a un transformador de potencia trifásica de 3 000 kVA, 60 Hz, 4 600 : 460 V de inmersión en aceite.

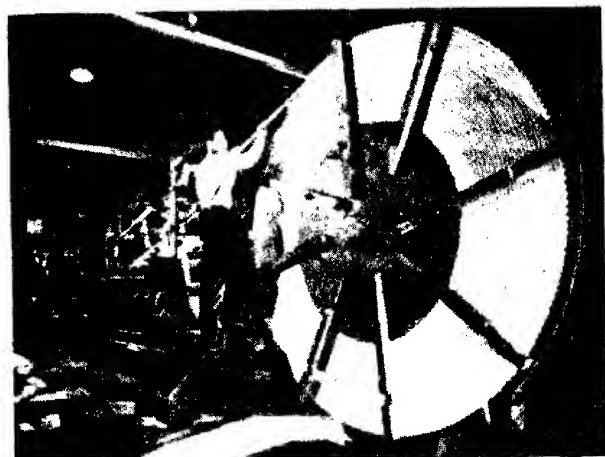
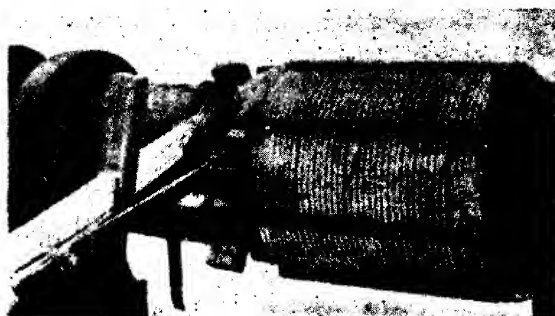


Fig. 14. Devanando una bobina tipo disco para el arrollamiento de 230 000 V, de un transformador monofásico de 40 000 kVA.

Fig. 16. Bobina plana empleada en transformadores del tipo acorazado para alta tensión. Se ha cortado parcialmente la barrera aislante para mostrar la bobina.

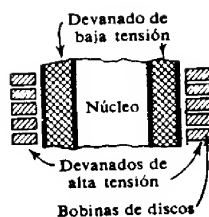


Fig. 15. Sección de un par de devanados coaxiales compuesto el devanado de alta tensión de discos circulares.

3c. *Aceite para transformadores.* Uno de los medios más satisfactorios de refrigeración consiste en sumergir en aceite las partes del transformador que funcionan, lo cual sirve para el doble propósito de facilitar la extracción del calor del núcleo y devanados y al propio tiempo proporcionar unas propiedades aislantes apreciablemente buenas. El aceite deberá tener gran rigidez dieléctrica, poca viscosidad, punto de congelación bajo y punto de ignición elevado, debiendo estar exento de ácidos corrosivos, álcalis y azufre. El aceite no debe oxidarse ni formar barros. Desgraciadamente, la presencia de pequeñas cantidades de humedad o de partículas en suspensión afecta seriamente a la rigidez dieléctrica del aceite, por lo que los transformadores grandes se proveen de medios especiales para evitar la penetración de humedad.

3d. *Inmersión en aceite, autorrefrigeración.* La mayoría de los transformadores de distribución y muchos transformadores de potencia son de este tipo. En los de tamaño pequeño, un tanque liso proporciona una superficie suficiente para enfriar el aceite. En los de tamaño mediano, las paredes exteriores del tanque están provistas de aletas, pliegues o tubos verticales por los que circula el aceite hacia abajo al ir enfriándose. En los de mayores tamaños se distribuyen grandes radiadores sobre toda la superficie disponible.

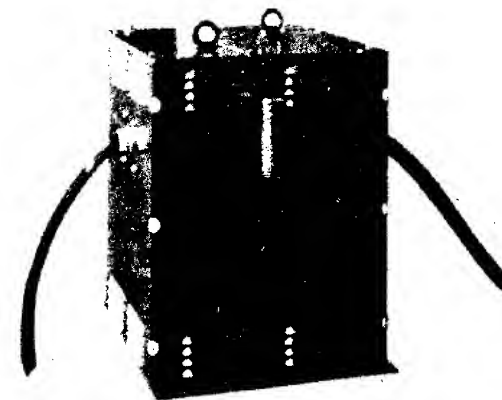


Fig. 17. Transformador refrigerado por aire para su uso en el interior de edificios a fin de proporcionar energía eléctrica para alumbrado a partir de un sistema de tensión más elevada. Este transformador es monofásico de 50 kVA, 240/480 V, en primario a 120/240 V en secundario.

3e. *Inmersión en aceite, refrigeración por aire forzado.* Para mandar aire fresco a los radiadores pueden instalarse inyectores de aire o un cierto número de pequeños ventiladores regulados por termostato. Los transformadores de este tipo tienen dos potencias características: la menor corresponde a la autorrefrigeración por convección natural y la mayor a la refrigeración por aire forzado.

3f. *Inmersión en aceite, refrigeración por agua.* Cuando se dispone de un manantial adecuado de agua refrigerante y deba conservarse el espacio, puede refrigerarse el aceite caliente mediante agua que circule por un serpentín de tubería de cobre que rodee al tanque por su parte interior.

3g. *Refrigeración por aceite forzado.* El aceite caliente del transformador puede hacerse circular mediante bombas por un refrigerador exterior, el cual suele estar refrigerado por agua. Este método de refrigeración es corriente en Europa.

El aceite para transformadores es muy volátil y si se vaporiza hay riesgos de explosión peligrosa. Aun cuando no explotara, el aceite puede quemarse produciendo una llama intensa y calor. Por ello, los transformadores refrigerados por aceite

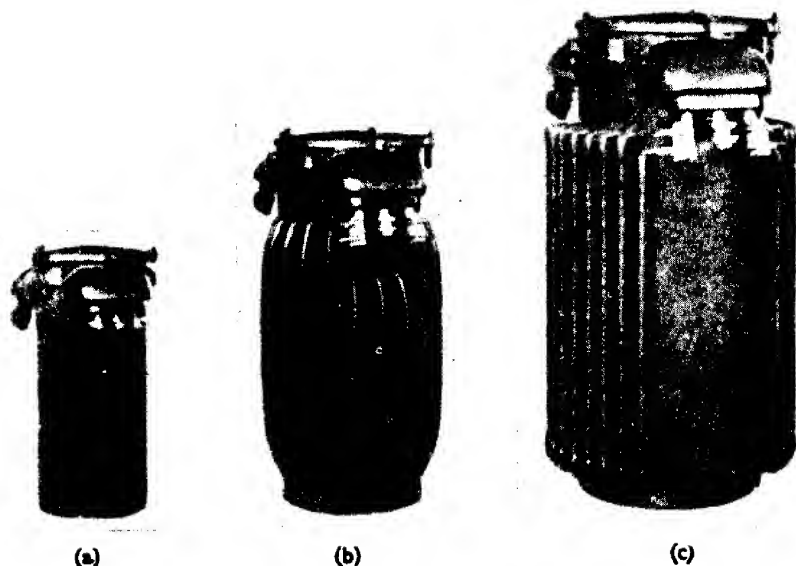


FIG. 18. Tres transformadores de distribución monofásicos 2400:120/240 V, 60 Hz, en los que puede verse el efecto de la potencia característica sobre las medidas adoptadas para disipar el calor. El transformador *a*) es de 15 kVA y su tanque es liso, el transformador *b*) es de 75 kVA y su tanque es rugoso, mientras que *c*) tiene una capacidad de 100 kVA y está refrigerado por tubos exteriores soldados al tanque principal. Las figuras tienen aproximadamente la misma escala. La altura total de base a parte superior del transformador *c*) es de 180 cm.



FIG. 19. Transformador trifásico de 1500 kVA, 13200:4330 V, equipado con ventiladores auxiliares para enfriar el aceite. Cuando funcionan los ventiladores, la potencia aparente del transformador asciende a 2000 kVA.

deben funcionar en el exterior, y si estuvieran en un interior, deberán hallarse instalados en recintos especiales a prueba de incendio que cumplan las exigencias de los aseguradores. Este inconveniente del aceite del transformador se elimina empleando compuestos líquidos especiales incombustibles.

3h. *Pyranol, Inerteen o Chlorextol*. Se ha mencionado la refrigeración por aire para los transformadores que deban hallarse en el interior de edificios. Sin embargo, las limitaciones de la refrigeración por aire son importantes cuando la tensión es elevada, con lo que pueden ser nocivos los depósitos de polvo sobre los devanados, o cuando se disponga de poco espacio. Para sustituir al aceite, se han desarrollado compuestos químicos que llevan los nombres comerciales de Pyranol, Inerteen, o Chlorextol. Estos compuestos no son volátiles, ni combustibles, ni explosivos, y son lo suficientemente fluidos para circular libremente en torno a los devanados. Tienen gran rigidez dieléctrica y así, al igual que el aceite para transformadores, sirve tanto para aislar como para refrigerar los devanados.

4. TANQUES

Los transformadores que empleen la refrigeración por líquido deben tener sus núcleos y devanados necesariamente encerrados en tanques que eviten las pérdidas del refrigerante, los cuales están contruidos de acero soldado y pueden tener forma redonda, ovalada, elíptica o rectangular. Deben tener un huelgo para permitir la dilatación y contracción térmicas del aceite. En los transformadores de distribución, es corriente utilizar un tanque estanco al aire con una cámara de aire suficiente

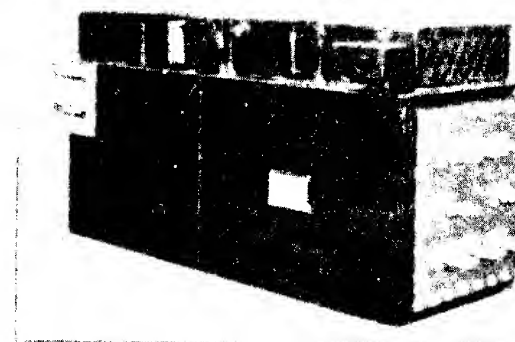


FIG. 20. Transformador monofásico de 600 kVA, 25 Hz, 11000:480 V, de un vagón de ferrocarril eléctrico de varias unidades. Para aislamiento y disipación del calor se emplea Pyranol refrigerado por una ventilación forzada de aire. El pasatapas de alta tensión aparece a la izquierda y los terminales de baja tensión a la derecha.

entre la tapa y el aceite para permitir que éste comprima o dilate el aire encerrado. En algunos transformadores grandes, la cámara sobre el aceite se llena de nitrógeno mantenido a una presión ligeramente superior a la atmosférica por medio de una válvula automática accionada por la presión, que admite nitrógeno seco de un cilindro que lo contiene comprimido. También hay una válvula de seguridad.

A los transformadores grandes se les permite más corrientemente «respirar». Un método corriente para ello consiste en montar sobre el tanque un tambor horizontal llamado «conservador del aceite» que se conecta al tanque mediante un tubo en U, como puede verse en la figura 27. El aceite llena el tanque por completo y parcialmente el tambor de expansión. En la parte superior de éste existe una abertura de respiración a la atmósfera. Este respiradero puede ir equipado de un filtro químico que elimine la humedad y el oxígeno del aire que penetre en el conservador. Este está equipado de un sumidero para la extracción ocasional de barro y humedad. En caso de cortocircuito dentro del transformador podrán formarse burbujas rápidamente; luego, la tapa deberá ir provista de una tubería proyectora cerrada por un diafragma delgado de seguridad que se rompa ante una presión excesiva y evite así la explosión del tanque. El peligro de explosión resultante de burbujas gaseosas calientes se elimina excluyendo el oxígeno de la parte superior del tanque.

5. PASATAPAS

Cuando las tensiones son moderadas, se extraen los conductores terminales por la parte superior del transformador a través de pasatapas de porcelana o de juntas en contacto con la funda de plomo de los cables subterráneos. Para tensiones elevadas existen dos tipos comunes de pasatapas, el tipo lleno de aceite y el tipo condensador, cuyo aspecto exterior es parecido, pero que difieren en su principio de funcionamiento.

El pasatapas lleno de aceite consiste en una varilla conductora rodeada de un

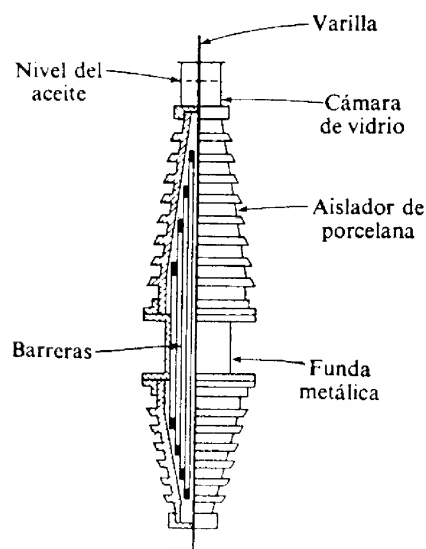


FIG. 21. Partes principales de un pasatapas lleno de aceite.

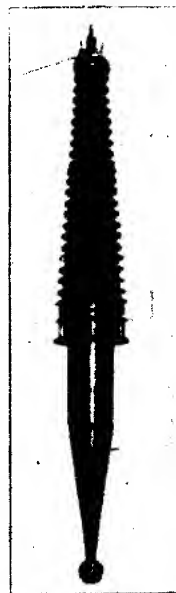


FIG. 22. Pasatapas condensador para 288 000 V.

cierto número de cilindros delgados coaxiales de material aislante separados por separadores de madera dura tratada. La varilla y los cilindros aislantes están soportados en el interior de dos conos huecos de porcelana, como se indica en la figura 21. Los espacios libres del pasatapas se llenan de aceite aislante. El exterior de los aisladores lleva campanas a fin de incrementar la distancia desarrollada entre los terminales y el tanque puesto a tierra. El cono inferior penetra bajo el nivel del aceite y requiere menor distancia desarrollada que el cono superior, que está expuesto a la intemperie. El pasatapas está proporcionado de manera que, a lo largo de su superficie, el gradiente de potencial sea casi uniforme.

El pasatapas condensador de la figura 22 está constituido por capas alternadas de aislante y hojas de metal arrolladas alrededor de una varilla conductora central. La parte superior de este conjunto interno se monta en el interior de un cono hueco de porcelana, como en el pasatapas lleno de aceite. El extremo inferior penetra en el aceite del transformador. La misión de la hoja metálica es producir en el interior del aislante un gradiente de potencial casi uniforme. Si se suprimiera la hoja metálica, el gradiente de potencial entre la varilla y la funda variaría aproximadamente en razón inversa a la distancia radial al eje de la varilla, y, por tanto, el gradiente en el aislante inmediato a la varilla sería mucho mayor que cerca de la funda, a menos que fuera muy grande el diámetro de la varilla. La hoja metálica descompone al aislante en un cierto número de condensadores en serie. Las tensiones en los condensadores en serie son inversamente proporcionales a sus capacidades. Si las capas de aislante son todas de igual espesor, las capacidades de los condensadores son proporcionales al área de sus superficies. Si las capacidades son iguales, las tensiones entre las capas de aislante son iguales. Luego si las longitudes axiales de las capas varían inversamente con sus diámetros, el esfuerzo máximo sobre el aislante en las fibras interiores de cada capa es aproximadamente el mismo y el material se utiliza eficazmente y con seguridad.

6. DISPOSITIVOS DE PROTECCIÓN

Los transformadores utilizados en sistemas de potencia o en aplicaciones industriales precisan ser instalados de manera que se hallen protegidos contra tensiones excesivamente elevadas y contra sobrecargas peligrosas; deben disponerse de manera que sea fácil su mantenimiento y la instalación no debe constituir un serio peligro de incendio o de accidente. Existen dos causas que pueden producir tensiones excesivas entre los terminales. La primera, el rayo, produce ondas progresivas de frente de onda muy pronunciado que se propagan en ambos sentidos desde el punto de incidencia en las líneas de hilos y se reflejan en los extremos y en los empalmes, originando una serie de picos de tensión agudos. Cuando alcanza los terminales de un transformador una de estas ondas de alta tensión, puede atravesar el aislante entre espiras, o entre espiras y tanque. La manera inmediata de reducir al mínimo el efecto de estas ondas es conectar un dispositivo entre la línea de potencia y tierra, el cual proporciona un camino para corriente intensa alrededor del transformador y así disipa la energía de la onda sin efectos nocivos. Los dispositivos utilizados para este fin reciben el nombre de *pararrayos*. Se fabrican de una gran variedad de formas y materiales, pero todos presentan la propiedad de resistencia no lineal. El elemento

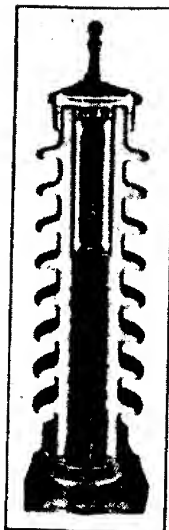


FIG. 23. Pararrayos de 37 000 V, visto en sección para mostrar su estructura interna. La parte inferior de la unidad consiste en bloques cerámicos porosos, cuya característica intensidad-tensión no es lineal. Aun cuando a tensión normal circula una corriente despreciable, los bloques conducen 1 500 A a una tensión 2,1 veces mayor que la normal. La parte superior del pararrayos consiste en una serie de espacios de aire.

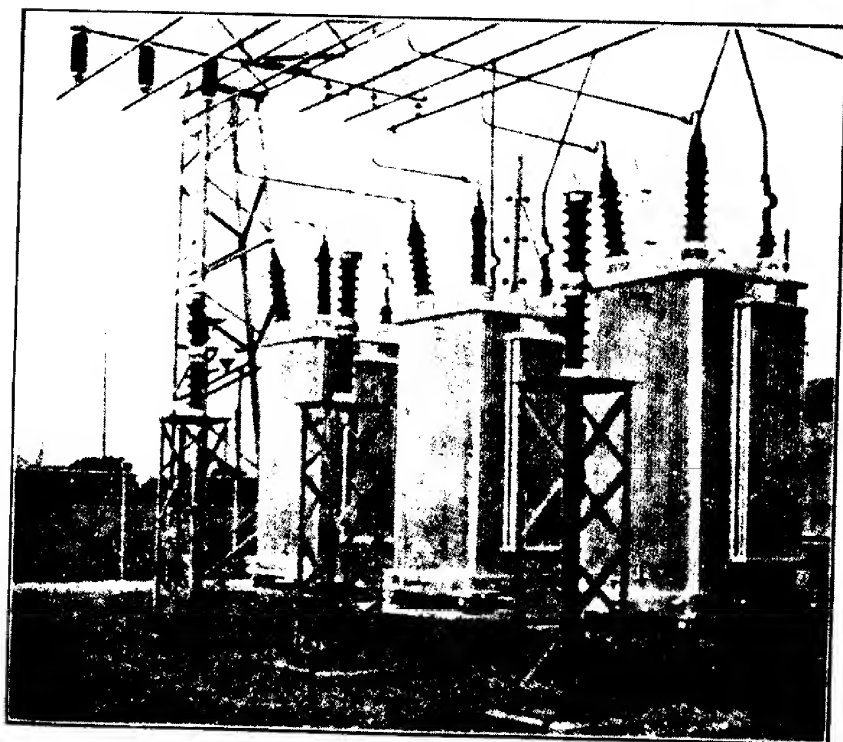


FIG. 24. Tres pararrayos de 50 kV, protegiendo un banco trifásico de transformadores monofásicos en una subcentral exterior.

activo es una sustancia química, en forma de polvo, píldoras o bloque prensado, cuya resistencia eléctrica se hace menor al elevarse el gradiente de potencial en el elemento. En la mayoría de los pararrayos se colocan en serie con el elemento de resistencia no lineal varios espacios de aire. A través de éstos salta la chispa al llegar el frente de onda de alta tensión y así presentan una resistencia despreciable en serie con los elementos principales. En cambio, cuando ya casi ha pasado el frente de onda, el arco que salta en los espacios de aire desaparece cuando se anula la corriente y de entonces en adelante no circula corriente de conducción alguna a través del pararrayos a menos que llegue otro frente de onda brusco.

La segunda causa de tensión peligrosamente alta es una descarga que se produzca a causa de un fallo en el sistema de potencia o de un error en la conmutación. La solución en este caso también es el empleo de pararrayos. Hay que tener cuidado en asegurarse que el pararrayos que se elija para una aplicación cualquiera soporte



FIG. 25. Fusible de 34 500 V, 30 A, antes y después de fundirse. Este fusible está lleno de un líquido para extinguir el arco y tiene una capacidad de interrupción de 6 400 A.

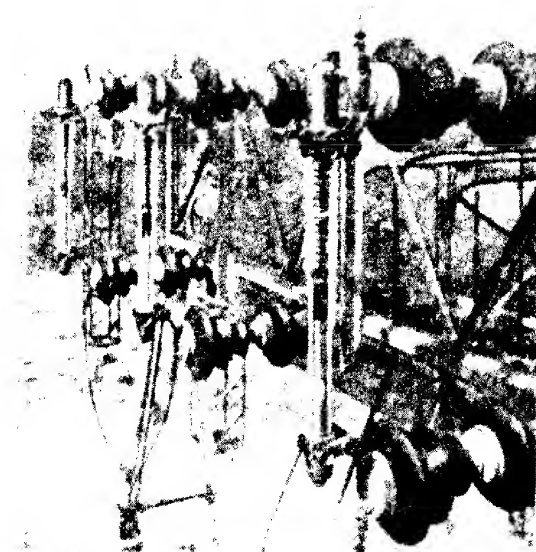


FIG. 26. Tres fusibles que contienen un material extinguidor del arco sólido, instalados en un circuito de 66 000 V. Estos fusibles pueden interrumpir 7 000 A a 66 000 V.

bien la tensión a él aplicada continuamente de la línea de potencia durante un fallo a tierra de otra fase. Esta tensión es, para muchos sistemas trifásicos, mucho mayor que la tensión normal aplicada al pararrayos.

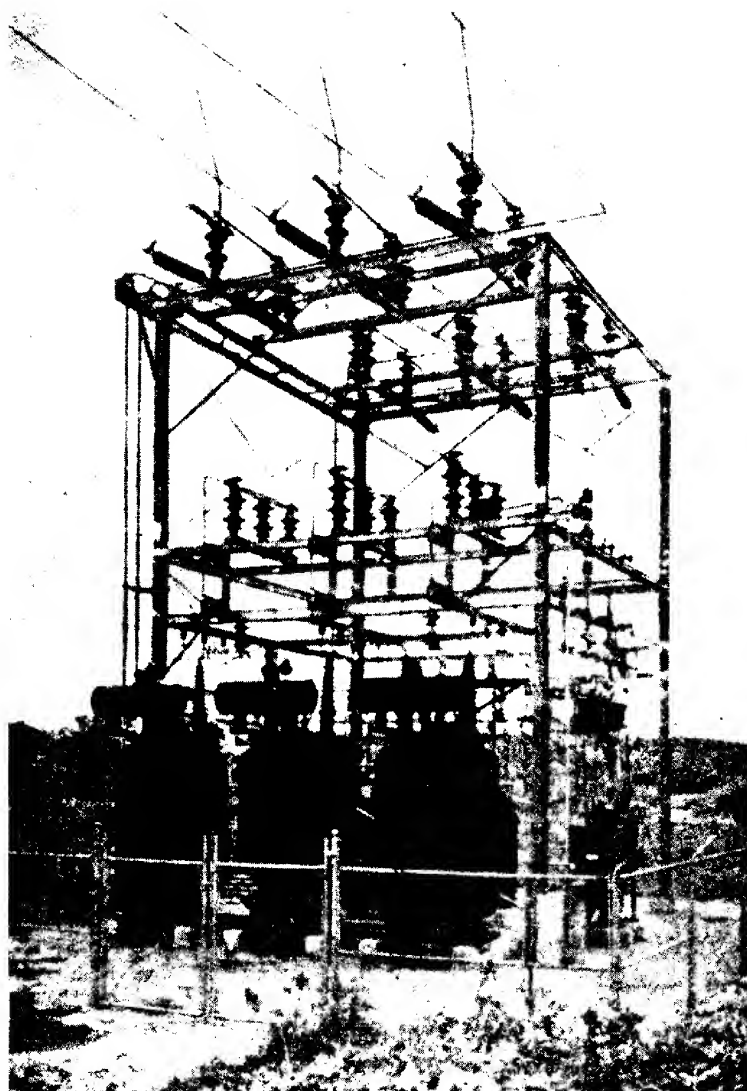


Fig. 27. Subcentral de tipo abierto para dar energía a un sistema de 13 800 V, y otro de 4 800 V, a partir de una línea de transmisión de 66 000 V. El banco principal de transformadores en primer término consta de tres unidades monofásicas de 500 kVA. Los pararrayos de 66 kV, están montados en la parte de atrás de la estructura, un poco por encima del centro, y los pararrayos de 13,8 kV, a la derecha, inmediatamente bajo el centro. Fusibles llenos de líquido protegen los circuitos de 66 kV. La línea saliente de 13 800 V, de la derecha, está regulada y protegida por un disyuntor de aceite. Un transformador trifásico de 650 kVA (parcialmente visible tras el transformador principal de la derecha) rebaja la tensión de 13 800 V a 4 800 V, y alimenta un

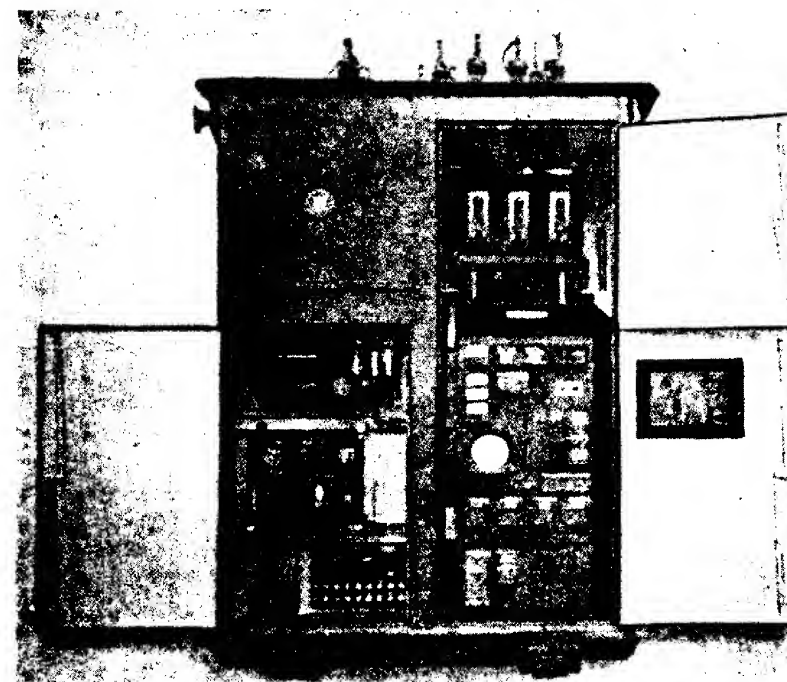


Fig. 28. Transformador CSP trifásico de 600 kVA, 13 200 : 4 330 V, que tiene todos los dispositivos auxiliares necesarios montados ya en la fábrica. Los distintos compartimientos montados en la parte frontal del transformador son: arriba, a la derecha, mecanismo para cambiar las tomas bajo carga; arriba a la derecha, disyuntor de 4 330 V; abajo, a la derecha, relés de sobrecarga, potencia inversa y restablecimiento de la continuidad; abajo, a la izquierda, mando del cambiador de tomas e indicador de la temperatura del aceite. Los pararrayos necesarios están montados encima del alojamiento principal. Cuando están cerradas todas las puertas y el armario conectado a tierra no quedan partes activas expuestas bajo la cubierta superior.

sistema de distribución. Los dos pequeños transformadores de distribución de la derecha suministran energía para ser consumida en la misma central.

Cada banco de transformadores tiene su propio dispositivo de desconexión para interrupción manual durante las reparaciones o el trabajo de mantenimiento. Los interruptores desconectores en el aire de 66 kV, de la parte superior de la estructura, se emplean para seccionar la línea de alta tensión en uno y otro sentido, y pueden abrirse mientras se transporte una carga normal.

Toda la estructura de acero, los tanques metálicos y las cercas de seguridad están conectadas a una tierra próxima a la subcentral mediante conductores gruesos. El conductor a tierra de la línea de 66 kV, está conectado a la estructura puesta a tierra en la parte superior derecha.

Los transformadores no sólo han de estar provistos de una adecuada protección contra las descargas, sino que también deben desconectarse automáticamente del generador de potencia si hay una corriente en los devanados que sea peligrosamente intensa, sea a causa de una sobrecarga anormal, o como resultado de un fallo interno del aislante del transformador. Esta protección contra las sobreintensidades la dan o fusibles o disyuntores automáticos que abren el circuito antes de que el efecto calefactor de las sobreintensidades se haga excesivo. La protección usual contra sobreintensidades, ya sea por fusibles o por disyuntores, se ajusta con una «característica de tiempo inverso», lo cual significa que el circuito se interrumpe al cabo de un período de tiempo más corto para corrientes muy intensas que para otros que lo sean menos. Se dispone, para la protección de transformadores, de fusibles de hasta 138 000 V. En los fusibles de alta tensión, el principal problema es extinguir rápidamente el arco. Esto se realiza de varias maneras: incluyendo la acción de sople resultante de la expansión de un gas en un tubo que contenga el arco caliente; la separación rápida, bajo la acción de un resorte, de los terminales de uno y otro lado de un fusible, y la extinción del arco en un líquido tal como tetracloruro de carbono.

Para que la instalación de un transformador sea razonablemente segura desde el punto de vista de accidentes, todos los terminales desnudos deberán estar fuera del alcance o protegidos por un metal a tierra o por pantallas aisladoras. Los tanques metálicos deberán estar bien conectados a tierra y las señales de alta tensión deberán estar bien visibles si los transformadores se hallan en un lugar accesible al público o a los empleados no encargados de su mantenimiento. Los transformadores que tienen terminales de alta tensión desnudos deberán siempre estar en un recinto vallado y cerrado y, si contienen aceite refrigerante inflamable, deberán montarse sobre un lecho de piedra picada o rodeados de una valla baja de hormigón que evite que se escape el aceite durante un incendio.

Los transformadores refrigerados con aceite ordinario presentan un riesgo muy ligero a la explosión. Un arco sostenido en el interior del tanque vaporizará el aceite y cuando se haya acumulado una cantidad suficiente de vapor del aceite podrá producirse una explosión a menos que exista un dispositivo de seguridad para la presión. No será, pues, aconsejable permitir que en la proximidad de los grandes transformadores de potencia se estacione o trabaje gente de una forma sistemática. Un avance reciente en los transformadores de distribución es el llamado transformador autoprotegido CSP (completely self-protecting). Contiene su propio pararrayos y fusibles con indicadores que muestran si están fundidos o en funcionamiento.

Todos los transformadores de distribución, potencia o instrumento deben instalarse con dispositivos desconectadores adecuados que puedan abrirse para permitir el acceso seguro a las partes eléctricas para inspección, mantenimiento o reparación. Los fusibles para transformadores de distribución suelen estar situados en el interior de un alojamiento de porcelana. Para desconectar el transformador se tira de los fusibles. No obstante, en los transformadores grandes de potencia existe un interruptor aparte que desconecta los fusibles o disyuntores al mismo tiempo que el transformador. Si existe alguna posibilidad de alimentación en los dos sentidos, deberán colocarse interruptores para desconectar los dos devanados.

Muchos transformadores de tensión para interiores están dotados de portafu-

sibles y fusibles en serie con los devanados de alta tensión, a fin de proteger la línea contra los cortocircuitos resultantes de un fallo en el interior del transformador. Cuando un transformador de tensión no sea suministrado con sus propios fusibles, habrá que instalarlo siempre con fusibles aparte en serie con el devanado de alta tensión. Los fusibles utilizados para proteger los transformadores de tensión deberán siempre ir equipados o instalados en serie con resistencias limitadoras de la intensidad que eviten la formación de arcos de potencia destructores dentro de los fusibles, cuando éstos se funden.

7. BLINDAJE

Aun cuando se proteja un transformador con pararrayos, la tensión local entre espiras puede hacerse excesiva entre ciertas partes de los devanados. En otras palabras, la distribución del gradiente de potencial puede no ser uniforme. Un procedimiento para mejorar esta situación consiste en proporcionar una pantalla metálica bien diseñada colocada respecto a los devanados de manera que los gradientes

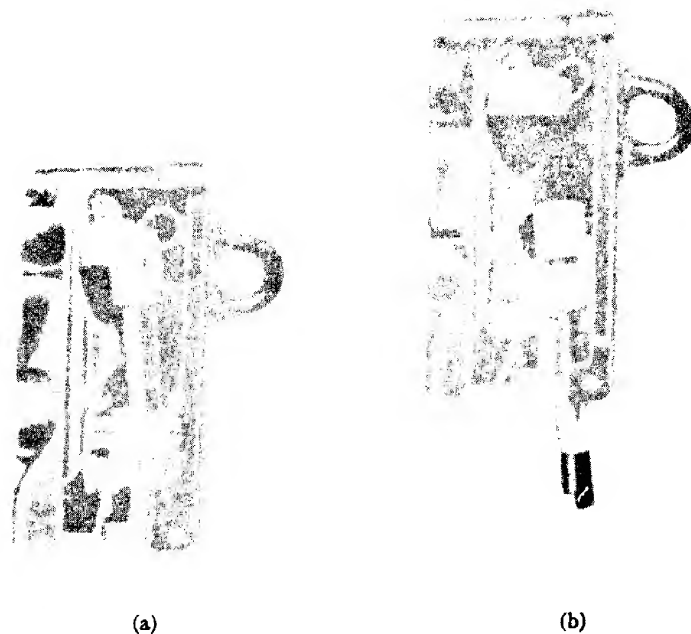


FIG. 29. Cortocircuito de primario, utilizado tanto para fusible como para medio de desconexión en transformadores de distribución. El fusible está contenido en el interior del cilindro de fibra soportado por la tapa articulada, como puede verse en a). Para abrir el circuito, se tira hacia la derecha de la tapa. Si se funde el fusible, el extremo roto cae fuera del cilindro y el resorte de arriba echa el cilindro hacia abajo, con lo que emerge por debajo del alojamiento de porcelana, indicando la condición de fundido, tal como puede verse en b).

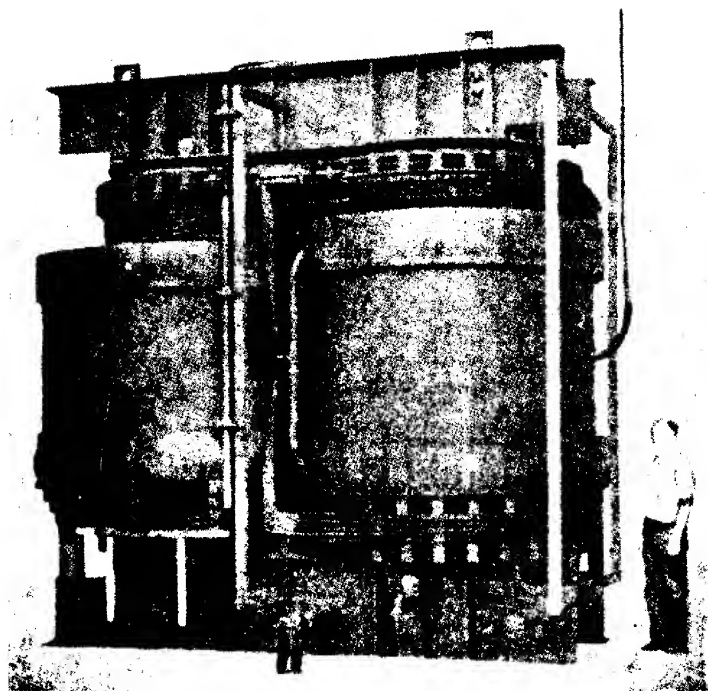


FIG. 30. Núcleo y bobinas de un transformador de potencia de 55 000 kVA, con devanado blindado. Este es el transformador cuyo núcleo se presentó en la figura 4 de este capítulo. En su alojamiento final no se ha incluido el cable terminal de alta tensión de la derecha.

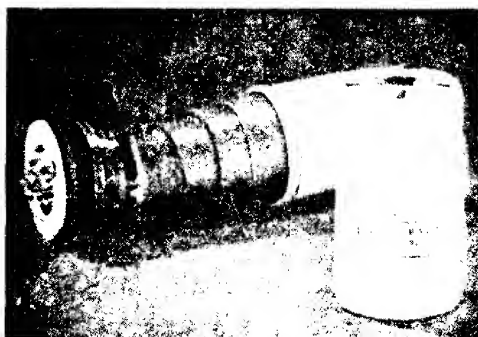


FIG. 31. Pequeño transformador de audiofrecuencia montado en una caja con tres blindajes de gran permeabilidad.

de potencial se mantengan dentro de los valores de seguridad para todos los devanados. El sistema se conoce con el nombre de blindaje electrostático.

En los transformadores para comunicaciones se emplea comúnmente el blindaje electrostático para evitar que en uno de los devanados aparezcan tensiones inducidas a causa de una tensión existente en el otro, y para evitar una interferencia estática similar entre los devanados del transformador y otros circuitos cercanos. Este blindaje electrostático realiza también la importante misión de fijar definitivamente las capacidades devanado a tierra e interespiras. Los transformadores para comunicaciones están provistos a veces de blindaje magnético en forma de una caja de acero, con el fin de reducir al mínimo la interferencia electromagnética entre el transformador y otros elementos de circuito.

Fugas magnéticas en los transformadores

En la teoría más simple dada en el apartado 2 del capítulo X, el transformador se consideraba perfecto eléctricamente. Debemos, sin embargo, desarrollar una teoría más completa de sus características eléctricas, en la cual se tengan en cuenta, al menos en forma aproximada, las siguientes imperfecciones existentes en los transformadores con núcleo de hierro:

1. Los devanados tienen resistencia;
2. Existen fugas magnéticas;
3. Para crear el flujo se precisa una corriente de excitación;
4. En el núcleo se producen pérdidas por histeresis y por corrientes de Foucault.

En ciertos problemas en los que intervienen frecuencias elevadas es preciso tener en cuenta, también, las capacidades de los devanados, si bien las despreciaremos en el análisis siguiente. Así, pues, según las ecuaciones (1) y (2) del capítulo X, las relaciones de tensiones son:

$$v_1 = R_1 i_1 + \frac{d\lambda_1}{dt} \quad \blacktriangleright (1)$$

$$v_2 = R_2 i_2 + \frac{d\lambda_2}{dt} \quad \blacktriangleright (2)$$

donde,

v_1 y v_2 son las tensiones instantáneas entre los terminales de primario y secundario, respectivamente,

i_1 e i_2 las intensidades instantáneas de las corrientes,

R_1 y R_2 son las resistencias efectivas de los devanados,

λ_1 y λ_2 son los flujos instantáneos que atraviesan primario y secundario, resultantes de los efectos de ambas corrientes.

Antes de resolver estas ecuaciones es preciso determinar las relaciones existentes entre los flujos y las intensidades de las corrientes, teniendo en cuenta las fugas magnéticas y las propiedades magnéticas del núcleo. El resto de este capítulo se dedica al estudio de estas cuestiones y de las aproximaciones simplificadoras necesarias para obtener una solución útil.

1. FUGAS MAGNÉTICAS EN VACÍO

Las fugas magnéticas ejercen un efecto importante sobre las características de carga de todas las máquinas de corriente alterna. Aun cuando las fugas magnéticas en un transformador con núcleo de hierro suelen ser muy pequeñas cuando trabaja en vacío, el estudio del campo magnético creado por la corriente que circula por

un devanado nos ayudará a comprender las condiciones más complicadas e importantes que se tienen cuando circulan corrientes por los dos devanados.

Consideremos las dos bobinas con núcleo de aire de la figura 1, que constituyen un transformador elemental. Si es i_1 la intensidad de la corriente que circula por la bobina 1 y la 2 está en circuito abierto, el carácter general del campo magnético creado por i_1 es el indicado burdamente por las líneas de fuerza dibujadas en la

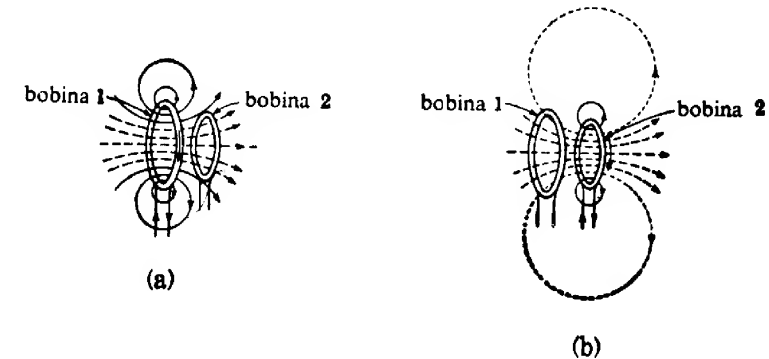


FIG. 1. Campos magnéticos creados por bobinas compactas con núcleo de aire; (a), sólo circula corriente por la bobina 1; (b), sólo circula corriente por la bobina 2.

figura 1a. Como las espiras de la bobina 1 están concentradas formando una bobina compacta, prácticamente todo el flujo creado por la bobina 1 abraza a sus N_1 espiras. Sea φ_{11} el flujo instantáneo total que atraviesa a la bobina 1. Parte de este flujo atraviesa también a la bobina 2, según indican las líneas de trazos de la figura 1a. Llamemos φ_{21} a este flujo mutuo. La diferencia entre el flujo total que atraviesa a la bobina 1 y el flujo mutuo que también atraviesa a la bobina 2 es el flujo de fuga o flujo perdido φ_{f1} de la bobina 1 respecto a la bobina 2. Es decir,

$$\varphi_{f1} \equiv \varphi_{11} - \varphi_{21}. \quad (3)$$

Este flujo de fuga está representado por las líneas de fuerza de trazo continuo de la figura 1a.

El campo magnético creado cuando la bobina 2 está excitada análogamente por una corriente de intensidad instantánea i_2 y la bobina 1 en circuito abierto, es el representado en la figura 1b. Si el flujo total que atraviesa a la bobina 2 es φ_{22} y el flujo mutuo creado por i_2 es φ_{12} —representado por las líneas de trazos de la figura 1b—el flujo de fuga φ_{f2} de la bobina 2 respecto a la 1 es:

$$\varphi_{f2} \equiv \varphi_{22} - \varphi_{12}. \quad (4)$$

Este flujo de fuga está representado por las líneas de fuerza de trazo continuo de la figura 1b.

En el caso de las bobinas compactas de la figura 1 los flujos mutuo y de fuga quedan bastante bien delimitados. Sin embargo, los devanados de un transformador real no son bobinas compactas, por lo que es necesario tener en cuenta los efectos del campo magnético en el interior de las regiones ocupadas por los devanados.

Por ejemplo, consideremos los campos representados en la figura 2 en la que puede verse, en sección, el núcleo y las bobinas de un transformador del tipo de núcleo con devanados coaxiales. En la figura 2 sólo circula corriente por el devanado interior 1, según indican los puntos y cruces que representan las puntas y colas de flechas dirigidas en el sentido de la corriente i_1 . En la figura 2a se han representado las componentes principales del flujo creado por i_1 . La mayor parte del flujo está confinado en el núcleo y por tanto atraviesa a todas las espiras de uno y otro devanado, según

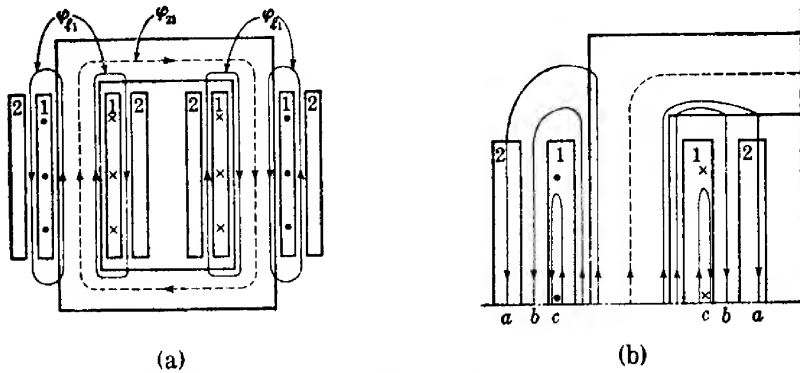


FIG. 2. Campo magnético debido a la corriente que circula por el devanado interior de un transformador del tipo de núcleo. En (a), pueden verse los flujos principales, y en (b), puede verse el carácter general del campo en el cuadrante superior izquierdo de (a)

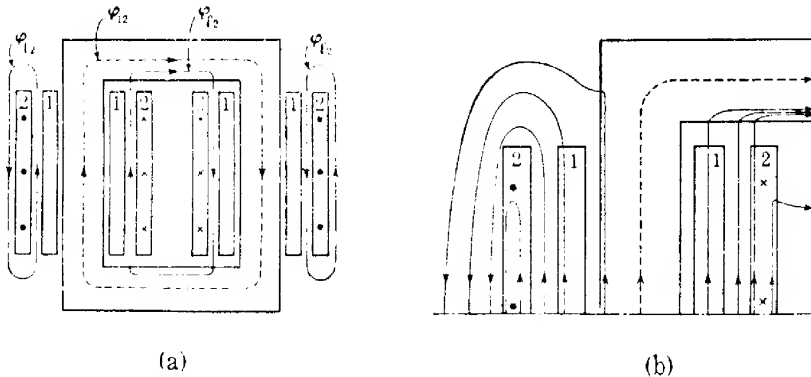


FIG. 3. Campo magnético debido a la corriente que circula por el devanado exterior de la figura 2.

indican las líneas de trazos de la figura 2. Las líneas continuas finas representan un flujo adicional no confinado totalmente en el núcleo. En la figura 2a pueden verse las trayectorias aproximadas de este flujo en el aire, y en la figura 2b se representa el campo magnético en el cuadrante superior izquierdo de la figura 2a. Examinando la figura 2b puede verse que parte del flujo en el aire, por ejemplo las líneas a y b, atraviesan todas las espiras del devanado 1, mientras que otra parte de él, por ejem-

plo las líneas c, sólo atraviesan algunas espiras del devanado 1. Las líneas tales como b y c atraviesan solamente las espiras del devanado 1, pero las líneas tales como a atraviesan también parte de las espiras del devanado 2. La figura 2b indica que, debido a los flujos parciales producidos por flujos (a y c) cuyos caminos pasan por entre las espiras de los devanados, la distinción entre flujos mutuo y de fuga en un transformador real resulta mucho menos clara que en las bobinas compactas de la figura 1.

Debido a la facilidad con que pueden verse los flujos mutuo y de fuga en las bobinas compactas convendrá simplificar el aspecto del campo magnético en un transformador, introduciendo el concepto de flujos equivalentes de la siguiente manera. Sea λ_{11} el flujo que atraviesa al devanado 1 creado por la corriente que por él circula. Una pequeña contribución al flujo λ_{11} se debe al flujo (líneas c de fig. 2b) que atraviesa solamente una parte del número total de espiras del devanado. Sea φ_{11} un flujo equivalente por espira que se considere que atraviesa a las N_1 espiras del devanado 1 produciendo un flujo a través de él $N_1\varphi_{11}$ igual al flujo real λ_{11} . Entonces,

$$\varphi_{11} \equiv \frac{\lambda_{11}}{N_1}. \quad (5)$$

El flujo φ_{11} es el flujo medio por espira del devanado 1. Parte de este flujo atraviesa también al devanado 2. Sea λ_{21} el flujo a través del devanado 2 creado por la corriente del devanado 1. Una pequeña parte del flujo λ_{21} está creada por el flujo (líneas a, figura 2b) que atraviesa solamente una fracción del número total de espiras del devanado 2. Sea φ_{21} un flujo equivalente por espira que atraviesa las N_2 espiras del devanado 2 y cree un flujo a su través $N_2\varphi_{21}$ igual al flujo real λ_{21} . Entonces,

$$\varphi_{21} \equiv \frac{\lambda_{21}}{N_2}. \quad (6)$$

El flujo φ_{21} es el flujo mutuo medio por espira a través del devanado 2.

La diferencia entre el flujo medio φ_{11} a través de las espiras del devanado 1 y el flujo medio φ_{21} que también atraviesa al devanado 2 es el flujo de fuga φ_{11} del devanado 1 respecto al 2. Es decir,

$$\varphi_{11} \equiv \varphi_{11} - \varphi_{21} \quad (7)$$

$$\equiv \frac{\lambda_{11}}{N_1} - \frac{\lambda_{21}}{N_2}. \quad (8)$$

Así, pues, la distribución real del flujo de la figura 2b es equivalente a la imagen simplificada de la figura 2a, en la cual el campo magnético creado por i_1 se representa mediante un flujo mutuo equivalente φ_{21} , indicado por las líneas de trazos de la figura 2a, que atraviesa todas las espiras de ambos devanados, y un flujo de fuga φ_{11} que atraviesa a todas las espiras del devanado 1, pero a ninguna del devanado 2, representado por las líneas de trazo continuo de la figura 2a. En tal caso, puede visualizarse el campo magnético de un transformador real en función de componentes equivalentes de fuga y mutua análogas a las de las bobinas compactas de la figura 1. Cuando se expresan estos flujos equivalentes como valores medios de los

flujos por espira, como en las ecuaciones (6), (7) y (8), tienen en cuenta correctamente los flujos parciales creados por el campo magnético en el interior de los devanados.

Análogamente, si por el devanado 2 circula una corriente de intensidad i_2 estando en circuito abierto el devanado 1, la distribución del flujo es aproximadamente la indicada en la figura 3b. El flujo medio por espira φ_{22} en el devanado 2 es:

$$\varphi_{22} \equiv \frac{\lambda_{22}}{N_2}, \quad (9)$$

donde λ_{22} es el flujo total que atraviesa el devanado 2 creado por su propia corriente. El flujo mutuo medio por espira φ_{12} a través del devanado 1 es:

$$\varphi_{12} \equiv \frac{\lambda_{12}}{N_1}, \quad (10)$$

donde λ_{12} es el flujo total que atraviesa el devanado 1 creado por la corriente del devanado 2. El flujo de fuga del devanado 2 respecto al devanado 1 es:

$$\varphi_{f2} \equiv \varphi_{22} - \varphi_{12} \quad (11)$$

$$\equiv \frac{\lambda_{22}}{N_2} - \frac{\lambda_{12}}{N_1}. \quad (12)$$

En la figura 3a están representados los flujos equivalentes φ_{12} y φ_{f2} .

La mayor parte del flujo mutuo de un transformador con núcleo de hierro se halla confinada en el núcleo y, a causa de la falta de linealidad magnética del hierro, no es proporcional a la fuerza magnetomotriz que lo crea. En cambio, el flujo de fuga se halla en el aire en gran parte de su longitud. Luego, la reluctancia de la porción de hierro de los caminos del flujo de fuga es pequeña frente a la reluctancia de los caminos en el aire.

► Por tanto, a pesar de la no linealidad magnética del hierro, el flujo de fuga es casi directamente proporcional a la intensidad de la corriente que lo origina. Esta importante propiedad del flujo de fuga simplifica mucho el estudio analítico de los transformadores con núcleo de hierro. ◀

2. ECUACIONES DE TENSIONES Y DISTRIBUCIÓN DE FLUJO BAJO CARGA

Cuando circulan corrientes por ambos devanados, los flujos resultantes λ_1 y λ_2 de las ecuaciones 1 y 2 están creados por los efectos combinados de ambas corrientes y se deben, en parte, a los enlaces parciales del campo magnético entre las espiras. Para fijar ideas, sean φ_1 y φ_2 los flujos equivalentes que atraviesan cada espira de los devanados a que están asociados y que dan origen a los flujos $N_1\varphi_1$ y $N_2\varphi_2$ a través de los devanados completos, los cuales son iguales a λ_1 y λ_2 . Es decir, sea

$$\varphi_1 \equiv \frac{\lambda_1}{N_1} \quad (13)$$

$$\varphi_2 \equiv \frac{\lambda_2}{N_2}. \quad (14)$$

Con lo que las ecuaciones 1 y 2 pueden escribirse en la forma

$$v_1 = R_1 i_1 + N_1 \frac{d\varphi_1}{dt} \quad \text{►(15)}$$

$$v_2 = R_2 i_2 + N_2 \frac{d\varphi_2}{dt}. \quad \text{►(16)}$$

Escribimos las ecuaciones en esta forma porque los flujos equivalentes pueden verse más fácilmente que el campo magnético real. Aun cuando la mayor parte del flujo atraviesa ambos devanados, también hay flujos de fuga que atraviesan un devanado, pero no el otro. Los flujos φ_1 y φ_2 de las ecuaciones (15) y (16) son los flujos totales que atraviesan cada espira y comprenden tanto la componente de fugas como la mutua. El problema está en determinar las relaciones entre estos flujos resultantes y las corrientes.

2a. *Flujos componentes.* Cuando por ambos devanados circulan corrientes, el campo magnético resultante depende de las intensidades instantáneas de ambas corrientes. En general, por tanto, la determinación de la distribución del campo magnético será más difícil que cuando sólo circula corriente por un devanado. Por esta razón, conviene descomponer los flujos resultantes en las componentes creadas por cada una de las corrientes por sí sola.

Por el momento, consideremos un transformador que tenga un núcleo de material magnético cuya permeabilidad sea constante. Con esta hipótesis, puede aplicarse el principio de superposición y el flujo resultante que atraviesa cada devanado se podrá expresar como suma de las componentes debidas a cada corriente actuando sola *. Estas componentes son:

1. El flujo de fuga debido a la corriente del devanado;
2. El flujo mutuo componente debido a la corriente del devanado;
3. El flujo mutuo componente debido a la corriente del otro devanado.

Así, pues, los flujos resultantes φ_1 y φ_2 de las ecuaciones (15) y (16) pueden expresarse en la forma,

$$\varphi_1 = \varphi_{f1} + \varphi_{21} + \varphi_{12} \quad (17)$$

$$\varphi_2 = \varphi_{f2} + \varphi_{12} + \varphi_{21}. \quad (18)$$

Los flujos con doble subíndice son las componentes creadas por una sola corriente actuando sobre sí misma. Es decir,

φ_{f1} y φ_{f2} son los flujos de fuga componentes creados por cada corriente,
 φ_{21} es el flujo mutuo componente creado por i_1 ,
 φ_{12} es el flujo mutuo componente creado por i_2 .

En las figuras 2 y 3 de este capítulo se indican los caminos de estos flujos componentes y sus sentidos positivos, y el campo magnético resultante en un instante cual-

* No es necesario postular un núcleo de permeabilidad constante si se consideran los flujos componentes como componentes debidas a cada corriente actuando en presencia de la otra. No obstante, es más fácil ver los flujos componentes suponiendo permeabilidad constante y los resultados de este ejemplo pueden extenderse fácilmente a la aplicación a un transformador con núcleo de hierro, según se verá a continuación.

quiera puede considerarse como el resultado de superponer estos campos componentes haciendo las consideraciones pertinentes acerca de sus valores instantáneos y sentidos, según se indica en la parte b) de este apartado.

La suma $\varphi_{11} + \varphi_{21}$ de las componentes primera y segunda del segundo miembro de la ecuación (17) es el flujo total φ_{11} creado por la corriente del primario sola más el flujo mutuo φ_{12} a través de una sección del primario, pero creado por la corriente del secundario únicamente. Luego, la ecuación (17) puede escribirse en la forma,

$$\varphi_1 = \varphi_{11} + \varphi_{12}. \quad (19)$$

Así, pues, por superposición, el flujo resultante φ_1 a través de una sección del primario se puede expresar como suma del flujo φ_{11} creado por la corriente del primario sola más el flujo mutuo φ_{12} a través de una sección del primario, pero creado por la corriente del secundario sola. Análogamente, en la ecuación (18), $\varphi_{12} + \varphi_{22}$ es el flujo total φ_{22} a través de una sección del secundario debido a su propia corriente solamente y φ_{21} es el flujo mutuo a través de una sección del secundario, pero debido únicamente a la corriente del primario. Luego, por superposición, la ecuación (18) puede escribirse en la forma,

$$\varphi_2 = \varphi_{22} + \varphi_{21}. \quad (20)$$

Este método de combinar los flujos componentes conduce a las conocidas ecuaciones de los circuitos acoplados en función de las autoinducciones e inducciones mutuas de los devanados, que se estudian en los capítulos XVII y XVIII. El introducir ahora las ecuaciones (19) y (20) se hace solamente con la intención de dejar sentado que las ecuaciones clásicas de los circuitos acoplados pueden deducirse de la misma teoría fundamental que el método de análisis que se estudia en el resto de este capítulo.

Los flujos componentes de las ecuaciones (17) y (18) pueden obtenerse también de otra manera especialmente conveniente para el análisis de los transformadores con núcleo de hierro. Obsérvese que el flujo mutuo resultante creado por la acción combinada de las corrientes de primario y secundario es la suma de las componentes debidas a cada corriente actuando por sí sola. Representando por φ a este flujo mutuo resultante,

$$\varphi = \varphi_{21} + \varphi_{12}. \quad (21)$$

Luego, las ecuaciones (17) y (18) pueden escribirse en la forma

$$\varphi_1 = \varphi_{11} + \varphi \quad \blacktriangleright (22)$$

$$\varphi_2 = \varphi_{22} + \varphi. \quad \blacktriangleright (23)$$

Es decir, el flujo resultante a través de una sección de un devanado puede expresarse como suma del flujo de fuga debido únicamente a la corriente del devanado más el flujo mutuo resultante debido a las fuerzas magnetomotrices combinadas de las corrientes de primario y secundario actuando simultáneamente. Combinando de este modo las componentes en las ecuaciones (17) y (18) se llega al método de análisis estudiado en los apartados 3 y 4.

2b. *Distribución resultante del flujo.* Antes de entrar en un estudio detallado del tratamiento analítico que puede desarrollarse a partir de las ecuaciones (22) y (23),

el lector debe tener una idea bien clara de los significados de los flujos componentes en esas ecuaciones. En particular, es importante que no tenga confusiones acerca de la manera en que se relacionan dichos flujos componentes con la distribución real del flujo en un transformador en carga.¹ Por tanto, el estudio que se realiza a continuación describirá, por medio de mapas de líneas de fuerza trazados burdamente, la manera en que varía con el tiempo el campo magnético en un transformador en carga.

Consideremos un transformador cargado que tenga igual número de espiras en primario que en secundario. Según se vio en el apartado I del capítulo X, la corriente de secundario crea una fuerza magnetomotriz que tiende a oponerse a la fuerza magnetomotriz de la corriente del primario, y, por tanto, si se toman en el mismo sentido respecto al flujo positivo los sentidos positivos de ambas corrientes, éstas son aproximadamente, aunque no exactamente, de igual intensidad y fases opuestas, como se indica en la figura 4. Las intensidades y la relación de fases de las corrientes de primario y secundario dependen de la naturaleza de la carga así como de las características del transformador.

En el instante t_0 de la figura 4 la intensidad i_2 de la corriente del secundario es nula y la distribución resultante del flujo en ese instante es la misma que si estuviera abierto el secundario. Si el primario es el devanado interior 1 de las figuras 2 y 3 de este capítulo, la distribución del flujo en el instante t_0 es la indicada en la figura 2. En el instante t_1 posterior, es nula la intensidad de la corriente del primario i_1 y el campo magnético es, entonces, el representado en la figura 3. Durante la primera parte del intervalo de tiempo entre t_0 y t_1 , la intensidad instantánea de la corriente de primario es mayor que la intensidad instantánea de la corriente del secundario y la corriente del primario es la que mayor influencia tiene sobre la distribución del flujo; es decir, el flujo de fuga situado en el aire atraviesa al primario y se dirige hacia abajo por los espacios de aire existentes entre los devanados de la rama izquierda del núcleo, como se indica en la figura 2. Durante la última parte del intervalo de tiempo entre t_0 y t_1 , la intensidad instantánea de la corriente del secundario es mayor que la de la del primario y es el secundario quien más influye en la distribución del flujo; es decir, el flujo de fuga en el aire atraviesa al secundario y se dirige hacia arriba por los espacios de aire entre los devanados de la rama izquierda del núcleo, como se indica en la figura 3. Así, pues, durante el intervalo de tiempo

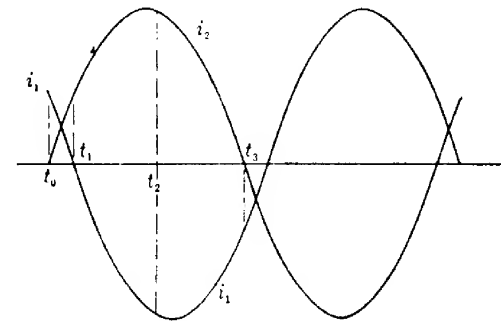


FIG. 4. Intensidades instantáneas de las corrientes de primario y secundario.

¹ Es interesante leer críticamente las diferentes ideas de varios autores acerca de la distribución del flujo en los transformadores, expresados en los estudios y publicaciones de K. B. McEACHRON, «Magnetic Flux Distribution in Transformers», *A. I. E. E. Trans.*, 41 (1922), 247-261; O. G. C. DAHL, «Separate Leakage Reactance of Transformer Windings», *A. I. E. E. Trans.*, 44 (1925), 785-791; A. BOYAJIAN, «Resolution of Transformer Reactance into Primary and Secondary Reactances», *A. I. E. E. Trans.*, 44 (1925), 805-810.

entre t_0 y t_1 , la distribución del flujo sufre una transición desde la forma de la figura 2 a la de la figura 3; el flujo en los espacios de aire entre los devanados (dirigido hacia abajo en t_0) disminuye, invierte su sentido, y luego crece, cambiando simultáneamente su situación en el hierro desde caminos que abrazan el primario (en t_0) a caminos que abrazan el secundario (en t_1). Durante todo este intervalo de tiempo, las corrientes instantáneas de primario y secundario son relativamente débiles y, por tanto, el flujo de fuga es pequeño.

Entre los instantes t_1 y t_2 de la figura 4, las corrientes en los devanados crean fuerzas magnetomotrices opuestas, predominando la fuerza magnetomotriz de la intensidad positiva i_2 de la corriente del secundario. Por tanto, el flujo mutuo resultante φ tiene el sentido de la fuerza magnetomotriz de i_2 , según indican las líneas de trazos de la figura 5a en la cual pueden verse también, representados por líneas de trazo continuo, los flujos de fuga φ_{11} y φ_{12} creados por cada una de las corrientes. Así, la figura 5a muestra los flujos componentes de las ecuaciones (22) y (23) durante el intervalo de tiempo comprendido entre t_1 y t_2 . Sin embargo, estos flujos no son más que *componentes* y no existen como líneas de fuerza en una representación del campo magnético resultante. La distribución real del flujo es el resultado de combinar estas componentes. Por ejemplo, el flujo resultante φ y el flujo de fuga del primario φ_{11} son componentes del flujo en las ramas verticales del núcleo, y estas componentes tienen sentidos opuestos, según se indica en la figura 5a. El flujo resultante en las ramas verticales es la diferencia entre estas componentes de sentidos opuestos. Es decir, la fuerza magnetomotriz del primario, oponiéndose a la del secundario, desvía una parte del flujo en el núcleo y lo obliga a pasar por los espacios de aire existentes entre los devanados, según se indica en la figura 5b. Obsérvese que las líneas de fuerza que instantáneamente atraviesan ambos devanados, representadas por las líneas de trazos de la figura 5b, no representan la componente mutua resultante φ , representada por las líneas de trazos de la figura 5a, y que el flujo en el aire, representado por las líneas de trazo continuo de la figura 5b, abraza al secundario, pero no al primario.

Entre los instantes t_1 y t_2 de la figura 4, el flujo mutuo resultante disminuye hasta que en el instante t_2 las fuerzas magnetomotrices de primario y secundario son iguales y opuestas, con lo que la fuerza magnetomotriz total a lo largo de todo el núcleo es nula. El flujo mutuo resultante, en el instante t_2 , será nulo si se desprecian los efectos de histeresis y de corrientes de Foucault. La distribución del flujo en estas condiciones es, aproximadamente, la indicada en la figura 5c. Durante el intervalo entre t_1 y t_2 las intensidades de las corrientes aumentan y el flujo en el aire crece desde un valor muy pequeño en t_1 hasta otro mucho mayor en t_2 .

Entre los instantes t_2 y t_3 de la figura 4, las corrientes de primario y secundario tienen sentidos contrarios, predominando la fuerza magnetomotriz de la intensidad negativa i_1 de la corriente del primario. El flujo mutuo resultante φ tendrá, pues, el sentido de la fuerza magnetomotriz de i_1 , según indican las líneas de trazos de la figura 5d, donde también pueden verse las líneas de trazo continuo que representan a los flujos de fuga componentes φ_{11} y φ_{12} creados por cada corriente. Así, pues, la figura 5d presenta los flujos componentes de las ecuaciones (22) y (23) durante el intervalo de tiempo entre t_2 y t_3 , pero hay que tener presente que los flujos indicados en la figura 5d no son más que *componentes* y no pueden identificarse con ningunas de las líneas de fuerza del campo magnético resultante. La distribución resultante de

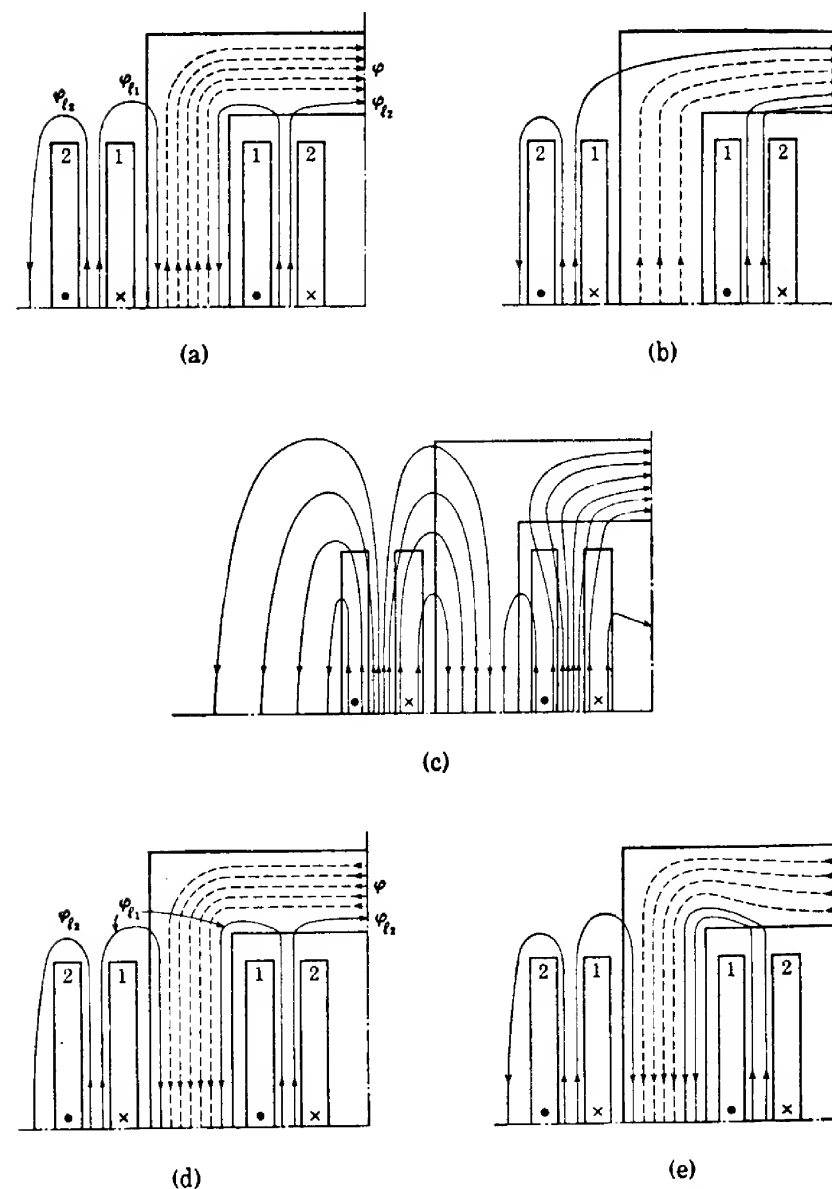


FIG. 5. Campo magnético en el cuadrante superior izquierdo del transformador de la figura 2, debido a las fuerzas magnetomotrices de sentidos opuestos de primario y secundario. a) Flujos componentes y b) campo resultante cuando i_2 es mayor que i_1 . c) Campo resultante cuando i_2 es igual a i_1 . d) Flujos componentes y e) campo resultante cuando i_1 es mayor que i_2 .

flujo es la combinación de las componentes y está representada aproximadamente en la figura 5e. Obsérvese que las líneas de fuerza que abrazan instantáneamente ambos devanados, indicadas mediante líneas de trazos en la figura 5e, no representan a la componente resultante φ de la figura 5d, y que la mayor parte del flujo en el aire, representado en la figura 5e por líneas de trazo continuo, abraza al primario, pero no al secundario.

Al aumentar el tiempo de t_2 a t_3 (fig. 4), las intensidades instantáneas de las corrientes aumentan, hasta que finalmente en t_3 sólo circula corriente por el primario, como en t_0 , con la diferencia que la corriente del primario es ahora de sentido contrario al anterior. La distribución del flujo en t_3 será, pues, análoga, pero de sentido contrario a la indicada en la figura 2.

Podemos resumir los puntos más importantes de este estudio de la manera siguiente:

► La distribución del flujo en un transformador no sólo depende de la geometría de su núcleo y devanados, sino también de las intensidades *instantáneas* y sentidos de las corrientes. Así, durante el hem ciclo de t_0 a t_3 , la distribución del flujo varía continuamente, adoptando sucesivamente las formas presentadas en las figuras 2, 3 y 5. ◀

► Los flujos mutuo y de fuga de las ecuaciones (22) y (23) no son mas que *componentes*, y no pueden identificarse con ningunas de las líneas de fuerza del campo magnético resultante, salvo cuando sólo circula corriente por un devanado, como ocurre en las figuras 2 y 3. ◀

► Cuando circulan corrientes instantáneas por ambos devanados, la mayor parte del flujo en el aire abraza al devanado que cree mayor fuerza magnetomotriz, y las líneas de fuerza que abrazan a un devanado sin abrazar al otro no representan al flujo de fuga componente de este devanado respecto al otro. ◀

3. INDUCTANCIAS DE FUGA

Cuando se expresan los flujos resultantes de las ecuaciones (15) y (16) como suma de los componentes de las ecuaciones (22) y (23), las ecuaciones de las tensiones del transformador quedan en la forma,

$$v_1 = R_1 i_1 + N_1 \frac{d\varphi_{11}}{dt} + N_1 \frac{d\varphi}{dt} \quad (24)$$

$$v_2 = R_2 i_2 + N_2 \frac{d\varphi_{12}}{dt} + N_2 \frac{d\varphi}{dt}. \quad (25)$$

luego cada tensión entre terminales puede expresarse como suma de una caída óhmica, una tensión inducida por el flujo de fuga y otra inducida por el flujo mutuo resultante φ . Los flujos componentes de fuga φ_{11} y φ_{12} inducen tensiones solamente en el devanado al que están asociados, pero el flujo mutuo resultante φ abraza ambos devanados e induce en ellos tensiones cuyo cociente es igual al cociente entre los números de espiras correspondientes, como en el transformador ideal.

A pesar de la no linealidad magnética del núcleo de hierro, los flujos componentes

de fuga son casi directamente proporcionales a las intensidades de las corrientes que los crean, ya que los caminos de los flujos de fuga transcurren por el aire en la mayor parte de su longitud.

► Luego las componentes de las autoinducciones de los devanados debidas a los flujos de fuga son muy aproximadamente constantes, por lo que conviene introducir parámetros de inductancia que interpreten las tensiones inducidas por los flujos de fuga. ◀

La componente de la autoinducción del devanado 1 debida al flujo de fuga φ_{11} del devanado 1 respecto al 2 se define como *inductancia de fuga* del devanado 1 respecto al devanado 2. Así, pues, la inductancia de fuga L_{11} del devanado 1 respecto al 2 es el flujo de fuga que, por unidad de intensidad de corriente, atraviesa todo el primario, o sea,

$$L_{11} \equiv \frac{N_1 \varphi_{11}}{i_1}. \quad \triangleright (26)$$

Análogamente, la inductancia de fuga L_{12} del devanado 2 respecto al devanado 1 es:

$$L_{12} \equiv \frac{N_2 \varphi_{12}}{i_2}. \quad \triangleright (27)$$

Obsérvese que la inductancia de fuga es una propiedad de un devanado respecto a otro. Si el devanado tuviera más de dos devanados independientes, la inductancia de fuga del primario respecto al secundario suele ser diferente de la inductancia de fuga del primario respecto al tercer devanado *. Sin embargo, en el caso de un transformador de dos devanados no hay ambigüedad alguna si a la inductancia de fuga del primario respecto al secundario se le llama, abreviadamente, inductancia de fuga primaria. En el resto del estudio de los transformadores de dos devanados utilizaremos siempre esta terminología abreviada.

Si se expresan en función de las inductancias de fuga las tensiones inducidas por los flujos de fuga de primario y secundario, las ecuaciones (24) y (25) quedan en la forma,

$$v_1 = R_1 i_1 + L_{11} \frac{di_1}{dt} + N_1 \frac{d\varphi}{dt} = R_1 i_1 + L_{11} \frac{di_1}{dt} + e_1 \quad \triangleright (28)$$

$$v_2 = R_2 i_2 + L_{12} \frac{di_2}{dt} + N_2 \frac{d\varphi}{dt} = R_2 i_2 + L_{12} \frac{di_2}{dt} + e_2 \quad \triangleright (29)$$

donde e_1 y e_2 son las tensiones inducidas por el flujo mutuo resultante φ . Obsérvese que las resistencias y las inductancias de fuga de las ecuaciones (28) y (29) son parámetros esencialmente constantes y que el único efecto de las propiedades magnéticas no lineales del núcleo sobre la teoría expresada en las ecuaciones (28) y (29) está en la relación entre el flujo mutuo resultante φ y la fuerza magnetomotriz requerida para crearlo. En el apartado 4 se estudiará este aspecto de la teoría.

* En el capítulo XXVII, se estudian los transformadores multicircuito.

4. COMPONENTES DE EXCITACIÓN Y DE CARGA DE LA CORRIENTE DEL PRIMARIO

El flujo mutuo resultante φ está creado por la acción combinada de las corrientes de primario y secundario. En el análisis del transformador con núcleo de hierro de dos devanados se supone casi siempre que el flujo mutuo se halla enteramente confinado en el núcleo y usualmente que el flujo de fuga es tan débil frente al flujo mutuo resultante φ , que éste puede considerarse igual al flujo en el núcleo. Esta hipótesis no es estrictamente cierta, puesto que las fugas incrementan positivamente el flujo en ciertas partes del núcleo y negativamente en otras, según puede verse en la figura 5. Aun cuando es posible tener en cuenta aproximadamente los efectos de los flujos de fuga sobre las propiedades magnéticas del núcleo, rara vez es necesario hacerlo. Si se desprecian estos efectos secundarios de las fugas magnéticas, las fuerzas magnetomotrices de primario y secundario serán igualmente eficaces para crear un flujo mutuo, independientemente de la distinta disposición de estos devanados sobre el núcleo.

En virtud de la ecuación (28), el flujo mutuo resultante φ debe ajustarse por sí mismo de manera que la suma de la caída óhmica del primario, la caída en la inductancia de fuga del primario, y la fuerza contraelectromotriz e_1 inducida por el flujo mutuo resultante sea igual a la tensión aplicada al primario; y las corrientes de primario y secundario, cuya fuerza magnetomotriz resultante crea el flujo mutuo resultante, deben ajustarse por sí mismas para satisfacer estas condiciones. Según se vio en el apartado 1 del capítulo X, conviene descomponer la corriente del primario en una *componente de carga* i'_L , cuya fuerza magnetomotriz equilibre exactamente a la fuerza magnetomotriz del secundario, y una *componente de excitación* i'_ϕ cuya fuerza magnetomotriz sea suficiente por sí misma para crear el flujo mutuo resultante requerido para satisfacer la ecuación que da la tensión del primario. La intensidad i_1 de la corriente del primario es la suma de estas componentes; así,

$$i_1 = i'_L + i'_\phi. \quad (30)$$

Si se toman en el mismo sentido respecto al flujo los sentidos positivos de las corrientes de primario y secundario, la relación entre la intensidad de la corriente del secundario y la componente de carga de la corriente del primario es, por definición,

$$N_1 i'_L = -N_2 i_2 \quad (31)$$

o sea,

$$i'_L = -\frac{N_2}{N_1} i_2. \quad (32)$$

Es decir, la componente de carga de la corriente del primario es, en cada instante, proporcional a la intensidad de la corriente del secundario y tiene sentido contrario respecto al flujo. Así, pues, la intensidad de la corriente del secundario y la componente de carga del primario están relacionadas entre sí como lo están las intensidades de las corrientes de secundario y primario en un transformador ideal.

La relación entre el flujo resultante en el núcleo y la corriente de excitación es un ciclo flujo-intensidad de corriente análogo al de la figura 3 del capítulo VI. Cuando

se supone, como se ha hecho antes, que el flujo en el núcleo es igual al flujo mutuo resultante φ , este ciclo flujo-intensidad bajo carga es el mismo que el ciclo flujo-intensidad en vacío de igual inducción magnética máxima.

5. CIRCUITO EQUIVALENTE

Examinando la ecuación (28) se ve que se aplica a un circuito en el cual la tensión v_1 entre los terminales del primario está aplicada a la resistencia del primario en serie con la inductancia de fuga y con la fuerza contraelectromotriz e_1 inducida en el primario por el flujo mutuo resultante, tal como se representa en la parte (a) de la figura 6. Como la corriente de excitación depende del flujo mutuo resultante φ , podrá tenerse en cuenta la corriente de excitación i'_ϕ si, en paralelo con la tensión e_1 inducida por este flujo mutuo resultante, se conecta una bobina con núcleo de hierro, en la forma indicada en la parte (b) de la figura 6. La pérdida en el núcleo y las características de excitación de esta bobina son las del transformador real y la resistencia de su devanado es nula. La corriente que circula por el circuito principal de la figura 6 situado a la derecha de esta bobina es la componente de carga i'_L de la corriente del primario. Las tensiones e_1 y e_2 inducidas en primario y secundario por el flujo mutuo resultante son directamente proporcionales a los números de espiras de los devanados, como lo son las tensiones entre los terminales en un transformador ideal. También la componente i'_L de la corriente del primario está relacionada

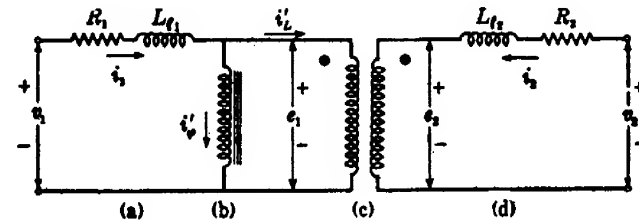


Fig. 6. Circuito equivalente representativo de un transformador con núcleo de hierro. Las características de excitación están representadas por la bobina con núcleo de hierro (b), cuyo devanado no tiene resistencia. El cociente entre los números de espiras del transformador ideal (c), es igual a N_1/N_2 .

con la intensidad de la corriente del secundario (ecs. 31 y 32) como lo están las intensidades de las corrientes de primario y secundario en un transformador ideal. Luego la razón de los números de espiras del transformador real puede representarse mediante un transformador ideal, como en la parte (c) de la figura 6. La relación entre la tensión inducida en el secundario e_2 y la tensión entre terminales del secundario v_2 (ec. 29), es también la representada por la impedancia en serie en la parte (d) de la figura 6. Luego basándose en las hipótesis del apartado 4 referentes a los factores que influyen sobre las características de excitación del núcleo, el circuito de la figura 6 tiene iguales características eléctricas que el transformador real.

Una ventaja del circuito equivalente es que pone de manifiesto, probablemente en forma más clara que las ecuaciones, las imperfecciones del transformador real. Las resistencias de los devanados y las inductancias de fuga introducen caídas de tensión en primario y secundario que hacen que el cociente entre las tensiones de

primario y secundario sea diferente del cociente de sus números de espiras. Además, la corriente de excitación hace que el cociente entre las intensidades de las corrientes de primario y secundario sea diferente del cociente entre los recíprocos de los números de espiras cambiado de signo, cosa que indica la bobina conectada en paralelo de la figura 6.

Otra ventaja del concepto de inductancia de fuga y del circuito equivalente resultante es que los efectos de la no linealidad magnética del núcleo de hierro quedan segregados en la bobina en paralelo representativa de las características de excitación. *Exceptuando esta consideración, el transformador con núcleo de hierro tiene esencialmente las propiedades de un circuito lineal, puesto que las resistencias de los devanados y las inductancias de fuga son muy aproximadamente constantes.* En el apartado 6 se estudia esta importante consideración.

6. EFECTOS DEL NÚCLEO DE HIERRO Y APROXIMACIONES SIMPLIFICATIVAS

Si quiere determinarse analíticamente el funcionamiento de un transformador con núcleo de hierro como relación entre la corriente de excitación y el flujo mutuo resultante, convendrá tomar una relación más sencilla que la real del ciclo flujo-intensidad de corriente. Como la corriente de excitación suele ser débil, frecuentemente podrá realizarse el estudio mediante métodos aproximados. Existen varias alternativas.

1. Puede prescindirse de la forma de onda peculiar de la corriente de excitación y suponer que en las condiciones de corriente alterna permanente la corriente de excitación es sinusoidal, como en el apartado 11 del capítulo VI. Las componentes de pérdida en el núcleo y magnetizante de la corriente de excitación sinusoidal equivalente pueden ajustarse con los cambios de frecuencia y flujo en el núcleo de acuerdo con las características reales del transformador. Así, pues, la no linealidad del núcleo puede tenerse en cuenta hasta el punto en que afecte a las intensidades eficaces de las componentes de la corriente de excitación, pero se desprecian los armónicos de la corriente de excitación debidos a la no linealidad del núcleo. Para unas condiciones de funcionamiento determinadas, la bobina con núcleo de hierro de la figura 6 que representa las características de excitación del núcleo equivale, entonces, a una combinación serie o paralelo de resistencia y autoinducción, como en los circuitos equivalentes del apartado 13 del capítulo VI. De acuerdo con estas hipótesis, para unas condiciones de funcionamiento dadas se considera que el transformador se comporta como elemento de circuito lineal, si bien los parámetros de circuito que representan sus características de excitación varían sus valores cuando varía el flujo mutuo resultante o la frecuencia.

2. Se obtiene una ulterior simplificación si se formulan hipótesis apropiadas acerca de los parámetros de circuito que representan las características de excitación. Así, a menudo se puede suponer que las características de excitación son representables por una combinación paralelo de una resistencia constante y de una autoinducción constante. Los efectos de estas hipótesis se estudian detalladamente en el apartado 13 del capítulo VI.

3. En muchos problemas en que intervienen las características de un transformador como elemento de circuito puede despreciarse la pérdida en el núcleo y suponer que el flujo en el núcleo es, en cada instante, proporcional a la intensidad de la

corriente magnetizante. Es decir, para unas condiciones de funcionamiento dadas, puede suponerse que las autoinducciones e inducciones mutuas no varían cíclicamente, y por consiguiente se podrá aplicar al transformador con núcleo de hierro la teoría clásica de los circuitos acoplados magnéticamente. A pesar de la no linealidad magnética del núcleo, las características de un transformador dependen en última instancia de una fuga magnética esencialmente lineal y de una corriente de excitación no lineal que, no obstante, es a menudo tan débil que puede prescindirse de sus peculiaridades. Luego, al principio del análisis, el transformador puede considerarse a menudo como elemento de circuito lineal. Esta alternativa se usa frecuentemente en el análisis de las redes de comunicaciones, como ocurre en los capítulos XVII y XVIII. Los efectos de la no linealidad magnética pueden tenerse en cuenta parcialmente mediante las variaciones de las inductancias correspondientes a los cambios de las condiciones de funcionamiento.

4. Puede simplificarse aún más la tercera alternativa suponiendo constantes las inductancias ante los cambios de las condiciones de funcionamiento.

5. Como la corriente de excitación es a menudo débil frente a la componente de carga de la corriente del primario, frecuentemente podrá despreciarse por completo la corriente de excitación. Esta es la alternativa más simple y se emplea a menudo en el análisis del comportamiento de los transformadores conectados en redes de potencia. También es aplicable a los transformadores de audiofrecuencia a las audiofrecuencias elevadas. Con esta hipótesis puede suprimirse la bobina en paralelo del circuito equivalente de la figura 6 y el transformador equivale a las impedancias de fuga en serie con un transformador ideal. Esto conduce al importante concepto de impedancia equivalente que se estudia en el apartado 6 del capítulo XIII.

PROBLEMAS

1. Dos bobinas rectangulares muy largas se disponen concéntricamente en el mismo plano con sus lados largos paralelos, tal como indica la sección de la figura 7. La anchura de la bobina exterior es doble que la de la interior. Cada uno de los conductores tiene un diámetro $2r$. Suponiendo que las bobinas tengan una longitud l tan grande que puedan despreciarse los efectos de los extremos y despreciando los flujos a través del interior de los conductores, determinar la inducción mutua, la inductancia de fuga de la bobina interior respecto a la exterior, y la inductancia de fuga de la bobina exterior respecto a la interior.

2. Determinar, para el transformador elemental con núcleo de aire del problema 1, los flujos instantáneos de fuga en un instante en que las corrientes de ambas bobinas son de igual intensidad, pero de sentidos contrarios. Compárense estos resultados con los valores de los flujos de fuga calculados en el problema 1. ¿Cómo se comparan los flujos de fuga instantáneos en un instante cualquiera del ciclo con los flujos de fuga de cada devanado respecto al otro?

3. En los esquemas de la figura 8 puede verse un corte de los devanados de un transformador especial del tipo de núcleo (con bobinas sobre una sola rama). Los devanados principales, numerados 1 y 2, son para 110 V, 60 Hz, 11,4 A y constan de 84 espiras devanadas en tres capas de 28 cada una. Los devanados I, II, III, IV, y V son bobinas exploradoras, cada una de las cuales tiene una sola capa de 21 espiras de hilo fino.

En un ensayo para determinar los valores relativos de los flujos de fuga en distintos

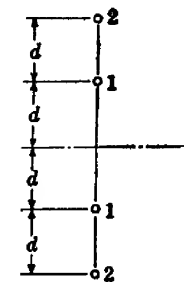


FIG. 7. Sección transversal de las bobinas planas de los problemas 1 y 2.

puntos alrededor de los devanados, se aplica primeramente a la bobina 1 con la 2 en circuito abierto una tensión de 11 V a 60 Hz, y luego se hace lo mismo a la bobina 2 con la 1 en circuito abierto. La corriente en vacío a esta tensión es de 125 mA y se observa que su forma de onda es casi sinusoidal.

En cada parte del ensayo, se conectan sucesivamente las bobinas exploradoras I-V

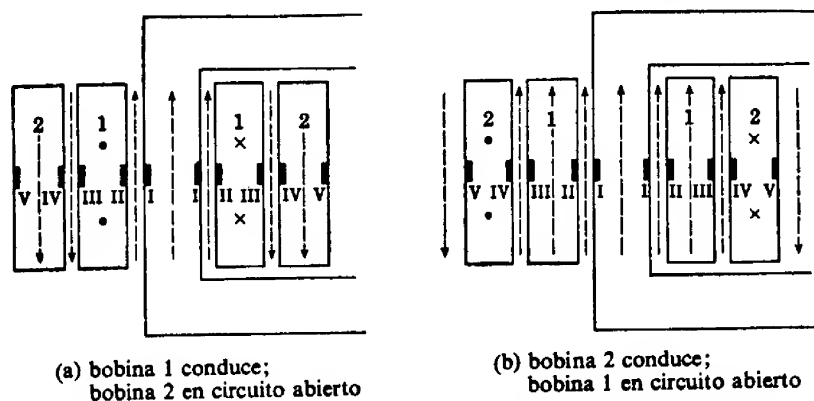


FIG. 8. Corte transversal de un transformador especial con bobinas exploradoras. Problemas 3 y 4.

en oposición cada una con la siguiente y se mide la diferencia de potencial. Los datos obtenidos son los de la siguiente tabla:

BOBINA 1 CONDUCE; BOBINA 2 EN CIRCUITO ABIERTO

Conexión de las bobinas exploradoras	Tensión, V
II-I	0,0059
III-II	0,0001
IV-III	0,0039
V-IV	0,0097

BOBINA 2 CONDUCE; BOBINA 1 EN CIRCUITO ABIERTO

II-I	0,0047
III-II	0,0063
IV-III	0,0050
V-IV	0,0004

En la hipótesis de que los caminos del flujo de fuga pueden aproximarse en la forma indicada por las flechas de trazos de la figura 8 y que la corriente en vacío es enteramente magnetizante, calcular el flujo de fuga equivalente de la bobina 1 respecto a la bobina 2, el flujo de fuga equivalente de la bobina 2 respecto a la 1, y las inductancias de fuga de cada devanado respecto al otro. Anótese las aproximaciones y las hipótesis formuladas para llegar a una solución.

4. Dibújense esquemáticamente los flujos componentes y el flujo resultante del transformador del problema 3 en un instante intermedio entre los instantes t_0 y t_1 de la figura 4, en que las corrientes en ambas bobinas tienen la misma intensidad.

5. La figura 9 es un corte transversal del núcleo y devanados de un transformador de distribución del tipo acorazado, de 10 kVA, 2 400 : 240 V, 60 Hz. En la forma indicada se devanan cuatro bobinas exploradoras (señaladas en el esquema con I, II, III y IV), cada una de las cuales tiene el mismo número de espiras.

Teniendo en circuito abierto los devanados de 240 V y aplicando al de alta tensión P una tensión de 240 V, 60 Hz, se registraron los siguientes datos:

$$\begin{aligned} \text{Corriente de excitación} &= 0,0104 \text{ A} \\ V_I &= 16,2 \text{ V.} \\ V_I - V_{II} &= 4,03 \times 10^{-3}. \\ V_{II} - V_{III} &= 0,08 \times 10^{-3}. \\ V_{III} - V_{IV} &= 8,06 \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

Hallar un valor aproximado de la inductancia de fuga del devanado de alta tensión del transformador respecto al devanado de baja. Anótese y discútanse las hipótesis y aproximaciones necesarias para llegar a una solución.

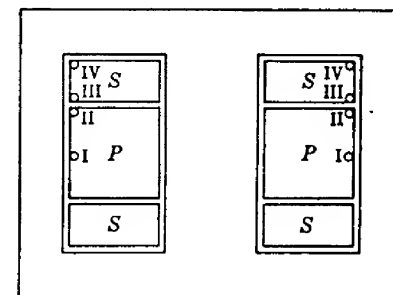


FIG. 9. Sección transversal de un transformador con bobinas exploradoras. Problema 5.

6. Los devanados primarios y secundarios de un transformador con núcleo de hierro de razón 1 : 1 consisten en un par de hilos arrollados uno junto a otro en la forma indicada en la figura 10. A los terminales de los primarios P_1 y P_2 se aplica la tensión de funcionamiento con los secundarios en circuito abierto, y se mide la corriente del primario.

a) Si P_1 está conectado a P'_1 y se mide la tensión entre P_2 y P'_2 con un voltímetro de gran resistencia, ¿qué constante del transformador puede calcularse? ¿Es necesario conocer la forma de onda y la intensidad eficaz de la corriente?

b) Si se conecta P'_1 a S'_1 y se mide la tensión entre P'_2 y S'_2 con un voltímetro de gran resistencia, ¿qué constante del transformador puede calcularse? ¿Es necesario conocer la forma de onda y la intensidad eficaz de la corriente?

7. Se conectan en paralelo primario y secundario de un transformador con núcleo de hierro de razón 1 : 1, intercalando amperímetros que midan las intensidades de las corrientes de primario y secundario. Si se desprecian las resistencias de primario y se-

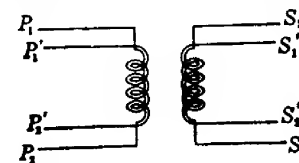


FIG. 10. Devanados de un transformador con bobinas exploradoras, Problema 6.

cundario, ¿qué información podremos determinar referente a las constantes del transformador? ¿Aumentaría la precisión del cálculo si se conocieran las formas de onda de las corrientes? Considérese que a) se conectan en paralelo los terminales de igual polaridad, o b) los de polaridad opuesta.

Inductancias de fuga

En el capítulo XII se han estudiado los principales factores de la teoría del transformador, y se ha visto la importancia que tienen las fugas magnéticas, que las inductancias de fuga son casi constantes y que la no linealidad del núcleo de hierro sólo afecta a la forma de onda de la corriente de excitación. Como ésta suele ser débil, frecuentemente se podrá despreciar aquella no linealidad, con lo que la corriente de excitación correspondiente a un flujo sinusoidal puede considerarse a menudo como una onda sinusoidal equivalente. En tal caso podrán utilizarse métodos vectoriales de cálculo.

El presente capítulo desarrolla estos principios generales en una teoría cuantitativa que puede representarse mediante diagramas vectoriales y circuitos equivalentes y que muchas veces se puede simplificar. Se indican ensayos con los que pueden medirse las constantes requeridas por la teoría general y se da una ilustración del cálculo de estas constantes.

1. DIAGRAMAS VECTORIALES Y UN CIRCUITO EQUIVALENTE

Consideremos un transformador con núcleo de hierro que suministre potencia a una carga, tal como el indicado en la figura 1. En muchas aplicaciones de los transformadores en sistemas de comunicaciones se encontrará este circuito. Supongamos

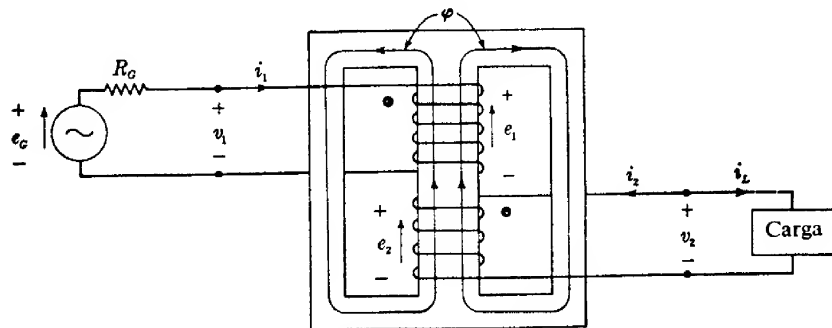


FIG. 1. Circuito en el que una carga está conectada a un generador por mediación de un transformador

que la fuerza electromotriz e_G del generador varíe sinusoidalmente, que el generador tenga una resistencia interna R_G constante, y que la carga tenga características lineales. Salvo por lo que se refiere a los efectos de los armónicos de la corriente de excitación, el circuito en conjunto tiene características lineales. Según se vio en el apartado 5 del capítulo VI, los armónicos de la corriente de excitación originan caídas de tensión armónicas en la impedancia interna del generador y en la resis-

tencia e inductancia de fuga del primario del transformador. Luego, los armónicos hacen que las formas de onda de las tensiones inducidas en el transformador sean diferentes de la forma de onda sinusoidal de la fuerza electromotriz del generador. Si son grandes los armónicos de la corriente de excitación y las impedancias del circuito de primario, la distorsión adquiriría importancia en los circuitos de comunicaciones, por lo que suele evitarse esta condición. En los circuitos de potencia, la corriente de excitación y la impedancia del circuito de primario suelen ser tan insignificantes que las caídas de tensión armónicas son despreciables y las formas de onda de las tensiones suelen ser casi sinusoidales. A causa de su complejidad, resulta prácticamente imposible una solución precisa que tenga en cuenta los armónicos de la corriente de excitación, por lo que suele suponerse que la corriente de excitación es una onda sinusoidal equivalente en todos los problemas salvo en los relacionados directamente con los efectos de los armónicos. En tal caso, puede tratarse el circuito en conjunto mediante métodos vectoriales sencillos.

Cuando se supone que corrientes y tensiones varían sinusoidalmente, las ecuaciones de las tensiones de primario y secundario (ecs. 28 y 29, cap. XII) pueden escribirse en forma vectorial de la manera siguiente:

$$V_1 = (R_1 + jX_{l1})I_1 + E_1 \quad \blacktriangleright(1)$$

$$V_2 = (R_2 + jX_{l2})I_2 + E_2, \quad \blacktriangleright(2)$$

donde,

V_1 y V_2 son los vectores que representan las tensiones entre terminales,

E_1 y E_2 son los vectores que representan las tensiones inducidas por el flujo mutuo resultante,

I_1 e I_2 son los vectores que representan las corrientes,

R_1 y R_2 son las resistencias efectivas de los devanados,

X_{l1} y X_{l2} son las reactancias de fuga; es decir,

$$X_{l1} \equiv \omega L_{l1} \quad \blacktriangleright(3)$$

$$X_{l2} \equiv \omega L_{l2}, \quad \blacktriangleright(4)$$

siendo L_{l1} y L_{l2} las inductancias de fuga.

Los sentidos positivos de las corrientes y tensiones de las ecuaciones 1 y 2 están indicados en la figura 1. Los sentidos positivos de i_1 e i_2 son el del tornillo directo respecto a un sentido del flujo tomado como positivo, y las tensiones son todas caídas de potencial y se toman en el mismo sentido. Puede decirse, también, que las tensiones inducidas e_1 y e_2 son fuerzas electromotrices, o elevaciones de potencial, en el sentido de un tornillo inverso respecto al flujo positivo. La ventaja de tomar los sentidos positivos para las corrientes y tensiones en ambos devanados en el mismo sentido respecto al flujo es que los signos algebraicos en ambas ecuaciones de las tensiones son los mismos, como se ve en las ecuaciones (1) y (2). Estas ecuaciones de las tensiones se aplican al transformador independientemente del sentido de circulación de la potencia —es decir, independientemente de que actúe como primario el devanado 1 ó el 2.

Un problema que surge frecuentemente en el análisis de sistemas de potencia es el de determinar la tensión que hay que aplicar al primario para mantener entre

los terminales del secundario una tensión prefijada, conociéndose la carga del secundario y el factor de potencia. El análisis de este problema constituye una ilustración conveniente de las relaciones vectoriales expresadas por las ecuaciones (1) y (2). Por tanto, en el estudio que sigue, supondremos conocidos la tensión entre los terminales del secundario, la corriente que por él circula y el factor de potencia de la carga; y habrá que determinar la tensión entre los terminales del primario, la intensidad de la corriente que ha de circular por él y el factor de potencia del primario, correspondientes a estas condiciones específicas del lado del secundario. También se suponen conocidas las resistencias, reactancias de fuga y la razón de los números de espiras, y que se dispone de datos que den las pérdidas en el núcleo y la corriente de excitación en función de la tensión inducida. A continuación se estudia la determinación de las resistencias y de las reactancias de fuga y las características de pérdida en el núcleo y de corriente de excitación pueden determinarse mediante un ensayo en vacío con tensión variable, como el del apartado 8 de este capítulo, o a partir de cálculos como en el apartado 12 del capítulo VI. Los diagramas vectoriales que ilustran las relaciones expresadas en las ecuaciones (1) y (2) pueden construirse de la manera siguiente:

Como el secundario está entregando potencia a la carga, la corriente en ésta tendrá el sentido de la caída de potencial a través de la carga durante la mayor parte de cada hemiclo. Si el sentido positivo de la tensión de secundario v_2 es el indicado en la figura 1, el sentido positivo de la corriente entregada a la carga en el sentido de la caída de potencial a través de ella es el de i_L de la figura 1. Así, si v_2 e i_L son los vectores representativos de v_2 e i_L , su relación de fase es el ángulo que determina el factor de potencia de la carga. Si se toma V_2 como vector de referencia, I_L será de la forma indicada vectorialmente en la figura 2a, el cual se ha trazado a partir de una carga inductiva de factor de potencia $\cos \theta_L$. Obsérvese que, en la figura 1, i_L es igual y opuesta a i_2 . Luego, vectorialmente, I_2 será opuesto a I_L , según se ve en la figura 2a. Obsérvese que I_L representa la corriente en el devanado secundario en el sentido del tornillo inverso respecto al flujo positivo, y que E_2 representa la fuerza electromotriz del secundario (subida de potencial) en el mismo sentido. Al escribir las ecuaciones fundamentales del transformador conviene suponer que las corrientes de primario y secundario son ambas positivas en el sentido del tornillo directo respecto al flujo positivo, como I_1 e I_2 en las ecuaciones (1) y (2). Sin embargo, en el análisis de problemas en los cuales se conoce definitivamente el sentido de circulación de la potencia, puede ser más conveniente tratar con la corriente I_L del secundario (o sea $-I_2$), creada por la fuerza electromotriz (de sentido del tornillo inverso) del secundario E_2 , puesto que I_L es la corriente suministrada a la carga en el sentido de la fuerza electromotriz E_2 que la crea.

Según la ecuación (2),

$$E_2 = V_2 - I_2(R_2 + jX_{l2}) \quad (5)$$

o, en función de la intensidad I_L de la corriente suministrada a la carga,

$$E_2 = V_2 + I_L(R_2 + jX_{l2}). \quad (6)$$

Es decir, la fuerza electromotriz E_2 es la suma vectorial de la tensión entre terminales más la caída de tensión debida a la impedancia interna y a la corriente creada

por la fuerza electromotriz, igual que en un generador. En la figura 2a se ha representado vectorialmente la ecuación 6 mediante los vectores V_2 , $I_L R_2$ en fase con I_L , $jI_L X_{l2}$ adelantado 90° respecto a I_L , y su suma vectorial E_2 .

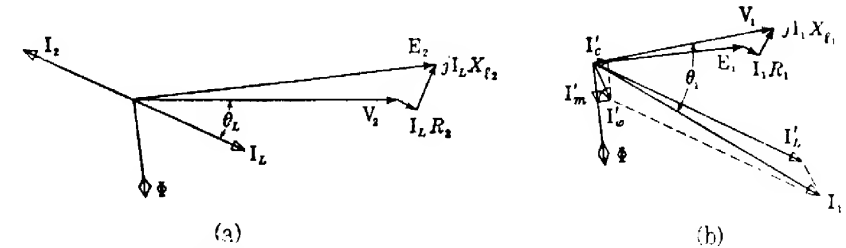


Fig. 2. Diagramas vectoriales para un transformador cuya razón de los números de espiras N_1/N_2 es igual a $1/2$. En (a) se han representado las tensiones y corrientes del secundario, y en (b), las del primario.

Las tensiones E_1 y E_2 están inducidas por el flujo mutuo resultante, y sus valores eficaces están relacionados con el valor máximo de este flujo en la forma indicada por la ecuación 18 del capítulo VI. Los valores de E_1 y E_2 son proporcionales a los números de espiras de los devanados, y cuando los sentidos positivos de estas tensiones inducidas representan ambos fuerzas electromotrices dirigidas en el sentido de avance de un tornillo inverso respecto al sentido del flujo, como ocurre aquí, están en concordancia de fase y adelantan al flujo en 90° , como en la figura 8 del capítulo VI. En consecuencia, el flujo mutuo resultante está retrasado en 90° respecto a las tensiones inducidas, según indica el vector Φ de la figura 2.

Según se vio en el apartado 4 del capítulo XII, la corriente del primario puede considerarse como suma de la componente de carga que contrarresta la fuerza magnetomotriz del secundario, más una componente de excitación que crea el flujo mutuo resultante requerido. La intensidad de la componente de carga de la corriente del primario y la de la corriente del secundario son inversamente proporcionales a los números de espiras de primario y secundario, respectivamente, y la componente de carga de la corriente del primario tiene sentido opuesto al de la corriente del secundario. Según se vio en el apartado 11 del capítulo VI, la corriente de excitación consta de una componente de pérdidas en el núcleo, en fase con la tensión inducida, y una componente magnetizante en fase con el flujo. Si se considera la corriente magnetizante como una onda sinusoidal equivalente, se podrá representar vectorialmente.

En la figura 2b pueden verse la corriente del primario y sus componentes, representadas vectorialmente. La componente de carga de la corriente del primario (sentido del tornillo directo) es I'_L , opuesta a la corriente del secundario I_2 (sentido del tornillo directo), o sea en fase con la corriente del secundario I_L (sentido del tornillo inverso). Como en la figura 2 la razón N_1/N_2 es igual a $\frac{1}{2}$, la intensidad de I'_L será el doble de la corriente del secundario. La componente de pérdidas en el núcleo de la corriente de excitación en I'_c en fase con la tensión inducida E_1 , y la corriente magnetizante es I'_m en fase con el flujo Φ . La corriente de excitación es I'_ϕ , y la corriente del primario I_1 es la suma vectorial de la corriente de excitación I'_ϕ y la componente de carga I'_L .

Según la ecuación (1), la tensión V_1 entre los terminales del primario es la suma vectorial de la fuerza contraelectromotriz E_1 inducida por el flujo mutuo resultante y la caída de tensión en la impedancia de fuga del primario $I_1(R_1 + jX_{1l})$, según se indica en la figura 2b. El factor de potencia del primario $\cos \theta_1$. Así, pues, a partir de las ecuaciones (1) y (2) y de las características de excitación podrá determinarse el funcionamiento completo del transformador. Cuando se considera la corriente de excitación como una onda sinusoidal equivalente, estas relaciones pueden representarse por los diagramas vectoriales de la figura 2.

En la figura 2, las tensiones V_1 y V_2 presentan una pequeña diferencia de fase debida a los efectos de las caídas de tensión en las impedancias de fuga, como también las corrientes I_1 e I_L a causa de los efectos de la corriente de excitación. Sin embargo, en estos diagramas vectoriales se han exagerado las caídas de tensión en las resistencias y en las impedancias de fuga. En un transformador para sistema de potencia que funcione a su carga normal, las caídas óhmicas son inferiores al 1 % de la tensión de funcionamiento, las caídas en las reactancias de fuga suelen ser del 2-4 % de la tensión de funcionamiento, y la corriente de excitación del 4-8 % de la intensidad de la corriente de funcionamiento normal. Por tanto, las tensiones V_1 y V_2 entre los terminales de primario y secundario suelen estar casi en fase, al igual que la corriente I_1 (tornillo directo) del primario con la I_L (tornillo inverso) del secundario. Durante la mayor parte de cada hemicycle, pues, los terminales marcados en la figura 1 con un punto de primario y secundario tendrán la misma polaridad relativa y, durante la mayor parte del tiempo en que la corriente penetra por el terminal del primario marcado con punto, la corriente está saliendo simultáneamente por el terminal con punto del secundario y penetrando en la carga por el terminal correspondiente.

Según se vio en el apartado 5 del capítulo XII, las características eléctricas de un transformador pueden representarse por el circuito equivalente de la figura 6 del capítulo XII. Cuando se supone sinusoidales las tensiones y corrientes, este circuito equivalente se convierte en el de la figura 3, en el cual se representan las características de excitación del transformador por la combinación paralelo de una resistencia y una reactancia, como en la primera alternativa del apartado 6 del capítulo XII. A veces también se utiliza una combinación serie. Para variaciones pequeñas de la tensión inducida y de la frecuencia, se adoptan a menudo para las constantes de la rama de excitación las hipótesis simplificadoras estudiadas en el apartado 13 del capítulo VI, que constituyen la segunda alternativa del apartado 6 del capítulo XII.

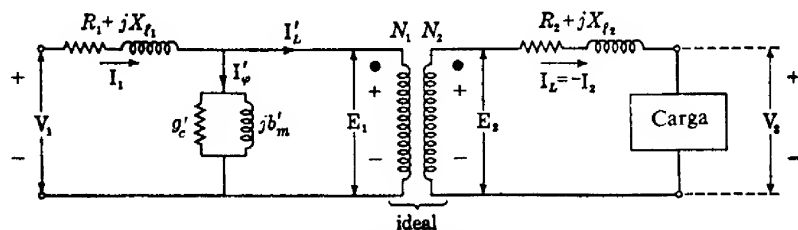


Fig. 3. Circuito equivalente cuando se supone para la corriente de excitación una onda sinusoidal equivalente.

Ya se ve que las relaciones fundamentales representadas por las ecuaciones (1), (2), (5) y (6), y los diagramas vectoriales de la figura 2 son aplicables al circuito equivalente de la figura 3. Una ventaja de los diagramas vectoriales y los circuitos equivalentes es que ponen de manifiesto, probablemente en forma más clara que las mismas ecuaciones, las relaciones entre intensidades y tensiones expresadas en las ecuaciones fundamentales.

2. TRANSFORMADOR CON IGUAL NÚMERO DE ESPIRAS EN PRIMARIO Y EN SECUNDARIO

Cuando primario y secundario tienen igual número de espiras, las tensiones E_1 y E_2 inducidas por el flujo mutuo resultante son iguales y la componente de carga I_L' de la corriente del primario (tornillo directo) es igual a la corriente I_L del secundario (tornillo inverso). Convendrá, pues, combinar los diagramas vectoriales de la figura 2, como en la figura 4a, en la que E es la fuerza electromotriz (tornillo inverso) inducida en uno y otro devanado por el flujo mutuo resultante e I_L es la corriente de carga (tornillo inverso), igual a la componente de carga de la corriente del primario (tornillo directo). En la figura 4a se ve que la fuerza electromotriz E (tornillo inverso) inducida en el secundario es el suma vectorial de la tensión entre los termina-

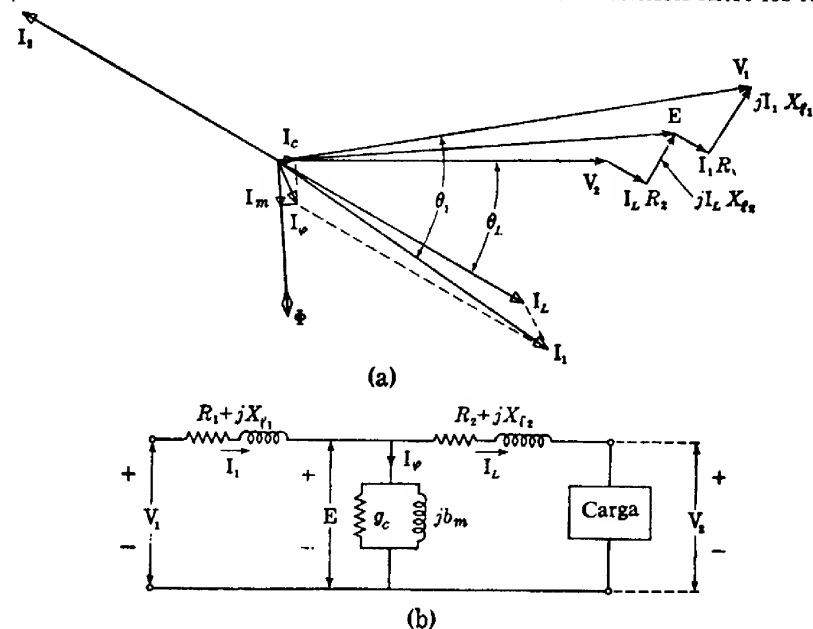


Fig. 4. Diagrama vectorial y circuito equivalente para un transformador con igual número de espiras en primario y secundario.

les del secundario más la caída de tensión en la impedancia de fuga debida a la corriente I_L del secundario (tornillo inverso). La corriente de excitación I_0 es la suma vectorial de la componente de pérdida en el núcleo I_c en fase con la tensión inducida E y la componente magnetizante I_m en fase con el flujo mutuo resultante Φ . La corriente

del primario I_1 es la suma vectorial de la componente de carga, que es igual a la corriente del secundario I_L , más la componente de excitación I_ϕ . La tensión entre terminales del primario es la suma vectorial de la fuerza contraelectromotriz inducida E más la caída de tensión en la impedancia de fuga debida a la corriente del primario.

Cuando primario y secundario tienen igual número de espiras, puede suprimirse, en el circuito equivalente de la figura 3, el transformador ideal, como se hace en la figura 4b. Basándonos en las hipótesis del capítulo XII, este circuito tiene las mismas características eléctricas que el transformador real. En realidad, este circuito equivalente puede emplearse para reemplazar al transformador real en el circuito del cual forme parte, con tal que una conexión entre un terminal del primario y el terminal del secundario de igual polaridad relativa no altere las condiciones del circuito.

3. RAZÓN DE TRANSFORMACIÓN

El cociente entre las tensiones en terminales de un transformador ideal es exactamente igual al cociente entre los números de espiras. Sin embargo, en un transformador real, el cociente de las tensiones entre terminales puede ser superior o inferior en un pequeño tanto por ciento al cociente entre los números de espiras a causa de las caídas de tensión en las impedancias de fuga de los devanados. Como estas caídas de tensión dependen de la magnitud y factor de potencia de la carga, el cociente de las tensiones entre terminales no será una constante característica del transformador sólo, ya que depende de la carga. Por esta razón, conviene definir la *razón de transformación como el cociente entre los números de espiras*, en lugar de como cociente de las tensiones entre terminales, ya que el cociente entre los números de espiras es una constante definida fijada solamente por el transformador. Ya puede verse que el cociente entre los números de espiras es una cantidad importante en la teoría de los transformadores. El cociente entre los números de espiras es también igual al cociente entre las tensiones inducidas por el flujo mutuo resultante. Es decir, si es a la razón de transformación, o cociente entre los números de espiras, se tiene

$$a \equiv \frac{N_1}{N_2} = \frac{E_1}{E_2} \quad \blacktriangleright (7)$$

La razón de transformación es sólo aproximadamente igual al cociente de las tensiones entre terminales. La razón de las tensiones que figuran en la placa indicadora de los transformadores para sistemas de potencia es el cociente a entre números de espiras y puede diferir en un pequeño tanto por ciento del cociente de las tensiones entre terminales, cuando el transformador está bajo carga.

Como en vacío es muy pequeña la caída de tensión en la impedancia de fuga del primario debida a la corriente de excitación, el cociente de las tensiones entre terminales en vacío es muy aproximadamente igual a la razón de transformación, por lo que ésta podrá determinarse con buena aproximación midiendo en vacío las tensiones entre los terminales de primario y secundario. En los ensayos de transformadores muy pequeños, es esencial que la corriente que circule por el voltímetro

que mide la tensión del secundario sea lo suficientemente débil para que las caídas de tensión en la impedancia de fuga debidas a ella sean despreciables. En el apartado 3b del capítulo XVII se estudian otros métodos aproximados para medir la razón de transformación.

4. TRANSFORMADOR EQUIVALENTE DE RAZÓN UNO ES A UNO

En un transformador que tenga el mismo número de espiras en primario que en secundario, las tensiones inducidas E_1 y E_2 en uno y otro devanado son iguales y la componente de carga I_L' de la corriente del primario (tornillo directo) es igual a la corriente de secundario I_L (tornillo inverso). Estos hechos hacen conveniente combinar los diagramas vectoriales de primario y secundario y permiten, también, la supresión en el circuito equivalente del transformador ideal hipotético, tal como se ha hecho en la figura 4. Empleando los siguientes artificios, pueden realizarse las mismas simplificaciones en la teoría del transformador cuya razón es distinta de la unidad.

Consideremos el problema estudiado en el apartado 1, en el que se dan las condiciones de la carga del secundario. En tal caso, puede trazarse el diagrama vectorial del secundario como se hizo en el apartado 1, figura 2a, lo que se indica con los vectores V_2 , I_L , $I_L R_2$, $jI_L X_{22}$, E_2 y Φ en la figura 5a. Como la fuerza magnetomotriz $N_1 I_L'$ de la componente de carga I_L' de la corriente del primario (tornillo directo)

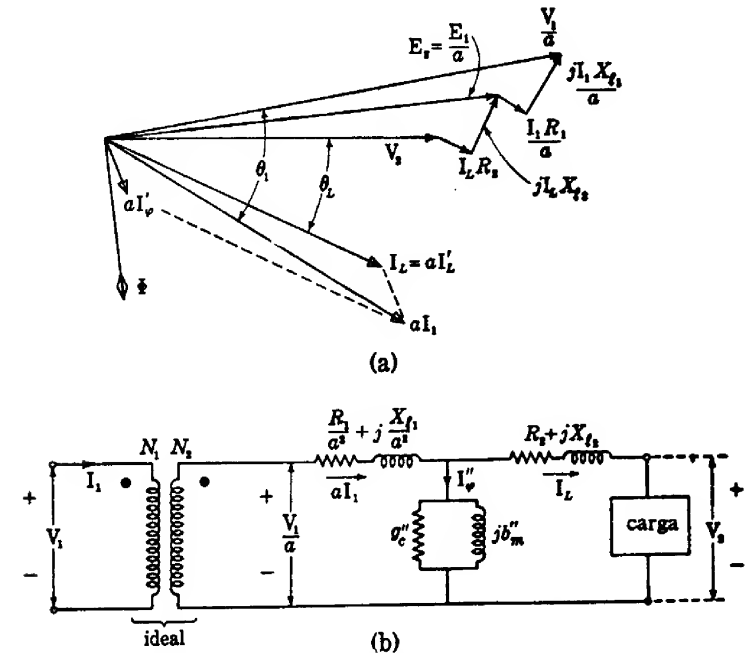


FIG. 5. Diagrama vectorial y circuito equivalente referido al secundario. La razón de transformación N_1/N_2 se representa por a .

equilibra a la fuerza magnetomotriz $N_2 I_L$ de la corriente del secundario I_L , la relación entre dichas corrientes es:

$$I_L = \frac{N_1}{N_2} I'_L = a I'_L. \quad \blacktriangleright (8)$$

Luego, el vector I_L representa tanto a la corriente del secundario como a la componente de carga de la corriente del primario multiplicada por la razón de transformación, o sea $a I'_L$. Si también se multiplica por la razón de transformación a la componente de excitación de la corriente del primario y se suma vectorialmente con $a I'_L$, el resultado es la corriente del primario multiplicada por la razón de transformación, y está indicada por el vector $a I_1$ en la figura 5a. La corriente del primario multiplicada por la razón de transformación a recibe el nombre de *corriente del primario referida al secundario*.

La relación entre las tensiones inducidas en primario y secundario es:

$$E_2 = \frac{N_2}{N_1} E_1 = \frac{E_1}{a}. \quad \blacktriangleright (9)$$

Así, pues, el vector E_2 representa tanto a la fuerza electromotriz del secundario (tornillo inverso), como a la fuerza contraelectromotriz del primario dividida por la razón de transformación, o sea E_1/a . Si se divide también por a la caída de tensión en la impedancia de fuga del primario y se suma vectorialmente con E_1/a , el resultado es la tensión entre los terminales del primario dividida por la razón de transformación y está representada por el vector V_1/a en la figura 5a. Este vector es, pues, proporcional a la tensión entre terminales del primario. Esta, dividida por la razón de transformación a , recibe el nombre de *tensión entre los terminales del primario referida al secundario*.

La caída de tensión en la impedancia de fuga del primario dividida por la razón de transformación a es la *caída de en la impedancia de fuga del primario referida al secundario*, y es igual a:

$$\frac{I_1(R_1 + jX_{11})}{a} = a I_1 \left(\frac{R_1 + jX_{11}}{a^2} \right), \quad (10)$$

donde $a I_1$ es la corriente del primario referida al secundario. La impedancia $\frac{R_1 + jX_{11}}{a^2}$ recibe el nombre de *impedancia de fuga del primario referida al secundario*, donde R_1/a^2 es la *resistencia del primario referida al secundario* y X_{11}/a^2 es la *reactancia de fuga del primario referida al secundario*. Así, pues el diagrama vectorial para las tensiones del primario de la figura 5a representa a la ecuación 1 dividida por la razón N_1/N_2 .

Referir al secundario las tensiones, corrientes e impedancias del primario, como se acaba de hacer, puede parecer simplemente una manipulación matemática equivalente a un cambio de escala que permita representar sobre un mismo diagrama las cantidades de primario y secundario, como en la figura 5a. Sin embargo, las tensiones, corrientes e impedancias del primario referidas al secundario tienen también significados físicos definidos, cuyo conocimiento facilita el recordar las relaciones entre las verdaderas tensiones, intensidades e impedancias del primario con los valores correspondientes referidos al secundario.

La corriente del primario referida al secundario es la corriente en un primario equivalente que tiene el mismo número de espiras N_2 del secundario y que produce el mismo efecto magnético que la verdadera corriente del primario I_1 circulando por las N_1 espiras del primario real. Por ejemplo, si el primario tuviera doble número de espiras que el secundario, el primario equivalente de N_2 espiras tendrá la mitad de espiras que el real y para producir el mismo efecto magnético deberá circular por él una corriente de intensidad doble. La corriente del primario y sus componentes de excitación y carga referidas al secundario tendrán, pues, intensidades doble de las de la corriente verdadera del primario y sus componentes. Corrientemente se supone que una fuerza magnetomotriz dada en el primario o en el secundario produce el mismo efecto magnético independientemente de las diferentes disposiciones de los devanados sobre el núcleo. Con esta hipótesis, la componente de carga de la corriente del primario (tornillo directo) referida al secundario, es igual a la intensidad I_L de la corriente del secundario (tornillo inverso), y la corriente de excitación referida al secundario es la corriente de excitación que circula por un devanado de N_2 espiras y es, por tanto, la corriente de excitación medida desde el lado del secundario a una tensión inducida E_2 .

Análogamente, la tensión inducida en el primario referida al secundario es la tensión inducida en un primario equivalente de igual número de espiras que el secundario, y por tanto es igual a la tensión inducida en el secundario E_2 .

La resistencia y reactancia de fuga del primario referidas al secundario, también tienen significado físico definido; así, si el primario de N_2 espiras equivalente magnéticamente ocupa exactamente el mismo espacio que el primario real de N_1 espiras, la impedancia de fuga del devanado equivalente de N_2 espiras es igual a la impedancia de fuga del primario referida al secundario. Por ejemplo, supongamos que el primario real tenga doble número de espiras que el secundario, es decir, a es igual a 2. El devanado equivalente que tiene igual número de espiras que el secundario tendrá la mitad del número de espiras del primario real. Para la misma distribución geométrica, el devanado equivalente tendrá la mitad de longitud de cobre, pero cada conductor tendrá una sección recta doble. Suponemos que los factores de espacio del primario real y del devanado equivalente son iguales. Como la resistencia es proporcional a la longitud e inversamente proporcional a la sección del conductor, la resistencia del conductor equivalente es un cuarto de la del primario real, o sea R_1/a^2 , donde R_1 es la resistencia del primario real. Pero, por definición, R/a es la resistencia del primario referida al secundario. Obsérvese que, puesto que la corriente del primario referida al secundario es $a I_1$, la pérdida en el cobre

$(a I_1)^2 \frac{R_1}{a^2}$ en el devanado equivalente es igual a la pérdida en el cobre $I_1^2 R_1$ en el

primario real. Además, si el primario equivalente tiene exactamente la misma disposición geométrica que el real, el campo magnético de fuga es el mismo para la misma fuerza magnetomotriz en el primario real de N_1 espiras y en su equivalente de N_2 espiras. Sin embargo, en el devanado equivalente de mitad del número de espiras este flujo abraza la mitad de espiras y por tanto, se precisa una intensidad de corriente doble para crearlo. Como la inductancia de fuga es el flujo de fuga por ampere, la inductancia de fuga de este devanado equivalente es un cuarto de la del devanado actual, o sea su reactancia de fuga es X_{11}/a^2 , donde X_{11} es la reactancia de fuga del primario real. Pero por definición X_{11}/a^2 es la reactancia de fuga

del primario referida al secundario. Obsérvese que la expresión de los volt-ampere reactivos en el campo de fuga del devanado equivalente es $(aI_1)^2 \frac{X_{l1}}{a^2}$ que es igual a los volt-ampere reactivos $I_1^2 X_{l1}$ en el campo de fuga del primario real.

► Así, pues, las corrientes, tensiones e impedancias del primario referidas al secundario, son las del primario de un transformador equivalente de razón 1 : 1 y de N_2 espiras cuyo primario tuviera exactamente el mismo factor de espacio y disposición geométrica que el primario del transformador real. ◀

Cuando se refieren al secundario las tensiones, corrientes e impedancias del primario, el circuito equivalente es el de la figura 5b, en el cual I'_ϕ es la corriente de excitación referida al lado del secundario y es igual a aI_ϕ , donde I_ϕ es la corriente de excitación del primario y a es la razón de transformación. La conductancia de pérdida en el núcleo g'_c y la susceptancia magnetizante b'_m son los valores referidos al lado del secundario. Como la admitancia es el recíproco de la impedancia, y como una impedancia del circuito del primario se refiere al secundario dividiéndola por a^2 , la admitancia de excitación del primario se referirá al secundario multiplicándola por a^2 . Es decir, si es $g'_c + jb'_m$ la admitancia de excitación del lado del primario, la admitancia de excitación referida al lado del secundario será:

$$g'_c + jb'_m = a^2 g_c + ja^2 b_m. \quad (11)$$

A menudo se suprime del circuito equivalente el transformador ideal hipotético. Las corrientes y tensiones en la parte del circuito equivalente que representa al primario son, en tal caso, dichas cantidades referidas al secundario.

Frecuentemente conviene referir al primario las corrientes, tensiones e impedancias del secundario. Ello puede hacerse utilizando los recíprocos de los factores de reducción utilizados para referir al secundario las cantidades del primario. Así, la ecuación de las tensiones para el secundario (ec. 6) podrá multiplicarse por la razón de transformación $N_1/N_2 = a$, dando,

$$aE_2 = aV_2 + a(R_2 + jX_{l2})I_L. \quad (12)$$

Los términos de la ecuación (12) reciben el nombre de *tensiones del secundario referidas al primario*. La caída de tensión en la impedancia de fuga del secundario referida al primario puede expresarse en la forma,

$$a(R_2 + jX_{l2})I_L = (a^2 R_2 + ja^2 X_{l2}) \frac{I_L}{a}, \quad (13)$$

donde $a^2 R_2$ y $a^2 X_{l2}$ son la *resistencia y reactancia de fuga del secundario referidas al primario* e I_L/a es la *corriente del secundario referida al primario*. La corriente, tensiones e impedancias del secundario referidas al primario son las que habría en un secundario equivalente magnéticamente que tenga el mismo número de espiras que el primario y el mismo factor de espacio y disposición geométrica que el secundario.

En virtud de la ecuación (7), la tensión inducida en el secundario referida al primario, o sea aE_2 , es igual a la tensión inducida en el primario E_1 ; también, en

virtud de la ecuación (8), la corriente de secundario (tornillo inverso) referida al primario, o sea I_L/a , es igual a la componente de carga I'_L de la corriente del primario (tornillo directo). Por tanto, puede superponerse el diagrama vectorial para el primario a los vectores del secundario, según se hace en la figura 6a. Exceptuando el cambio de escala y el significado de los vectores, la figura 6a es igual que la 5a.

Cuando se refieren al primario la corriente, tensiones e impedancias del secundario, el circuito equivalente es el de la figura 6b. A menudo se suprime el transformador ideal; entonces, la corriente, tensiones e impedancias de la parte del circuito equivalente que representa al secundario son dichas cantidades referidas al primario. También puede referirse al primario la carga del secundario. Así, como

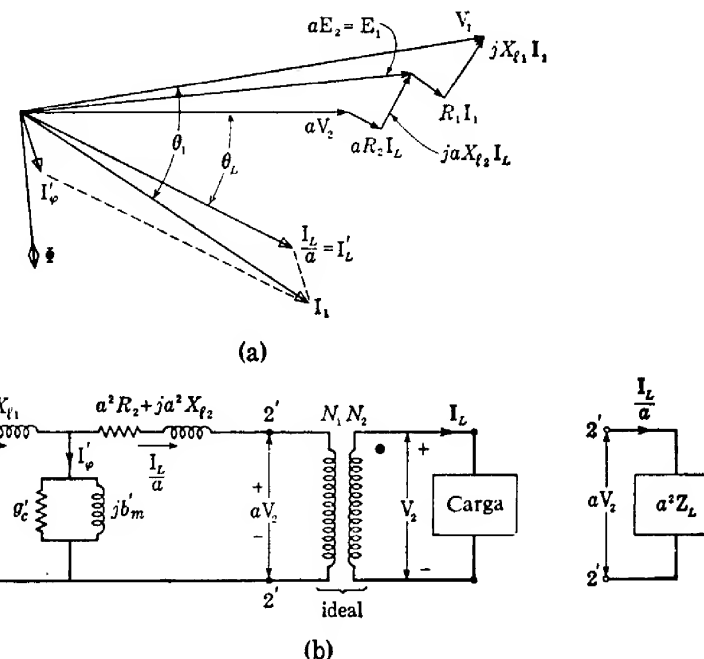


FIG. 6. Diagrama vectorial y circuito equivalente referido al primario

se vio en el apartado 2, del capítulo X, la combinación del transformador ideal y su carga del secundario de impedancia Z_L es equivalente a una carga de impedancia $a^2 Z_L$ conectada directamente a los terminales 2' que representan al secundario referido al primario. La impedancia $a^2 Z_L$ recibe el nombre de *impedancia de carga referida al primario*.

Se impone concluir este estudio recapitulando las hipótesis en las que se basan los diagramas vectoriales y los circuitos equivalentes de las figuras 5 y 6. Según se indicó en los apartados 3 y 4 del capítulo XII, estas hipótesis son:

1. Los efectos de las capacidades de los devanados son despreciables;
2. Las resistencias efectivas y las inductancias de fuga son constantes;

3. Las condiciones magnéticas en el núcleo están determinadas por la frecuencia y el flujo mutuo resultante, y por tanto, la pérdida en el núcleo y la corriente de excitación dependen de la frecuencia, magnitud y forma de onda de la tensión inducida en uno y otro devanado por el flujo mutuo resultante;

4. Una fuerza magnetomotriz dada en uno u otro devanado producen el mismo efecto magnético en el núcleo, independientemente de las disposiciones diferentes de los devanados primario y secundario;

5. También se supone en las figuras 5 y 6, que la corriente de excitación puede tratarse como una onda sinusoidal equivalente.

Basándose en estas hipótesis, las figuras 5 y 6 son representaciones «exactas» de la teoría. Esta teoría puede considerarse como una contribución al análisis exacto, mientras pueda desarrollarse sin complicaciones excesivas, y tiene una precisión más que suficiente para la resolución de la mayoría de los problemas prácticos, exceptuándose aquellos en que tengan importancia las capacidades de los devanados o la forma de onda de la corriente de excitación.

5. EJEMPLO ILUSTRATIVO DE LAS RELACIONES VECTORIALES «EXACTAS»

El secundario de un transformador de distribución de 100 kVA, 60 Hz, 12 000 : 2 400 V suministra su potencia aparente nominal con la tensión nominal de secundario, a una carga inductiva de factor de potencia 0,80. Determinar la tensión, corriente y factor de potencia del primario.

Las resistencias y reactancias de fuga de los devanados son

$$\begin{aligned} R_1 &= 7,0 \text{ ohm} & R_2 &= 0,30 \text{ ohm} \\ X_{l1} &= 19,0 \text{ ohm} & X_{l2} &= 0,75 \text{ ohm} \end{aligned}$$

Los resultados tabulados de un ensayo en circuito abierto, tomados del lado de baja tensión son:

Tensión aplicada, V	Corriente de excitación, A	Pérdida en el núcleo, W
2 400	1,50	940
2 500	1,67	1 020
2 600	1,87	1 110

Solución: Como los datos de excitación están dados en función del lado del secundario de baja tensión, convendrá referir al secundario las cantidades del primario.

$$\text{Razón de transformación } a = \frac{N_1}{N_2} = \frac{12\,000}{2\,400} = 5,00$$

Las constantes del primario referidas al secundario son:

$$\frac{R_1}{a^2} = \frac{7,5}{25,0} = 0,28 \text{ ohm} \quad (14)$$

$$\frac{X_{l1}}{a^2} = \frac{19,0}{25,0} = 0,76 \text{ ohm} \quad (15)$$

Obsérvese que la resistencia y reactancia de fuga del primario referidas al secundario son del mismo orden de magnitud que la resistencia y reactancia de fuga del secundario, como suele ocurrir casi siempre.

El diagrama vectorial es el de la figura 5a. A la potencia de salida nominal, la intensidad de la corriente de carga es:

$$I_L = \frac{100\,000}{2\,400} = 41,7 \text{ A.} \quad (16)$$

Si se toma como vector de referencia la tensión entre los terminales del secundario, la expresión vectorial de la corriente de carga es:

$$\begin{aligned} I_L &= 41,7 / \arccos 0,80, \text{ retrasada} = 41,7 / -36,9^\circ \text{ A} & (17) \\ &= 41,7 (0,80 - j0,60) & = 33,4 - j25,0 \text{ A} & (18) \end{aligned}$$

La caída óhmica en el secundario es

$$I_L R_2 = (33,4 - j25,0) 0,30 = 10,0 - j7,5 \text{ V} \quad (19)$$

La caída en la reactancia de fuga del secundario es:

$$j I_L X_{l2} = j(33,4 - j25,0) 0,75 = 18,8 + j25,0 \quad (20)$$

La tensión entre los terminales de secundario es

$$V_2 = 2\,400 + j0 \quad (21)$$

$$E_2 = \text{suma vectorial} = 2\,428,8 + j17,5 \text{ V} \quad (22)$$

$$= 2\,429 / 0,4^\circ \quad (23)^*$$

Los datos dan la resistencia y reactancia de fuga con dos cifras significativas y por tanto, en las ecuaciones 19 y 20 de las caídas de tensión, hay que redondear el resultado al volt. En lo que sigue se supondrá que la tensión V_2 entre terminales del secundario está redondeada también al volt. Las décimas de volt, se arrastran en todos los cálculos y al final se redondean los resultados al volt referidos al lado de baja tensión. Aun cuando en un circuito real, rara vez se conoce con la precisión de un volt en 2 400 la tensión entre los terminales del secundario, ni tampoco del primario, a efectos de cálculo mantendremos las cuatro cifras significativas ya que se usarán más adelante los resultados para compararlos con los del ejemplo del apartado 7. Además, a menudo es la *variación* de ten-

* El módulo de E_2 puede calcularse rápidamente y con precisión a partir de los dos primeros términos de la expresión binómica; así, si son A y B las partes real e imaginaria de la expresión compleja de E_2 , cuando $B \ll A$ el módulo de E_2 es:

$$E_2 = \sqrt{A^2 + B^2} \approx A + \frac{B^2}{2A} \quad (24)$$

cuando B vale 0,34, el error es inferior al 0,1 %.

sión incidente para cargar el transformador la que es más importante que los mismos valores reales de las tensiones entre terminales. Esta variación de tensión, expresada como fracción decimal o tanto por ciento de la tensión nominal, recibe el nombre de regulación de tensión y se estudia en el apartado 1 del capítulo XIV. La regulación de tensión suele ser de un uno o dos por ciento, por lo que si hay que calcular esta variación de tensión con dos cifras significativas, como lo permite la precisión de los datos de la impedancia de fuga, deberán suponerse cuatro cifras significativas en los valores de las tensiones entre terminales.

A continuación es necesario, para determinar la corriente de primario, determinar la corriente de excitación la cual se sumará después con la componente de carga de la corriente del primario. La corriente de excitación referida al secundario es igual a la corriente en vacío medida desde el lado de baja tensión para una condición de carga nula en la cual la tensión inducida en vacío es igual a 2 429 V que es el valor de la tensión inducida en el secundario bajo carga dado por la ecuación (23). Los datos del ensayo en circuito abierto indican que, en primera aproximación, esta corriente de excitación es de 1,5 A aproximadamente. Como la impedancia de fuga del devanado de baja tensión es, aproximadamente, de 0,8 ohm, la caída de tensión en la impedancia de fuga para esta condición de carga nula será de $1,5 \times 0,8 = 1,2$ V, y por tanto, es despreciable. Así, pues, la tensión inducida en vacío es casi exactamente igual a la tensión aplicada, y por tanto la corriente de excitación para una tensión inducida de 2 429 V bajo carga es igual a la corriente en vacío para una tensión aplicada casi igual — p. ej. 2 430 V. Por interpolación entre los datos en circuito abierto, a 2 430 V

$$I''_{\phi} = 1,55 \text{ A} \quad (25)$$

$$P_c = 963 \text{ W} \quad (26)$$

El factor de potencia en vacío es:

$$\frac{963}{2\,430 \times 1,55} = 0,256 \quad (27)$$

Es decir, la corriente de excitación está retrasada respecto a la tensión inducida en el era cos 0,256 o sea, 75,2°. Como E_2 se halla desfasada en + 0,4° (véase ec. 23), la expresión vectorial de la corriente de excitación es:

$$I''_{\phi} = aI'_{\phi} = 1,55 / -74,8^{\circ} = 0,41 - j1,50 \text{ A} \quad (28)$$

Pero la corriente de carga es, en virtud de la ecuación (18),

$$I_L = aI'_L = 33,4 - j25,0$$

La suma vectorial es:

$$aI_1 = 33,8 - j26,5 \text{ A} \quad (29)$$

$$= 43,0 / -38,1^{\circ} \quad (30)$$

Podemos ahora determinar la tensión entre los terminales del primario sumando las caídas de tensión en la resistencia y en la reactancia de fuga con la tensión inducida. Referidas al secundario, estas caídas de tensión son:

$$aI_1 \frac{R_1}{a^2} = (33,8 - j26,5)0,28 = 9,5 - j7,4 \text{ V.} \quad (31)$$

$$jaI_1 \frac{X_{11}}{a^2} = j(33,8 - j26,5)0,76 = 20,2 + j25,7 \quad (32)$$

y en virtud de la ecuación (22),

$$\frac{E_1}{a} = 2\,428,8 + j17,5 \quad (33)$$

$$\frac{V_1}{a} = \text{suma vectorial} = 2\,458,5 + j35,8 \text{ V.} \quad (34)$$

$$= 2\,459 / 0,8^{\circ} \quad (35)$$

Luego los resultados son:

$$I_1 = \frac{aI_1}{a} = \frac{43,0}{5,00} = 8,60 \text{ A.} \quad (36)$$

$$V_1 = a \frac{V_1}{a} = 5,00 \times 2\,459 = 12\,290 \text{ V.} \quad (37)$$

La corriente del primario está retrasada respecto a la tensión entre terminales del primario en

$$\theta_1 = 38,1^{\circ} + 0,8^{\circ} = 38,9^{\circ}.$$

Luego el factor de potencia del primario es:

$$\cos \theta_1 = 0,778, \text{ corriente retrasada} \quad (38)$$

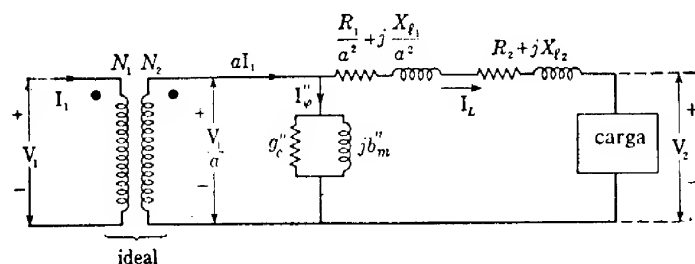
6. CIRCUITOS EQUIVALENTES SIMPLIFICADOS; IMPEDANCIA EQUIVALENTE

Como la corriente de excitación y las caídas de tensión en la impedancia de fuga suelen ser débiles, suele ser permisible realizar más aproximaciones simplificadoras. Las tensiones entre terminales no acostumbran a ser muy diferentes de las tensiones inducidas por el flujo mutuo resultante, y por tanto, el error cometido al tomar la corriente de excitación como de intensidad igual a la correspondiente a una u otra tensión entre terminales —los que más convenga— en lugar de a la «exacta» correspondiente a la tensión inducida, suele ser pequeño. Además, la caída de tensión en la impedancia de fuga debida a la corriente de excitación suele ser muy pequeña, por lo que suele ser despreciable el error cometido al calcular la caída de tensión en la impedancia de fuga, al suponer que las corrientes de primario y secundario son iguales al estar referidas a un mismo lado. En consecuencia, los circuitos equivalentes de las figuras 5b y 6b, se pueden a menudo simplificar quitando de su posición central la rama en paralelo, que representa la corriente de excitación en estos circuitos equivalentes «exactos», y conectándola en paralelo con el primario o el secundario, según convenga. Por ejemplo, si se altera el circuito equivalente «exacto» de la figura 5b, pasando la admitancia de excitación a la izquierda de la impedancia de fuga del primario, se obtiene el circuito de la figura 7a. El transformador queda entonces representado por un transformador ideal en combinación con una admitancia paralelo y una sola impedancia en serie. Evidentemente, la admitancia en paralelo y la impedancia en serie podrían trasladarse a la izquierda del transformador ideal refiriéndose previamente al primario.

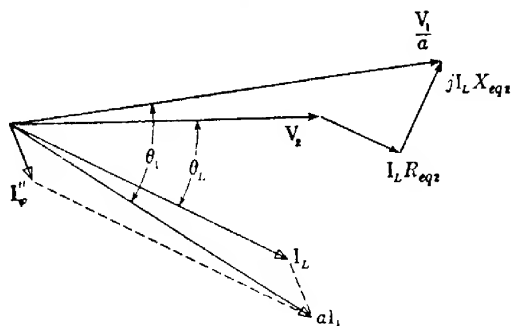
Aun cuando hemos deducido el circuito equivalente de la figura 7a como

aproximación simplificada del circuito equivalente «exacto» de la figura 5b, en realidad un circuito de la forma del de la figura 7a, pero con parámetros ligeramente diferentes, es un circuito equivalente «exacto» del transformador. Esto se verá brevemente en el apartado 8c de este capítulo y de nuevo en el apartado 5 del capítulo XVII.

La impedancia serie de la figura 7a, recibe el nombre de *impedancia equivalente* del transformador. La *resistencia equivalente*, es la suma de las resistencias efectivas de primario y secundario, ambas referidas a un mismo lado, y la *reactancia equivalente* es la suma de las reactancias de fuga de primario y secundario, ambas referidas al mismo lado. A la reactancia equivalente se le llama también *reactancia*



(a)



(b)

FIG. 7. Circuito equivalente simplificado y diagrama vectorial

de fuga total y a veces *reactancia de fuga del transformador* y debe distinguirse de las reactancias de fuga individuales X_{l1} y X_{l2} de cada uno de sus devanados respecto al otro. Así, pues, si es a la razón de transformación N_1/N_2 , la impedancia equivalente Z_{eq2} referida al secundario es:

$$Z_{eq2} \equiv R_{eq2} + jX_{eq2} \quad \blacktriangleright(39)$$

$$\equiv \frac{R_1}{a^2} + R_2 + j \left(\frac{X_{l1}}{a^2} + X_{l2} \right). \quad \blacktriangleright(40)$$

Análogamente, la impedancia equivalente Z_{eq1} referida al primario es:

$$Z_{eq1} \equiv R_{eq1} + jX_{eq1} \quad \blacktriangleright(41)$$

$$\equiv R_1 + a^2 R_2 + j(X_{l1} + a^2 X_{l2}). \quad \blacktriangleright(42)$$

Cuando se coloca la admitancia de excitación a la izquierda de la impedancia de fuga del primario, como en la figura 7a, la corriente que circula por la impedancia equivalente es la corriente del secundario, que es también igual a la componente de carga de la corriente del primario, cuando se refieren ambas corrientes al mismo lado y se toman sus sentidos positivos como sentidos de las corrientes que crearían fuerzas magnetomotrices opuestas. Las caídas de tensión en las impedancias de fuga de primario y secundario, podrán, pues, combinarse en la forma indicada en el diagrama vectorial de la figura 7b. Las caídas de tensión en la impedancia equivalente de la figura 7b, difieren ligeramente de la suma de las caídas de tensión en las impedancias de fuga de primario y secundario en el diagrama vectorial «exacto» de la figura 5a, pero solo a causa de que por la impedancia de fuga del primario de la figura 7a no circula la corriente de excitación; suprimiremos, pues, de la figura 7b la componente de la caída de tensión en la impedancia del primario, debida a la corriente de excitación. La corriente de excitación de la figura 7b se toma como corriente en vacío correspondiente a la tensión entre terminales del primario y por tanto, difiere ligeramente, tanto en fase como en intensidad, de la corriente de excitación del diagrama vectorial «exacto» de la figura 5a.

7. EJEMPLO ILUSTRATIVO DE LAS RELACIONES VECTORIALES SIMPLIFICADAS

A continuación calcularemos los resultados del ejemplo del apartado 5, utilizando el diagrama vectorial simplificado de la figura 7b.

Solución: De las ecuaciones (14) y (15) y de los datos tabulados en el apartado 5, la resistencia equivalente y la reactancia equivalente referidas al secundario son:

$$R_{eq2} = \frac{R_1}{a^2} + R_2 = 0,28 + 0,30 = 0,58 \text{ ohm} \quad (43)$$

$$X_{eq2} = \frac{X_{l1}}{a^2} + X_{l2} = 0,76 + 0,75 = 1,51 \text{ ohms.} \quad (44)$$

Tomando como vector de referencia el representativo de la tensión entre los terminales del secundario, la corriente del secundario vendrá dada, en virtud de las ecuaciones (17) y (18) por

$$I_L = 33,4 - j25,0 \text{ A} \quad (45)$$

La tensión entre terminales del primario referida al secundario se determina por cálculo de los vectores representativos de la caída de tensión en la resistencia equivalente y en la reactancia equivalente referidas al secundario, sumándolos al representativo de la tensión entre terminales del secundario; así

$$I_L R_{eq2} = (33,4 - j25,0) 0,58 = 19,4 - j14,5 \text{ V.} \quad (46)$$

$$j I_L X_{eq2} = j(33,4 - j25,0) 1,51 = 37,8 + j50,5 \quad (47)$$

$$\frac{V_2}{a} = \text{suma vectorial} = 2400,0 + j0 \quad (48)$$

$$\frac{V_1}{a} = \text{suma vectorial} = 2457,2 + j36,0 \text{ V.} \quad (49)$$

$$= 2458 / 0,8^\circ. \quad (50)$$

Compárese con el valor $V_1/a = 2\,459/0,8^\circ$ dado por la ecuación (35) en la solución «exacta». El error de la solución aproximada sólo es del 0,04 %. La tensión entre terminales del primario es:

$$V_1 = 5,00 \times 2\,458 = 12\,290 \text{ V} \quad (51)$$

Obsérvese que si sólo se pidiera la tensión del primario, no haría falta conocer la corriente de excitación. En muchos problemas, tales como aquellos en que interviene la regulación de tensión, las tensiones son importantes pero la importancia de la corriente real del primario es relativamente pequeña. En el análisis de estos problemas, los efectos de la corriente de excitación son despreciables y el transformador puede representarse muy simplemente por su impedancia equivalente en serie con un transformador ideal, como se indica en la quinta alternativa del apartado 6 del capítulo XII.

No obstante, si se desean valores precisos de la intensidad de la corriente y del factor de potencia del primario, deberá determinarse la intensidad de la corriente de excitación. Según el circuito equivalente de la figura 7a, la corriente de excitación se toma como corriente en vacío correspondiente a la tensión entre los terminales del primario. Luego la corriente de excitación referida al secundario es la corriente en vacío a 2 458 V (ec. 50). Interpolando entre los datos para circuito abierto consignados en el apartado 5,

$$I''_\phi = 1,60 \text{ A} \quad (52)$$

$$P_c = 987 \text{ W} \quad (53)$$

El factor de potencia en vacío es

$$\cos \theta_{nl} = \frac{987}{2\,458 \times 1,60} = 0,251 \quad (54)$$

Es decir, la corriente de excitación está retrasada respecto a la tensión aplicada en un ángulo θ_{nl} de $75,5^\circ$. Como el ángulo de V_1 es de $+0,8^\circ$, la expresión vectorial de I''_ϕ será

$$I''_\phi = 1,60 / -74,7^\circ = 0,42 - j 1,54 \text{ A} \quad (55)$$

Pero, de la ecuación 45,

$$aI'_L = I_L = 33,4 - j 25,0$$

$$aI_1 = \text{suma} = 33,8 - j 26,5 \text{ A} \quad (56)$$

$$= 43,0 / -38,1^\circ \quad (57)$$

Compárense las ecuaciones (55-57) con los resultados del análisis «exacto» (ecs. 28-30, apartado 5). Los resultados tienen tres cifras significativas coincidentes.

La corriente del primario está retrasada respecto a la tensión entre terminales del primario en

$$\theta_1 = 38,1 + 0,8 = 38,9^\circ$$

y por tanto, el factor de potencia del primario es:

$$\cos \theta_1 = 0,778, \text{ corriente retrasada.} \quad (58)$$

Este resultado es exactamente igual al de la ecuación (38) del apartado 5.

8. DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS MEDIANTE ENSAYOS

Mediante ensayos en circuito abierto y en cortocircuito, pueden determinarse las características de excitación y los parámetros de los circuitos equivalentes.

8a. *Ensayos en circuito abierto.* Cuando se halla en circuito abierto un devanado y se aplica al otro una tensión alterna, la tensión inducida en el devanado excitado es casi igual a la tensión aplicada y la corriente que circula por el devanado excitado es la corriente de excitación correspondiente, referida a dicho devanado. También suele ser despreciable la pérdida en el cobre debida a la corriente de excitación y por tanto, la potencia de entrada es casi igual a la pérdida en el núcleo, para el valor correspondiente de la tensión inducida.

En el caso de transformadores para comunicaciones, las medidas suelen hacerse mediante un puente adecuado. * Los transformadores para sistemas de potencia suelen ensayarse aplicando una tensión sinusoidal a uno u otro devanado —el que más convenga y midiendo la tensión aplicada, corriente de excitación y potencia de entrada con instrumentos ordinarios de corriente alterna. Si el devanado excitado es el primario y la corriente de excitación se supone equivalente a una corriente sinusoidal, en la forma indicada en el apartado 13 del capítulo VI, las conductancias y susceptancias que representan las características de excitación referidas al primario son

$$g_{oc1} = \frac{P}{V^2} \approx g'_c \quad \blacktriangleright (59)$$

$$b_{oc1} = - \left[\left(\frac{I_\phi}{V} \right)^2 - g_{oc1}^2 \right] \approx b'_m \quad \blacktriangleright (60)$$

donde

P , V e I_ϕ son las lecturas de los instrumentos, corregidas si fuera necesario para los efectos de las corrientes que circulan por los instrumentos,

g_{oc1} y b_{oc1} son la conductancia y la susceptancia aparente en circuito abierto, g'_c y b'_m son la conductancia y susceptancia de la admitancia de excitación referidas al primario.

El error resulta de calcular la conductancia de pérdida en el núcleo y la susceptancia magnetizante en la forma indicada por las ecuaciones (59) y (60) suele ser despreciable, ya que la potencia de entrada P es casi igual a la pérdida en el núcleo y la tensión aplicada V es casi igual a la tensión inducida.

Según se indicó en el apartado 3, puede determinarse un valor muy aproximado de la razón de transformación midiendo la tensión aplicada al devanado excitado y la del devanado en circuito abierto. Así, pues, la razón de transformación será, muy aproximadamente,

$$a \equiv \frac{N_1}{N_2} = \frac{E_1}{E_2} \approx \frac{V_1}{E_{oc2}} \quad \blacktriangleright (61)$$

* Para un ulterior estudio de las medidas de impedancia en transformadores para comunicaciones, véase el apartado 3 del capítulo XVII.

donde V_1 es la tensión aplicada al primario y E_{oc2} es la tensión del secundario en circuito abierto. En la ecuación (61) se desprecia la caída de tensión en la impedancia de fuga del primario debida a la corriente de excitación. Debido a esta caída de tensión, la tensión V_1 aplicada al primario es ligeramente mayor que la tensión inducida en el primario, y por tanto la razón V_1/E_{oc2} es muy poco mayor que la razón de transformación N_1/N_2 . Además, las tensiones complejas V_1 y E_{oc2} no están exactamente en concordancia de fase. Es decir, el cociente V_1/E_{oc2} es un número complejo de pequeño argumento.

8b. *Ensayos en cortocircuito.* Si se cortocircuita el secundario de un transformador, el circuito equivalente de la figura 6b se reduce al indicado en la figura 8a.

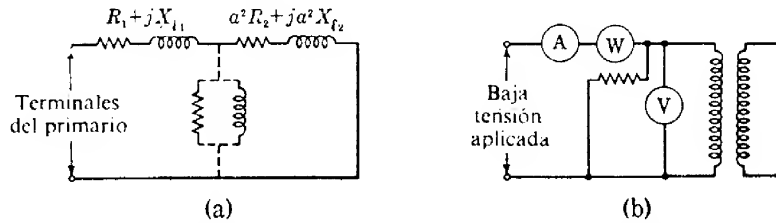


Fig. 8. Transformador cortocircuitado; a) circuito equivalente referido al primario y b) conexiones para el ensayo de la impedancia en cortocircuito

Si se desprecia la corriente de excitación, la figura 8a indica que la impedancia entre terminales del primario es igual a la impedancia equivalente del transformador referida al primario.

La impedancia en cortocircuito de un transformador para comunicaciones suele medirse mediante un puente adecuado. En el caso de transformadores para sistemas de potencia, suele hacerse el ensayo aplicando una baja tensión tal que cree en el devanado excitado una corriente de intensidad aproximadamente igual al valor nominal y midiendo la tensión, intensidad y potencia en la forma indicada en la figura 8b. Esta tensión aplicada recibe el nombre de *tensión de impedancia* y, cuando la corriente tiene la intensidad nominal, *tensión de impedancia a plena carga*. En los transformadores para sistemas de potencia, la tensión de impedancia a plena carga suele ser del 3 al 10 % de la tensión nominal del devanado excitado. Así, pues, el flujo en el núcleo durante el ensayo en cortocircuito será solamente un pequeño tanto por ciento de su valor para el funcionamiento a la tensión nominal. Sin embargo, a pesar de esto, por ser las reactancias de fuga prácticamente independientes de la saturación tienen valores esencialmente iguales para las condiciones de cortocircuito que de funcionamiento normal.

Si la corriente del primario tiene la intensidad nominal y la corriente de excitación es despreciable, la corriente del secundario tendrá también su intensidad nominal. Para crear esta corriente de secundario de intensidad nominal, la tensión inducida en el secundario debe ser igual a la caída de tensión en la impedancia de fuga del secundario. En un transformador ordinario para sistema de potencia esta tensión es aproximadamente el 3 % de la tensión nominal; es decir, el flujo en el núcleo es aproximadamente las tres centésimas partes de su valor en vacío con la tensión nominal. Si se desprecia la saturación magnética, la corriente de excitación en cortocircuito tendrá, por tanto, las tres centésimas de su intensidad nominal.

Como la corriente de excitación a la tensión nominal suele tener una intensidad aproximadamente igual al 5 % de la intensidad nominal, la componente de excitación de la corriente del primario cuando el secundario está cortocircuitado es solamente el $0,03 \times 5$, ó sea el 0,15 % de la intensidad de la corriente del primario y por tanto es completamente insignificante. Así, pues, la corriente que circula por la admitancia de excitación del circuito equivalente de la figura 8a, es despreciable; y por tanto la impedancia en cortocircuito es muy aproximadamente igual a la impedancia equivalente. Además, como las pérdidas en el núcleo varían aproximadamente como el cuadrado del flujo, la pérdida en el núcleo en cortocircuito tendrá, aproximadamente, un valor que será $(0,03)^2$, ó sea, 0,0009 de la pérdida en el núcleo a tensión normal. Como la pérdida en el núcleo a tensión normal suele ser menor que las pérdidas en el cobre combinadas de primario y secundario a una corriente de intensidad nominal, la pérdida en el núcleo en cortocircuito suele ser inferior a 0,0009 veces la pérdida en el cobre y por tanto es totalmente despreciable frente a la pérdida en el cobre. Luego, en cortocircuito, la potencia de entrada P es casi igual a la pérdida en la resistencia equivalente $I^2 R_{eq}$.

Si son V , I y P , las lecturas del voltímetro, amperímetro y wattímetro de la figura 8b, el valor de la impedancia en cortocircuito es:

$$Z_{sc} = \frac{V}{I} \approx Z_{eq} \quad \blacktriangleright (62)$$

$$R_{sc} = \frac{P}{I^2} \approx R_{eq} \quad \blacktriangleright (63)$$

$$X_{sc} = \sqrt{Z_{sc}^2 - R_{sc}^2} \approx X_{eq} \quad \blacktriangleright (64)$$

donde Z_{sc} , R_{sc} , X_{sc} son la impedancia, resistencia y reactancia en cortocircuito, y Z_{eq} , R_{eq} , X_{eq} son la impedancia, resistencia y reactancia equivalentes.

Evidentemente, cualquiera de los dos devanados puede servir de primario. La impedancia equivalente es su valor referido al devanado excitado. Si se desea, este valor puede referirse al otro devanado. Así, si Z_{eqX} es la impedancia equivalente referida al lado de baja tensión o medida desde él, la impedancia equivalente Z_{eqH} referida al lado de alta tensión es:

$$Z_{eqH} = a^2 Z_{eqX} \quad \blacktriangleright (65)$$

donde a es la razón de transformación N_H/N_X .

Como la caída de tensión en un transformador suele estar determinada con toda precisión a partir de su impedancia equivalente, rara vez será necesario conocer las impedancias de fuga reales de uno y otro devanado, salvo en el análisis de problemas que se refieran a los efectos de los armónicos. Los ensayos para medir por separado las impedancias de fuga de cada devanado son algo complicados¹. Cuando se necesita un valor aproximado, se supone a menudo que las impedancias de fuga de los

¹ Un estudio de estos ensayos puede verse en O. G. C. DAHL, *Electric Circuits, Theory and Applications*, Vol. I: *Short-Circuit Currents and Steady-State Theory* (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1928), capítulo II.

devanados son iguales al referirlas a un mismo lado. Así, si es a la razón de transformación N_1/N_2 ,

$$R_1 + jX_{l1} \approx a^2 R_2 + ja^2 X_{l2} \approx \frac{R_{eq1}}{2} + j \frac{X_{eq1}}{2} \quad (66)$$

o sea,

$$R_2 + jX_{l2} \approx \frac{R_1}{a^2} + j \frac{X_{l1}}{a^2} \approx \frac{R_{eq2}}{2} + j \frac{X_{eq2}}{2} \quad (67)$$

Alternativamente, se supone a veces que las resistencias efectivas y las reactivas de fuga se hallan en la misma razón que las resistencias a la corriente continua R_{cc1} y R_{cc2} de los devanados; es decir,

$$\frac{R_1}{R_2} \approx \frac{X_{l1}}{X_{l2}} \approx \frac{R_{cc1}}{R_{cc2}}; \quad (68)$$

de donde

$$R_1 + jX_{l1} \approx \frac{R_{cc1}}{R_{cc1} + a^2 R_{cc2}} (R_{eq1} + jX_{eq1}) \quad (69)$$

$$R_2 + jX_{l2} \approx \frac{R_{cc2}}{R_{cc1} + a^2 R_{cc2}} (R_{eq1} + jX_{eq1}). \quad (70)$$

8c. *Circuito equivalente «exacto» determinado a partir de ensayos.* Si se supone que la admitancia de excitación referida al lado del primario es igual a la admitancia en circuito abierto medida desde el primario (como en las ecs. 59 y 60), que la razón de transformación es igual al cociente de las tensiones en circuito abierto (como en la ec. 61) y que la impedancia equivalente referida al secundario es igual a la impedancia en cortocircuito medida desde el lado del secundario (como en las ecs. 62, 63 y 64), el circuito equivalente de la figura 7a se convierte en el de la figura 9a cuando se refiere al primario la admitancia de excitación de la figura 7a. Aun cuando este circuito se dedujo en el apartado 6 como simplificación aproximativa del circuito equivalente «exacto» de la figura 5b, el circuito de la figura 9a puede deducirse de una manera que pone de manifiesto que se trata de un circuito equivalente «exacto» del transformador.

Si se supone que la corriente de excitación puede tratarse como onda sinusoidal equivalente y que la admitancia de excitación es constante para pequeñas variaciones de tensión, el transformador se podrá considerar como elemento de circuito lineal, al cual puede aplicarse el teorema de Thévenin. Según este teorema, el transformador visto desde los terminales del secundario equivale a una fuerza electromotriz igual a la tensión del secundario en circuito abierto E_{oc2} en serie con la impedancia Z_{sc2} medida entre los terminales del secundario con los terminales del primario cortocircuitados. Si es V_1/E_{oc2} la razón de transformación del transformador ideal, su tensión entre los terminales del primario será igual a la tensión V_1 del transformador real. En el apartado 5 del capítulo XVII puede verse que si se conecta entre los terminales del primario del transformador ideal, la admitancia en circuito

abierto $g_{oc1} + jb_{oc1}$, el circuito de la figura 9a es «exactamente» equivalente al transformador tanto en el lado del primario como en el del secundario.

Claramente se ve que si se realizan en el lado del secundario las medidas en circuito abierto y en el del primario las medidas en cortocircuito, el circuito de la figura 9b es también un equivalente «exacto» del transformador.

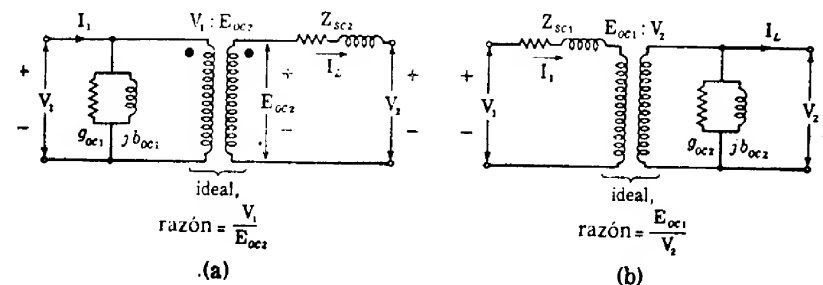


FIG. 9. Dos circuitos equivalentes «exactos»

Se llega así a la conclusión relativamente sorprendente de que la combinación de los efectos de un cierto número de aproximaciones dan un resultado «exacto».

El cociente V_1/E_{oc2} es un número complejo de argumento muy pequeño y por tanto, en rigor, el transformador ideal de la figura 9a debe considerarse que no sólo transforma los valores de tensiones e intensidades en forma inversa, sino que también introduce un ligero desfase entre las tensiones de secundario y primario y otro desfase igual y opuesto entre las intensidades de las corrientes de primario y secundario. No obstante, en los transformadores para sistemas de potencia, el desfase en circuito abierto es de pocas centésimas de grado, por lo que los circuitos equivalentes de la figura 9 son casi «exactos» si se toma la razón de transformación del transformador ideal como número real igual al módulo del cociente de tensiones en circuito abierto.

9. DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS A PARTIR DE LAS DIMENSIONES

La determinación de los parámetros a partir de las dimensiones y propiedades de los materiales constituye, evidentemente, una parte importantísima del trabajo del diseñador. Aun cuando una exposición detallada del método de diseño se sale del ámbito de este libro, el breve estudio que vamos a realizar a continuación servirá para ilustrar los métodos mediante los cuales se aplica la teoría fundamental al problema del diseñador de determinar las constantes del circuito del transformador. En el capítulo VI se describen con detalle las características de excitación, por lo que no será preciso ampliar aquí el estudio de su determinación. El resto de este apartado se dedica al estudio de la determinación de la impedancia equivalente.

Consideremos un transformador de razón de transformación 1 : 1 que suministre potencia a una carga, tal como se indica en la figura 10a, en la que pueden verse unidos un terminal del primario y uno del secundario, ambos de igual polaridad.

Si la corriente de excitación es débil, la corriente del primario I_1 será casi igual a la corriente directamente opuesta del secundario I_L . Si ambas corrientes fueran exactamente iguales, no se alterarían las condiciones en primario y secundario si se conectara el circuito en la forma indicada en la figura 10b. Así, pues, un trans-

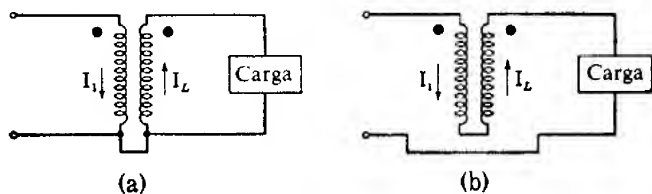


FIG. 10. Donde puede verse que la impedancia equivalente de un transformador de razón 1 : 1 es igual a su impedancia en serie como bobina con las fuerzas electromotrices de primario y secundario en oposición

formador de razón 1 : 1 equivale a una impedancia en serie si se desprecia la corriente de excitación. Del estudio del apartado 6 puede verse que esta impedancia en serie es la impedancia equivalente del transformador. Por tanto, el cálculo de la impedancia equivalente se reduce a determinar la resistencia y reactancia de un transformador equivalente de razón 1 : 1 conectado como bobina con sus fuerzas electromotrices de primario y secundario en oposición.

La resistencia en corriente continua de cada devanado puede calcularse a partir del número de espiras, la longitud media de una espira y la sección del conductor. En el caso de transformadores grandes o a frecuencias elevadas, las resistencias efectivas a la corriente alterna pueden ser considerablemente mayores que las resistencias a la corriente continua a causa del efecto cortical y de las pérdidas parásitas. El aumento de resistencia debido al efecto cortical puede reducirse utilizando conductores constituidos por hebras adecuadamente interpuestas. Las pérdidas parásitas debidas a las corrientes de Foucault creadas por el campo de fuga suelen calcularse por métodos empíricos. La resistencia equivalente es la suma de las resistencias efectivas de primario y secundario, ambas referidas a un mismo lado.

La reactancia equivalente se determina a partir del campo de fuga debido a corrientes iguales y opuestas en primario y secundario. En estas condiciones, el carácter general del campo magnético en un transformador del tipo de núcleo con devanados cilíndricos coaxiales es el indicado en la figura 5c del capítulo XII. Este tipo de transformador constituye un ejemplo sencillo del método de resolución del problema del cálculo de la reactancia equivalente, e ilustra la aplicación de hipótesis simplificativas a un problema muy difícil de resolver rigurosamente.

Cuando primario y secundario tienen la misma altura h de pila de láminas, suele suponerse que el flujo de fuga es paralelo a los ejes de las bobinas cilíndricas en las regiones $abcd$ de la figura 11a.² Compárese con la figura 5c del capítulo XII. Según esta hipótesis, la inducción magnética será uniforme en una dirección paralela a los ejes de las bobinas desde un extremo de las bobinas hasta el otro. También

² Cuando los devanados no tienen la misma altura de pila, pueden descomponerse en devanados equivalentes de tal manera que el método aquí presentado siga siendo utilizable. Véase L. F. BLUME, editor, *Transformer Engineering*, New York: John Wiley & Sons, (1938), 80.

se supone que en las regiones por encima y por debajo de las bobinas el flujo se dispersa rápidamente, la inducción magnética es débil y la mayor parte del flujo halla camino de retorno por el núcleo de hierro. Se supone, pues, corrientemente, que la reluctancia de los caminos del flujo de fuga por encima y por debajo de la bobina es nula. Esto equivale a suponer que las bobinas se hallan rodeadas de hierro de permeabilidad infinita, como se indica en la figura 11b. Con estas hipótesis, la reactancia

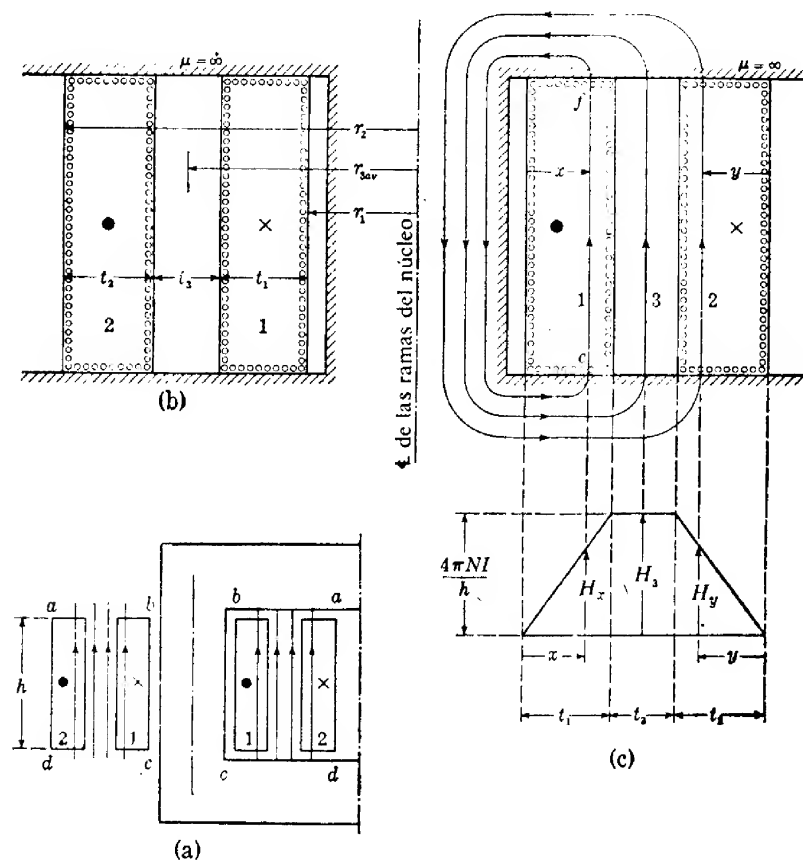


FIG. 11. Una rama de un transformador del tipo de núcleo; a) disposición de los devanados y el núcleo, b) equivalente magnético, c) distribución del campo magnético.

equivalente es la reactancia de dos bobinas de N espiras devanadas sobre el circuito magnético simple de la figura 11b y conectadas en serie, con sus fuerzas electromotrices en oposición. Si el número de espiras N de cada bobina es igual al número de espiras N_1 del primario, el resultado es la reactancia equivalente referida al primario.

Consideremos el camino 1 del flujo que atraviesa las espiras del primario en la figura 11b. Este camino se cierra por el hierro a la izquierda de las bobinas y abraza

la fracción x/t_1 del número de espiras del primario. Si es I la intensidad de la corriente, la fuerza magnetomotriz F_x a lo largo de este camino cerrado es:

$$F_x = 4\pi NI \frac{x}{t_1} \quad (71)$$

expresión válida para cualquier sistema de unidades no racionalizado. Como se supone infinita la permeabilidad del hierro y la inducción magnética en el aire se supone uniforme, el campo magnético H_x a lo largo de la línea ef de la figura 11b será constante e igual a

$$H_x = \frac{F_x}{h} = \frac{4\pi NI x}{ht_1} \quad (72)$$

Al aumentar x desde cero en el interior de la bobina del primario hasta t_1 en su exterior, el campo magnético crece linealmente hasta el valor $4\pi NI/h$ en $x = t_1$, según se indica en la figura 11c.

En el espacio aislante entre las espiras, la fuerza magnetomotriz a lo largo de un camino cerrado tal como el 3 de la figura 11b, es la fuerza magnetomotriz total de un solo devanado. En el interior de esta región, la fuerza magnetomotriz es independiente de la distancia radial y el campo magnético constante H_3 en el espacio del aislante es:

$$H_3 = \frac{4\pi NI}{h} \quad (73)$$

según se indica en la figura 11c. Es evidente que se obtendría el mismo resultado si se supusiera que el camino del flujo se cierra rodeando al primario que al secundario.

En el interior del espacio ocupado por las espiras del secundario, el campo magnético disminuye uniformemente en la forma indicada en la figura 11c. Consideremos el camino 2 del flujo (fig. 11b) que atraviesa las espiras del secundario. Si el camino del flujo se cierra a la izquierda y rodea al primario, tal como se indica, el camino rodea las N espiras del primario y $\left(\frac{t_2 - y}{t_2}\right) N$ espiras del secundario cuya fuerza magnetomotriz tiene sentido opuesto a la del primario. Obsérvese que y se mide mirando hacia el interior desde fuera del secundario, a fin de simplificar el cálculo que sigue. La fuerza magnetomotriz F_y en el camino 2 es:

$$\begin{aligned} F_y &= 4\pi \left[N - \frac{t_2 - y}{t_2} N \right] I \\ &= 4\pi NI \frac{y}{t_2} \end{aligned} \quad (74)$$

y el campo magnético H_y es:

$$H_y = \frac{4\pi NI y}{ht_2} \quad (75)$$

Este es el mismo resultado que se obtendría suponiendo que el camino 2 del flujo se cerrara por la derecha, rodeando la fracción y/t_2 del número de espiras del secundario.

La inductancia equivalente L_{eq} puede calcularse a partir de la energía acumu-

lada en el campo magnético. Como la permeabilidad del hierro se supone infinita, esta energía se acumula por completo en el volumen cilíndrico ocupado por el cobre y el aislante entre los devanados. Llamando I a la intensidad de la corriente que circula por el devanado, la energía acumulada es igual $1/2 L_{eq} I^2$.

En el apartado 5 del capítulo IV se vio que la energía por unidad de volumen en un campo magnético cuando la inducción magnética crece desde cero hasta B , es:

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^B H dB$$

En el aire, esta energía por unidad de volumen es:

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^B \frac{B}{\mu_0} dB = \frac{B^2}{8\pi\mu_0} = \frac{\mu_0 H^2}{8\pi} \quad (76)$$

donde μ_0 es la permeabilidad del vacío en un sistema no racionalizado de unidades.

La energía acumulada en el campo de fuga de la figura 11 es la integral de la expresión de la ecuación (76) extendida a todo el volumen.

La energía elemental dW_x acumulada en un anillo cilíndrico de altura h , espesor dx y radio $(r_1 + x)$, en el que el campo magnético es H_x , es:

$$dW_x = \frac{\mu_0}{8\pi} H_x^2 \times (\text{volumen infinitesimal del anillo}) \quad (77)$$

$$= \frac{\mu_0}{8\pi} H_x^2 2\pi (r_1 + x) h dx \quad (78)$$

De la ecuación (72)

$$\begin{aligned} dW_x &= \frac{\mu_0}{8\pi} \left(\frac{4\pi NI x}{ht_1} \right)^2 2\pi (r_1 + x) h dx \\ &= \frac{4\pi^2 \mu_0 N^2 I^2}{ht_1^2} (r_1 + x) x^2 dx \end{aligned} \quad (79)$$

Por tanto, la energía total W_1 acumulada en el volumen por el devanado primario es:

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{4\pi^2 \mu_0 N^2 I^2}{ht_1^2} \int_0^{t_1} (r_1 + x) x^2 dx \\ &= \frac{4\pi^2 \mu_0 N^2 I^2}{h} \left(\frac{r_1}{3} + \frac{t_1}{4} \right) t_1 \end{aligned} \quad (80)$$

Análogamente, la energía W_2 acumulada en la región ocupada por el devanado secundario es:

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{4\pi^2 \mu_0 N^2 I^2}{ht_2^2} \int_0^{t_2} (r_2 - y) y^2 dy \\ &= \frac{4\pi^2 \mu_0 N^2 I^2}{h} \left(\frac{r_2}{3} - \frac{t_2}{4} \right) t_2 \end{aligned} \quad (81)$$

La energía W_3 acumulada en el espacio entre los devanados, donde el campo magnético H_3 es independiente de la distancia radial, es:

$$\begin{aligned} W_3 &= \frac{\mu_0 H_3^2}{8\pi} \times (\text{volumen del espacio entre devanados}) \\ &= \frac{\mu_0}{8\pi} \left(\frac{4\pi NI}{h} \right)^2 2\pi r_{3med} t_3 h \\ &= \frac{4\pi^2 \mu_0 N^2 I^2}{h} r_{3med} t_3 \end{aligned} \quad (82)$$

donde r_{3med} es el radio *medio* del cilindro aislante entre los devanados.

La energía total acumulada es igual a $\frac{1}{2} L_{eq} I^2$, de donde,

$$\begin{aligned} L_{eq} &= \frac{2}{I^2} (W_1 + W_2 + W_3) \\ &= \frac{8\pi^2 \mu_0 N^2}{h} \left[\left(\frac{r_1}{3} + \frac{t_1}{4} \right) t_1 + \left(\frac{r_2}{3} - \frac{t_2}{4} \right) t_2 + r_{3med} t_3 \right] \end{aligned} \quad (83)$$

donde N es el número de espiras del devanado al que se refiere la inductancia equivalente. Las dimensiones son las de la figura 11b. Obsérvese que r_1 es el radio *interior* del devanado de dentro, pero r_2 es el radio exterior del devanado de fuera. En el sistema Giorgi no racionalizado, la inductancia viene dada en henry, las distancias en metros y $\mu_0 = 10^{-7}$.

Esta fórmula puede simplificarse observando que $\frac{r_1}{3} + \frac{t_1}{4}$ es aproximadamente $\frac{r_{1med}}{3}$, donde r_{1med} es el radio medio del primario. Análogamente $\frac{r_2}{3} - \frac{t_2}{4}$ es aproximadamente igual a $\frac{r_{2med}}{3}$, donde r_{2med} es el radio medio del secundario. Luego,

$$L_{eq} \approx \frac{8\pi^2 \mu_0 N^2}{h} \left(\frac{r_{1med} t_1}{3} + \frac{r_{2med} t_2}{3} + r_{3med} t_3 \right) \quad (84)$$

La fórmula puede también expresarse en función de la longitud media de una espira, o del volumen del cobre y aislante, o de otras diversas maneras.

Como en un transformador real hay cierta reluctancia en las regiones por encima y por debajo del espacio de los devanados, la fuga magnética no es tan grande como en la figura 11b y el flujo empieza a dispersarse antes de abandonar el espacio de los devanados, como se indica en la figura 5c del capítulo XII. Luego las ecuaciones (83) y (84) dan valores demasiado grandes, por lo que suelen emplearse factores empíricos de corrección inferiores a la unidad.

PROBLEMAS

1. Cada uno de los diagramas vectoriales de la figura 12 se aplica a un transformador. Los vectores representativos de tensiones y fuerzas electromotrices inducidas se indican por medio de una flecha normal \rightarrow , los representativos de corrientes por $\rightarrow \perp$, y los de flujos por $\rightarrow \diamond$. Para cada uno de estos diagramas vectoriales:

- Trazar un circuito equivalente.
- Señalar con letras los vectores del diagrama y deducir convenios para los sentidos positivos.
- Indicar en el esquema del circuito equivalente los sentidos positivos de todas las tensiones, corrientes y fuerzas electromotrices representados en los diagramas vectoriales e indicar el sentido de circulación de la potencia.

2. Para suministrar potencia a una carga inductiva se emplea un transformador de 5 kVA, 2 300 : 230 V, 60 Hz. Los valores medidos en el lado de alta tensión de la tensión entre terminales, intensidad de la corriente y potencia de entrada son, respectivamente: 2 360 V, 1,96 A y 4,16 kW. Las corrientes magnetizante y de pérdida en el núcleo correspondientes a las condiciones nominales de plena carga tienen por intensidades 0,10 A y 0,02 A. (Se desprecia la variación de la corriente de excitación a causa de una variación de tensión inducida.) La impedancia de fuga del primario es $11,5 + j 21$ ohm y la impedancia de fuga del secundario es $0,112 + j 0,206$ ohm.

Suponiendo que no hay caída de tensión en la línea que une los terminales del secundario del transformador con la carga, determinar la potencia suministrada a la carga, la tensión en la carga y el factor de potencia.

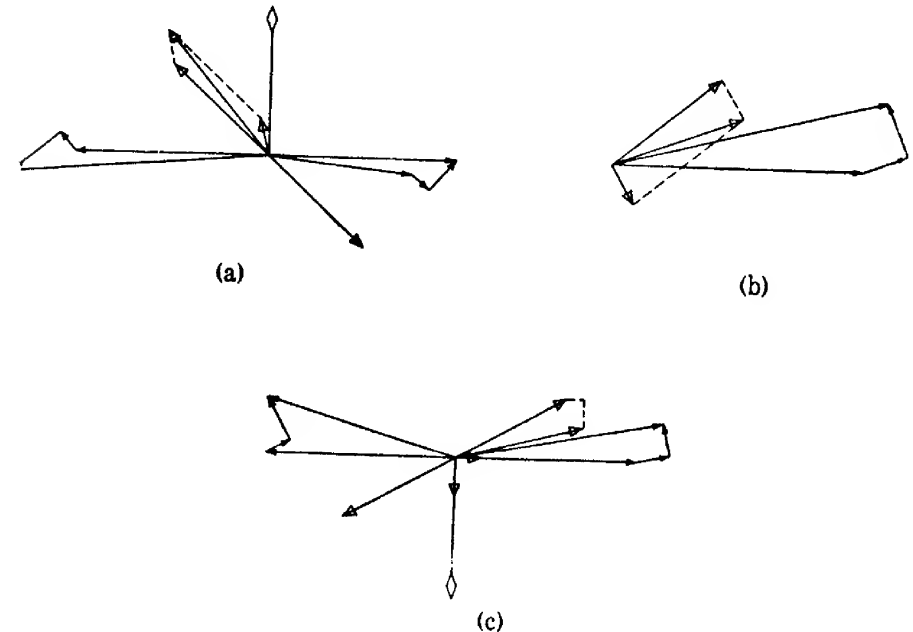


FIG. 12. Diagramas vectoriales de transformadores, problema 1

3. El transformador que tiene como circuito equivalente el de la figura 13 se emplea para conectar un generador de impedancia interna $10\,000 + j 0$ ohm a una carga de impedancia $4 + j 0$ ohm.

Si hay que rebobinar el secundario del transformador con el mismo volumen de cobre pero con el número correcto de espiras para suministrar potencia máxima a la carga a una frecuencia de 1 000 Hz, ¿cuál sería la nueva razón de transformación?

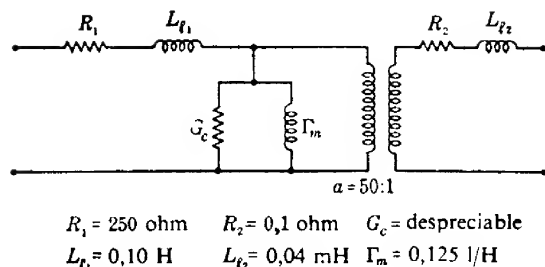


FIG. 13. Circuito equivalente de un transformador adaptador, problema 3

4. Se tienen los siguientes datos de un transformador de 7,5 kVA 2 080 : 208 V 60 Hz cuando funciona a la frecuencia nominal y a la tensión inducida normal:

Resistencia del primario: 7,5 ohm.
 Reactancia de fuga del primario: 14,0 ohm.
 Resistencia del secundario: 0,07 ohm.
 Reactancia de fuga del secundario: 0,15 ohm.
 Corriente de pérdida en el núcleo: 1,0 A.
 Corriente magnetizante: 2,0 A.

Determinar la tensión que hay que aplicar al lado de alta tensión de este transformador para mantener 208 V entre los terminales del secundario cuando la carga es de 40 A con un factor de potencia unidad. Despréciase la variación de la corriente de excitación que acompaña a una variación de la carga.

5. Calcular la tensión en terminales, la intensidad de la corriente y el factor de potencia del primario del transformador a que se hace referencia en los ejemplos de los apartados 5 y 7 si se supone conectada a los terminales del secundario la admitancia de excitación.

6. Se tienen los siguientes datos de un transformador trifásico de 3 333 kVA, 60 Hz, 55 000 : 6 600 V.

ENSAYO EN CORTOCIRCUITO (Devanado de alta tensión excitado)

Frecuencia, Hz	Tensión, V	Intensidad, A	Potencia, W
60	3 800	60,6	18 850

a) ¿Cuál es la máxima variación porcentual que puede sufrir la tensión entre los terminales del secundario al pasar la potencia de salida desde carga nula a plena carga, cuando funciona el transformador a la frecuencia nominal y con la tensión del primario mantenida constante al valor que da a plena carga la tensión nominal al secundario? Exprésese la variación de tensión en tanto por ciento de la tensión nominal del secundario.

b) ¿Cuál es la máxima variación porcentual que puede sufrir el flujo mutuo en las anteriores condiciones?

c) ¿Cuál es el factor de potencia de la carga para el cual se producen las condiciones anteriores?

Supóngase que las resistencias y las reactancias de fuga de primario y secundario son iguales al referirlas a un mismo lado.

7. Se tienen los siguientes datos de un transformador de 1 000 kVA, 66 000 : 600 V, 60 Hz:

	Frecuencia	Tensión	Intensidad	Potencia
Terminales de baja tensión cortocircuitados.....	60 Hz	3 240 V	15,2 A	7 490 W
Terminales de alta tensión en circuito abierto.....	60	6 600	9,1	9 300

Supóngase que las resistencias de primario y secundario son iguales al referirlas a un mismo lado y que las reactancias de fuga de primario y secundario son análogamente iguales. Supóngase también que la corriente magnetizante tiene forma de onda sinusoidal y que su intensidad varía como la primera potencia de la tensión correspondiente al flujo mutuo y que la pérdida en el núcleo varía como el cuadrado de esta tensión.

a) Si a los terminales de baja tensión de este transformador se conecta una carga inductiva que conduzca una corriente de 152 A de intensidad a un factor de potencia 0,80, ¿qué tensión del primario es necesaria para mantener aplicados 6 680 V a la carga?

b) ¿Cuál es la impedancia aparente de este transformador entre los terminales del primario cuando suministra la carga anterior?

8. Se conectan en serie y oposición los devanados primario y secundario de un transformador con núcleo de hierro de razón 1 : 1. Cuando a los terminales exteriores se aplica una tensión de 60 Hz que crea una corriente de 10 A, la tensión en el primario es de 26,7 V y en el secundario es de 23,4 V. Las resistencias de primario y secundario son 0,52 ohm y 0,49 ohm. ¿cuáles son las reactancias de fuga de primario y secundario?

9. El primario y el secundario de un transformador con núcleo de hierro de razón 1 : 1 consiste en un par de hilos devanados uno junto a otro. (Véase prob. 6 y Fig. 10, cap. XII). Los terminales del secundario S_1 y S_2 están cortocircuitados y a los terminales P_1 y P_2 del primario se aplica una tensión igual al 5 % de la nominal. Si se mide la intensidad de la corriente del primario, ¿qué información podrá obtenerse acerca de las constantes del transformador utilizando este valor de la intensidad, y

a) la tensión $P_2P'_2$ con P_1 y P'_1 conectados?

b) la tensión $S'_1S'_2$?

c) la tensión $P'_2S'_2$ con P'_1 y S'_1 conectados?

10. Un transformador de 1 000 kVA, 66 000 : 6 600 V, 60 Hz tiene una impedancia en cortocircuito de $1,0 + j 4,9$ ohm, referida al devanado de baja. Se hace funcionar con una tensión de 66 600 V, aplicada a los terminales, para alimentar una carga a través de una línea de impedancia $0,8 + j 2,0$ ohm. La tensión entre los terminales del secundario es 10 750 V y la corriente de carga del secundario tiene una intensidad de 90 A. Hallar la potencia suministrada a la carga.

11. Indíquese cuáles de las siguientes igualdades son exacta o aproximadamente ciertas:

(a) $Z_{eq1} = a^2 Z_{eq2}$

(b) $Z_{sc1} = a^2 Z_{sc2}$

(c) $Y_{oc2} = a^2 Y_{oc1}$

(d) $Y_{\phi}'' = a^2 Y_{\phi}'$

12. Los siguientes datos pertenecen a un transformador de valores nominales 100 kVA, 11 000 : 2 300 V y 60 Hz:

$$\begin{aligned} R_1 &= 6,21 \text{ ohm} & R_2 &= 0,273 \text{ ohm} \\ X_{l1} &= 22,7 \text{ ohm} & X_{l2} &= 0,954 \text{ ohm} \\ g_{c2} &= 0,000172 \text{ mho} & b_{m2} &= 0,000681 \text{ mho} \end{aligned}$$

Comparar Z_{eq} con Z_{sc} , Z_ϕ y Z_{oc} , y V_1/E_{oc2} con N_1/N_2 .

13. Deducir una expresión para la inductancia equivalente de un transformador devanado en la forma indicada en la figura 14. Sea el número de espiras del secundario igual al del primario y la mitad de las espiras del secundario se hallen sobre la bobina interior y la otra mitad sobre la exterior. Formúlense hipótesis simplificativas correspondientes a las del apartado 9.

a) Dados los siguientes valores, calcular la inductancia de fuga de un transformador del tipo indicado en la figura 14:

$$\begin{aligned} t_1 &= t_3 = 1/2 \text{ pulg (12,7 mm)} \\ t_2 &= 1 \text{ pulg (25,4 mm)} \\ t_a &= t_b = 1/8 \text{ pulg} \\ h &= 6 \text{ pulg} \\ N_p &= N_s = 1\,000 \text{ espiras} \end{aligned}$$

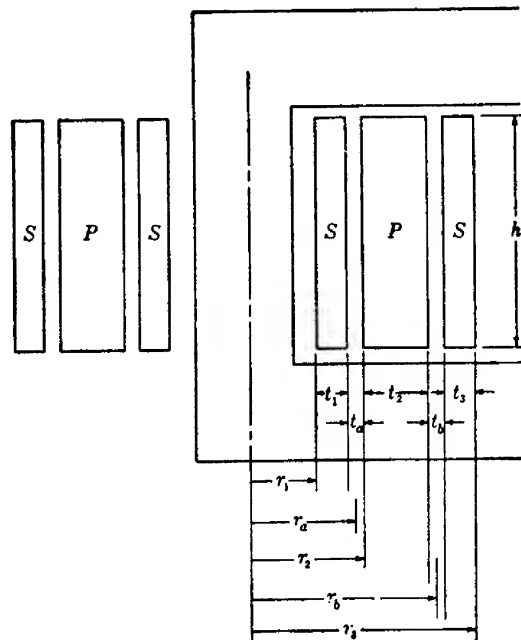


FIG. 14. Sección de un transformador, problema 13

b) Compárese esta inductancia de fuga con la de un transformador del tipo de la figura 11, para el cual

$$\begin{aligned} t_1 &= t_2 = 1 \text{ pulg} \\ t_3 &= 1/8 \text{ pulg} \\ r_1 &= 2 1/8 \text{ pulg} \\ h &= 6 \text{ pulg} \\ N_p &= N_s = 1\,000 \text{ espiras} \end{aligned}$$

(Los símbolos son los empleados en la figura 11).

Regulación de tensión, rendimiento y valores nominales

La teoría general del transformador desarrollada en los dos capítulos anteriores vale para la mayoría de los problemas, salvo para los concernientes a las capacidades de los devanados o a los armónicos de la corriente de excitación. A continuación vamos a estudiar las aplicaciones de esa teoría a la resolución de problemas de regulación de tensión, rendimiento y asignación de valores nominales de transformadores utilizados en sistemas de potencia. En el análisis de estos problemas y de otros análogos suele ser conveniente expresar las intensidades de corrientes y tensiones como tanto por ciento o fracción decimal de sus valores nominales normales; en forma análoga pueden expresarse la potencia, impedancia, admitancia y otras cantidades. En los apartados 6 y 7 se estudian ciertas ventajas del sistema de unidades por uno o por ciento.

1. REGULACIÓN DE TENSIÓN

Como las lámparas eléctricas, estufas o motores funcionan más eficazmente a la tensión nominal, convendrá suministrar a estas cargas la tensión nominal, la cual deberá mantenerse lo más constante posible. Una tensión excesivamente elevada tenderá a acortar la duración del equipo eléctrico, mientras que una tensión inferior a la normal ocasionará una iluminación insuficiente en las lámparas, un funcionamiento inadecuado de las estufas y pares motores demasiado bajos en los motores. Una tensión anormal —baja o elevada— originará, pues, dificultades al servicio público: por otra parte, la satisfacción del usuario respecto a un funcionamiento a la tensión nominal constituye un nuevo estímulo para el empleo de la energía eléctrica en usos adicionales.

Por otra parte, una tensión inferior a la normal significa un precio más bajo de la energía y una pérdida económica para la compañía suministradora. La energía consumida por motores y estufas no varía materialmente en función de la tensión aplicada en el dominio de tensiones utilizado en la práctica incluso cuando no sea satisfactoria la regulación de tensión. Ahora bien, la potencia consumida por las lámparas de incandescencia varía aproximadamente como la tensión de la lámpara elevada a la potencia 1,56, con una variación correspondiente en el consumo de energía. Como la caída de tensión debida a la regulación del circuito es, probablemente, más importante durante las horas de la noche, cuando la carga está constituida principalmente por el alumbrado, el exponente 1,56 constituye una guía satisfactoria para la valoración de las pérdidas económicas debidas a una tensión inferior a la normal. Supongamos que la carga suministrada por un alimentador distribuidor es de 500 kW durante un pico que dure cuatro horas diarias y que la tensión media suministrada sea inferior a la normal en un 4 %. Si el equipo regu-

lador de tensión mantuviera la tensión normal durante la duración del pico de la carga, la potencia de salida sería, aproximadamente,

$$\left(\frac{100}{96}\right)^{1.56} \times 500 = 531 \text{ kW} \quad (1)$$

Luego, el cuatro por ciento por debajo de la tensión normal da origen a una pérdida de venta de 31 kW durante cuatro horas diarias. A un precio de 2 pesetas el kilowatt-hora, representa una disminución de ingresos de 90 500 pesetas al año. Es evidente que una compañía suministradora tiene razones económicas para mantener la tensión adecuada, lo cual justifica que se realicen inversiones considerables en los equipos reguladores de tensión.

En ausencia de equipo automático de regulación de tensión, la tensión del consumidor varía con la carga del circuito de distribución desde el cual se alimenta, a causa de las variaciones de la caída en la impedancia con las fluctuaciones de la carga del circuito. Una de las componentes de esta caída en la impedancia es la que se produce en los transformadores.

Consideremos el transformador de 100 kVA, 12 000 : 2 400 V citado en los apartados 5 y 7 del capítulo XIII, suministrando su potencia nominal a 2 400 V a una carga inductiva con un factor de potencia 0,80. En la solución del apartado 7 del capítulo XIII, se vio que la tensión que hay que aplicar al primario para mantener en el secundario la tensión nominal con esta carga es de 12 290 V, o sea, que la tensión del primario referida al secundario es de 2 458 V. En esta solución se despreciaba la caída de tensión en la impedancia de fuga del primario debida a la corriente de excitación. Si la tensión aplicada se mantuviera constantemente igual a 12 290 V y se suprimiera la carga, la tensión entre los terminales del secundario subiría a 2 458 V, si se siguiera despreciando la caída de tensión en la impedancia de fuga del primario debida a la corriente de excitación.

La variación de la tensión del secundario al suprimir la carga y mantener constante la tensión del primario, expresada como fracción o tanto por ciento de la tensión del secundario bajo carga es, por definición, la *regulación de tensión* del transformador para la carga especificada.¹ Es decir, manteniendo constante V_1 , por definición,

$$\text{Regulación} \equiv \frac{E_{oc2} - V_2}{V_2}, \quad (2)$$

donde E_{oc2} es la tensión del secundario en circuito abierto y V_2 es la tensión entre los terminales del secundario bajo carga. A menos que se especifique otra cosa, la carga se toma como potencia aparente (kVA) nominal a la tensión nominal del secundario y a un cierto factor de potencia determinado. Es corriente que las cargas comerciales tengan un factor de potencia aproximado de 0,8 con corriente retrasada. Así, pues, para un factor de potencia de 0,80 con corriente retrasada, la regulación de tensión del transformador del apartado 7 del capítulo XIII es:

$$\text{Regulación} = \frac{2\,458 - 2\,400}{2\,400} \times 100 = +2,4 \% \quad (3)$$

¹ «American Engineering and Industrial Standards,» N° C57: *Proposed American Standards; Transformers, Regulators, and Reactors* (New York: American Standards Association, 1940), párrafo 1064, pág. 11.

La regulación calculada en la ecuación (3) se basa en el circuito equivalente de la figura 7a del capítulo XIII, que prescinde de la caída de tensión en la impedancia de fuga del primario debida a la corriente de excitación y supone que la impedancia en serie del transformador es igual a su impedancia equivalente. No obstante, el error introducido por estas aproximaciones es completamente despreciable, según se deduce de los resultados de los apartados 5 y 7 del capítulo XIII. En la solución simple del apartado 7, se desprecia la corriente de excitación y por tanto se supone que la corriente del primario referida al secundario es igual a la corriente de carga del secundario, y la tensión entre terminales del primario referida al secundario resulta ser 2 458/0,8° V. En realidad, la corriente del primario referida al secundario es la suma vectorial de la corriente de carga del secundario más la corriente de excitación I''_0 referida al secundario. Así, pues, el verdadero valor de la tensión entre los terminales del primario referido al secundario es la suma vectorial del valor calculado en el apartado 7 del capítulo XIII, más la caída de tensión adicional en la impedancia de fuga del primario debida a la corriente de excitación. Es decir,

$$\frac{V_1}{a} \text{ verdadero} = 2\,458/0,8^\circ + \left(\frac{R_1}{a^2} + j \frac{X_{l1}}{a^2} \right) I''_0. \quad (4)$$

Según la solución del apartado 5 del capítulo XIII, este verdadero valor es 2 459/0,8°.

Si se suprime la carga y se mantiene la tensión entre terminales del primario referida al secundario a 2 459/0,8°, la tensión inducida es la tensión entre terminales del primario menos (vectorialmente) la caída de tensión en la impedancia de fuga del primario debida a la corriente de excitación en vacío. Esta tensión inducida referida al secundario es igual a la tensión entre terminales del secundario en vacío, o sea,

$$E_{oc2} = \frac{V_1}{a} \text{ verdadero} - \left(\frac{R_1}{a^2} + j \frac{X_{l1}}{a^2} \right) I''_0 \quad (5)$$

$$= 2\,458/0,8^\circ + \left(\frac{R_1}{a^2} + j \frac{X_{l1}}{a^2} \right) (I''_0 - I''_0), \quad (6)$$

donde I''_0 es la corriente de excitación bajo carga de I''_0 es la corriente de excitación en vacío, ambas referidas al secundario. Así, pues, el verdadero valor de la tensión entre terminales del secundario en vacío difiere del valor aproximado de 2 458 V calculado en el apartado 7 del capítulo XIII, solamente en el efecto sobre el valor originado por la pequeña diferencia entre las corrientes de excitación bajo carga y en vacío. El valor aproximado de la regulación de tensión dado por la ecuación (3), pues, no desprecia ni siquiera una cantidad tan pequeña como la caída de tensión en la impedancia de fuga del primario debida a la corriente de excitación, sino que desprecia solamente el efecto de segundo orden de la *variación* de esta pequeña cantidad.

► Por tanto, cuando se calcula la regulación, se prescinde siempre de la corriente de excitación y se representa el transformador simplemente por su impedancia equivalente. ◀

En realidad, cuando se determina la impedancia equivalente midiendo la impedancia en cortocircuito desde el lado del secundario, la regulación de tensión así calculada es el valor «exacto», puesto que, en virtud del teorema de Thévenin, la tensión del secundario en circuito abierto es igual a la tensión del secundario bajo carga más la caída de tensión debida a la corriente del secundario y a la impedancia en cortocircuito medida desde el lado del secundario, como en el circuito equivalente de la figura 9a del capítulo XIII.

En la figura 1 puede verse el diagrama vectorial referido al secundario. Cuando se especifican la carga y el factor de potencia, se conocen V_2 , I_L y θ_L . Si se conocen la resistencia equivalente y la reactancia equivalente y es V_2 el vector de referencia, la tensión entre terminales del primario referida al secundario viene dada vectorialmente por

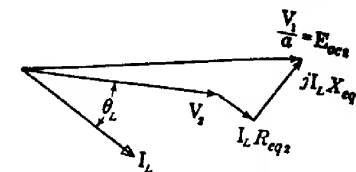


Fig. 1. Diagrama vectorial referido al secundario.

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{a} &= V_2 + I_L(\cos \theta_L - j \sin \theta_L)(R_{eq2} + jX_{eq2}) \\ &= V_2 + I_L R_{eq2} \cos \theta_L + I_L X_{eq2} \sin \theta_L \\ &\quad + j(I_L X_{eq2} \cos \theta_L - I_L R_{eq2} \sin \theta_L) \end{aligned} \quad (7)$$

$$= A + jB, \quad (8)$$

donde A es la parte real y B la imaginaria de V_1/a ; es decir,

$$A = V_2 + I_L R_{eq2} \cos \theta_L + I_L X_{eq2} \sin \theta_L \quad (9)$$

$$B = I_L X_{eq2} \cos \theta_L - I_L R_{eq2} \sin \theta_L. \quad (10)$$

Obsérvese que θ_L es *positivo para corriente retrasada*. Este sentido tomado como positivo es conveniente porque los factores de potencia de las cargas comerciales suelen ser inductivos, con lo que θ_L suele ser cantidad positiva.

Como B es pequeño frente a A , el módulo de V_1/a es, casi exactamente,

$$\frac{V_1}{a} = \sqrt{A^2 + B^2} = A + \frac{B^2}{2A}. \quad (11)$$

Como $B^2/2A$ es el efecto de una pequeña componente perpendicular a la parte principal de V_1/a , el error será totalmente despreciable si se sustituye la A del denominador por su valor aproximado V_2 . Así,

$$\frac{V_1}{a} = A + \frac{B^2}{2V_2}. \quad (12)$$

Despreciando la corriente de excitación en vacío, V_1/a es igual a la tensión entre terminales del secundario al suprimir la carga, E_{oc2} . Luego, de la ecuación (2),

$$\text{Regulación} = \frac{A + \frac{B^2}{2V_2} - V_2}{V_2} = \frac{A - V_2}{V_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{B}{V_2} \right)^2. \quad (13)$$

Sustituyendo las ecuaciones (9) y (10) en la (13) se tiene:

$$\text{Regulación} = \frac{I_L R_{eq2} \cos \theta_L + I_L X_{eq2} \sin \theta_L}{V_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{I_L X_{eq2} \cos \theta_L - I_L R_{eq2} \sin \theta_L}{V_2} \right)^2 \quad (14)$$

La regulación porcentual es el valor dado por la ecuación (14) multiplicado por 100. De la ecuación (14) se obtiene el mismo resultado tanto si se toma como secundario el devanado de alta como el de baja tensión. Según las normas American Engineering and Industrial Standards,² la resistencia equivalente debe tomarse a 75°C. En el apartado 3b se estudian las correcciones para variaciones de temperatura.

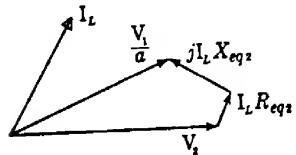


FIG. 2. Diagrama vectorial con corriente adelantada.

Con cargas inductivas, θ_L es positivo y la regulación de tensión es positiva, es decir, la tensión del secundario crece al suprimir la carga y mantener constante la tensión del primario. En cambio, con cargas capacitivas (θ_L es negativo y también $\sin \theta_L$), V_1/a puede ser menor que V_2 , según se indica en la figura 2; la regulación puede ser negativa y la tensión del secundario puede disminuir al suprimir la carga.

2. RENDIMIENTO

El rendimiento de potencia de una máquina cualquiera es, por definición, la razón de la potencia útil de salida a la potencia de entrada. El rendimiento puede determinarse mediante la medida simultánea de la salida y la entrada; pero, especialmente en las máquinas grandes, dicho ensayo no es conveniente y sí caro de realizar. Además, cuando el rendimiento es elevado deberá lograrse mayor precisión si se expresa el rendimiento en función de las pérdidas de potencia; así,

$$\text{Rendimiento} = \frac{\text{salida}}{\text{entrada}} = \frac{\text{entrada} - \text{pérdidas}}{\text{entrada}} \quad (15)$$

$$= 1 - \frac{\text{pérdidas}}{\text{entrada}} = 1 - \frac{\text{pérdidas}}{\text{salida} + \text{pérdidas}} \quad (16)$$

Si pueden determinarse las pérdidas, el rendimiento podrá determinarse mediante la ecuación (16). Cuando el rendimiento es elevado, como ocurre en la mayor parte de la maquinaria eléctrica, puede determinarse de esta manera con gran precisión. Por ejemplo, supongamos que la pérdida total en un transformador de 100 kVA que trabaja exactamente a plena carga con un factor de potencia unidad sea

² «American Engineering and Industrial Standards», N° C57: *Proposed American Standards: Transformers, Regulators, and Reactors* (New York: American Standards Association, 1940), párrafo 3035, pág. 25.

2,04 kW \pm 2 %. La entrada es 102,04 \pm 0,041 kW, y la pérdida expresada como fracción de la entrada es

$$\frac{\text{Pérdida}}{\text{Entrada}} = \frac{2,04}{102,0} \pm 2 \% = 0,0200 \pm 0,0004.$$

Por tanto, de la ecuación (16),

$$\text{Rendimiento} = 1 - 0,0200 \pm 0,0004 = 0,9800 \pm 0,0004.$$

► El tanto por ciento de error en el rendimiento resultante de un error del 2 % en la pérdida es, solamente, el 0,04 %. Este valor, pues, es mucho más preciso que el que se obtendría midiendo simultáneamente la potencia de entrada y la de salida. Obsérvese también la conveniencia de la ecuación (16). Esta ecuación permite el empleo de una regla de cálculo de 25 cm para calcular rendimientos superiores al 90 % con cuatro o más cifras significativas, según suele justificarse por la precisión con que se conocen las pérdidas. ◀

Las pérdidas en un transformador son la pérdida en el núcleo debida al flujo principal en el núcleo, la pérdida en el cobre de sus devanados, y las pérdidas parásitas debidas a corrientes de Foucault inducidas por los flujos de fuga en el tanque, sujeciones y partes diversas de la estructura.

2a. *Pérdida en el núcleo.* En un transformador cargado, casi todo el flujo mutuo resultante se halla confinado en el núcleo. No obstante, como el camino de retorno de la mayor parte del flujo de fuga está en el núcleo, la inducción magnética verdadera en el núcleo no es exactamente la determinada solamente por el flujo mutuo resultante, según explicó en el apartado 4 del capítulo XII. Así, pues, el flujo de fuga puede incrementar en ciertas regiones del núcleo a la inducción magnética, mientras la disminuye en otras.³ Sin embargo, será probablemente muy preciso suponer que, por término medio, la inducción magnética en el núcleo está determinada por el flujo mutuo resultante. Basándose en esto, la pérdida en el núcleo bajo carga es igual a la pérdida en el núcleo en vacío para las mismas tensión inducida y frecuencia.

2b. *Pérdida en la carga.* Las pérdidas debidas a las corrientes que circulan por los devanados son las pérdidas por efecto Joule I^2R como en corriente continua más las pérdidas adicionales debidas a las corrientes de Foucault inducidas por los flujos de fuga. Cuando estas corrientes de Foucault existen en el interior de los propios conductores, dan lugar al efecto cortical. Al producirse en diversas partes estructurales originan las pérdidas parásitas. Como los flujos de fuga que originan estas corrientes de Foucault son proporcionales a las intensidades de las corrientes que circulan por los devanados, y como toda pérdida por corrientes de Foucault es proporcional al cuadrado del flujo que las origina, estas pérdidas adicionales son proporcionales a los cuadrados de las intensidades de las corrientes que circulan por los devanados. Por tanto, la pérdida total debida a las corrientes que circulan por los devanados podrá interpretarse utilizando resistencias efectivas para corriente alterna mayores que las resistencias a la corriente continua de los devanados, de acuerdo con las hipótesis del apartado 3 del capítulo VI. Así, si son R_1 y R_2 las

³ Para más detalles acerca del particular véase L. F. BLUME, editor, *Transformer Engineering* (New York: American Standards Association, 1940), párrafos 2015 y 2016, pág. 16.

resistencias efectivas a la corriente alterna de los devanados, la combinación de las pérdidas en el cobre y parásitas, conocida como *pérdida en la carga*, es $I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2$. Como las pérdidas en el cobre de los devanados son las componentes principales de las pérdidas en la carga, y como la pérdida en la carga varía con los cuadrados de las intensidades de las corrientes, como lo hace una verdadera pérdida en el cobre, a la pérdida en la carga se le llama a menudo pérdida en el cobre y puede designarse por el símbolo P_{cu} , aun cuando parte de la pérdida en la carga no esté asociada directamente con el cobre. Obsérvese que se obtiene la misma pérdida cuando se refiere a un mismo devanado las corrientes y las resistencias; así, si la razón de transformación N_1/N_2 es igual a a ,

$$I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 = I_1^2 R_1 + \left(\frac{I_2}{a}\right)^2 a^2 R_2 = (aI_1)^2 \frac{R_1}{a^2} + I_2^2 R_2. \quad (17)$$

3. RENDIMIENTO CONVENCIONAL

Si están determinadas las pérdidas, el rendimiento para una carga dada puede calcularse a partir de la ecuación (16). Como un error relativamente grande en el valor de las pérdidas origina un error mucho menor en el rendimiento calculado, podrán realizarse aproximaciones que simplifiquen mucho los cálculos y el método experimental de medida de las pérdidas y que, a pesar de ello, sigan introduciendo un error muy pequeño en el valor del rendimiento calculado. Se han acordado, a fines de normalización, ciertos procedimientos y métodos de cálculo.⁴ El rendimiento calculado de acuerdo con estos métodos normalizados recibe el nombre de *rendimiento convencional* y es suficientemente próximo al verdadero valor para todos los fines prácticos. Exponemos a continuación estos métodos normalizados.

3a. Pérdida en el núcleo. Según se indicó en el apartado 2, la pérdida en el núcleo bajo carga es casi igual a la pérdida en el núcleo en vacío para las mismas tensión inducida y frecuencia. Como la corriente de excitación para la tensión y frecuencia normales es, aproximadamente 0,05 de la intensidad a plena carga, la pérdida en el cobre en vacío debida a la corriente de excitación será, aproximadamente, $(0,05)^2$, ó sea, 0,0025 de la pérdida en el cobre del primario a plena carga. Las pérdidas en el cobre en primario y secundario son aproximadamente iguales; luego, la pérdida en el cobre en vacío es solamente $\frac{1}{2} \times 0,0025$ de la pérdida total en el cobre a plena carga. En un transformador de distribución, la pérdida total en el cobre a plena carga suele ser aproximadamente el doble de la pérdida en el núcleo a la frecuencia y tensión nominales. Por tanto, en vacío, la pérdida en el cobre del primario es aproximadamente sólo $\frac{1}{2} \times 0,0025 \times 2$, ó sea, 0,0025 de la pérdida en el núcleo, lo cual es totalmente despreciable. También en vacío, la caída de tensión en la impedancia de fuga del primario debida a la corriente de excitación es aproximadamente igual a 0,05 de su valor correspondiente a la intensidad nominal de la corriente. Como esta caída para la intensidad nominal suele ser de unas 0,03 de la tensión nominal, la caída de tensión en la impedancia de fuga del primario debida a la corriente de excitación en vacío será de $0,05 \times 0,03$, ó sea, 0,0015 de la tensión nominal y por tanto, también es despreciable. Así, la pérdida en el núcleo

⁴ «American Engineering and Industrial Standards», No C57: *Proposed American Standards; Transformers, Regulators, and Reactors* (New York: American Standards Association, 1940), párrafos 2015 y 2016, pág. 16.

bajo carga es muy aproximadamente igual a la potencia de entrada en vacío a una tensión y frecuencia igual a la tensión inducida bajo carga.

► Incluso a plena carga, la tensión inducida no difiere mucho de la tensión entre terminales. A fin de simplificar los ensayos y los cálculos, la pérdida en el núcleo bajo carga se tomará, pues, como valor correspondiente a la *tensión entre terminales del secundario*, en lugar del valor, probablemente más preciso, correspondiente a la tensión inducida.◀

Por ejemplo, consideremos el transformador de 100 kVA citado en el apartado 5 del capítulo XIII. Cuando trabaja a plena carga con un factor de potencia 0,80, corriente retrasada, la tensión entre los terminales del secundario es de 2 400 V y la tensión inducida (ec. 23, cap. XIII) es de 2 429 V. Así, si se supone que la pérdida en el núcleo bajo carga es de 940 W correspondiente a una tensión *entre terminales* del secundario de 2 400 V, en vez del valor probablemente más preciso de 963 W correspondiente a una tensión *inducida* de 2 429 V (véanse datos en el apartado 5 del capítulo XIII), el error es de 23 W, o sea un 2,4 % de la pérdida en el núcleo. Como la potencia de entrada bajo carga es algo mayor que los 80 kW de salida, este error en la pérdida en el núcleo es algo menor que 23/80 000, ó sea 0,0003 de la potencia de entrada, o sea que el rendimiento resulta demasiado elevado en 0,0003. Este error es tan pequeño que no vale la pena gastar el tiempo en buscar el valor que se supone más aproximado.

Para el rendimiento convencional se supone que el flujo varía sinusoidalmente y por tanto el generador que se emplee en el ensayo en vacío deberá tener una fuerza electromotriz sinusoidal y una impedancia interna muy baja. La tensión aplicada no deberá ajustarse mediante una impedancia variable en serie, ya que las caídas de tensión armónicas debidas a los armónicos de la corriente de excitación deformarían la forma de onda de la tensión.

Como con las variaciones de temperatura sólo varía apreciablemente la componente relativamente pequeña de las pérdidas por corrientes de Foucault en el núcleo, suele suponerse que la pérdida en el núcleo es independiente de la temperatura.

3b. Pérdida en la carga. Según la ecuación (17), la pérdida en la carga debida a las corrientes que circulan por los devanados es la suma de las pérdidas efectivas $I^2 R$ por efecto Joule. Si se desprecia la corriente de excitación, las intensidades de las corrientes de primario y secundario referidas a un mismo lado son iguales y la pérdida en la carga es $I^2 R_{eq}$, donde I y R_{eq} están referidas a un mismo lado.

Podemos estimar, para el transformador tipo del apartado 5 del capítulo XIII, el error introducido al despreciar la corriente de excitación. Así, cuando se incluye en la corriente del primario la corriente de excitación, las corrientes de primario y secundario determinadas en dicho apartado tenían intensidades de 8,60 A y 41,7 A, y la pérdida en la carga es:

$$(8,60)^2 \times 7,0 + (41,7)^2 \times 0,30 = 1\,040 \text{ W},$$

siendo 7,0 y 3,0 ohm las resistencias efectivas de primario y secundario. La resistencia equivalente referida al secundario es de 0,58 ohm. Luego, si se desprecia la corriente de excitación, la pérdida en la carga es:

$$(41,7)^2 \times 0,58 = 1\,010 \text{ W}.$$

Despreciando la corriente de excitación, el error en la pérdida en el cobre del primario es de unos 30 W. La entrada es de algo más que 80 kW, luego el error es de 30/80 000, ó sea 0,0004 de la potencia de entrada. Por tanto, despreciando la corriente de excitación se eleva en 0,0004 el rendimiento calculado. Este error se desprecia al calcular el rendimiento convencional y se supone que la pérdida en la carga es igual a $I^2 R_{eq}$.

► Según se vio en el apartado 8b del capítulo XIII, la potencia de entrada en cortocircuito es $I^2 R_{eq}$, siendo muy pequeñas la corriente de excitación y la pérdida en la carga. Así, para calcular el rendimiento convencional, se toma como pérdida en la carga la potencia de entrada en cortocircuito para la misma corriente. ◀

Hay que corregir la pérdida en la carga dando su valor a 75°C, que es la temperatura que se considera de funcionamiento normal a plena carga. Así, pues, si son R_{cc1} y R_{cc2} las resistencias a la corriente continua de los devanados a la temperatura de θ grados centígrados que tienen los devanados en el ensayo en cortocircuito, la componente de la resistencia equivalente a la temperatura θ debida a las resistencias a la corriente continua de los devanados es $R_{cc1} + a^2 R_{cc2}$ referida al primario, o bien $(R_{cc1}/a^2) + R_{cc2}$ referida al secundario. Si es $R_{cc(\theta)}$ esta resistencia referida al lado que más convenga y es $R_{eq(\theta)}$ la resistencia equivalente efectiva para la corriente alterna referida al mismo lado, la componente de la resistencia equivalente debida a las pérdidas por corrientes de Foucault en los conductores y en diversas partes estructurales es $R_{eq(\theta)} - R_{cc(\theta)}$. Las resistencias a la corriente continua crecen con la temperatura y la resistencia equivalente a la corriente continua a 75°C es:

$$R_{cc(75)} = R_{cc(\theta)} \frac{234,5 + 75}{234,5 + \theta}. \quad (18)$$

Por otra parte, las pérdidas por corrientes de Foucault disminuyen al crecer la temperatura, ya que son inversamente proporcionales a las resistividades de los materiales en que existen. Algunas de estas corrientes de Foucault se hallan en los propios conductores, mientras otras se hallan en las partes estructurales de hierro y acero. Si la temperatura de funcionamiento de todas las partes estructurales fuera 75°C y el coeficiente de temperatura de la resistencia de todas las partes fuera el mismo que el del cobre, * la componente correspondiente a las corrientes de Foucault de la resistencia equivalente a 75°C sería:

$$[R_{eq(\theta)} - R_{cc(\theta)}] \frac{234,5 + \theta}{234,5 + 75}. \quad (19)$$

Como las pérdidas parasitarias constituyen una parte relativamente pequeña de las pérdidas en la carga, esta corrección para la temperatura se considera suficientemente precisa. Así, pues, la resistencia equivalente a 75°C es:

$$R_{eq(75)} = R_{cc(\theta)} \frac{309,5}{234,5 + \theta} + [R_{eq(\theta)} - R_{cc(\theta)}] \frac{234,5 + \theta}{309,5}. \quad (20)$$

* El coeficiente de temperatura de la resistencia del hierro y del acero varía considerablemente con la composición y el tratamiento térmico pero es alrededor de 0,003 a 20°C, mientras que el del cobre es 0,00393.

4. EJEMPLO DE CÁLCULO DE LA REGULACIÓN Y DEL RENDIMIENTO

Calcular la regulación y el rendimiento a plena carga, factor de potencia 0,80, corriente retrasada, del transformador de distribución de 15 kVA, 2 400 : 240 V, 60 Hz al cual corresponden los siguientes datos. (El subíndice H significa devanado de alta tensión y el subíndice X , devanado de baja).

Ensayo en cortocircuito	Ensayo en circuito abierto
$V_H = 74,5 \text{ V}$	$V_X = 240 \text{ V}$
$I_H = 6,25 \text{ A}$	$I_X = 1,70 \text{ A}$
$P_H = 237 \text{ W}$	$P_X = 84 \text{ W}$
Frecuencia = 60 Hz	Frecuencia = 60 Hz
$\theta = 25^\circ\text{C}$	
Resistencias a la corriente continua medidas a 25°C	
$R_{ccH} = 2,80 \text{ ohm}$	$R_{ccX} = 0,0276 \text{ ohm}$

Los datos anteriores han sido corregidos de las pérdidas en los instrumentos cuando ha sido necesaria dicha corrección.

Solución: La intensidad nominal de la corriente que circula por el devanado de alta tensión es:

$$I_H = \frac{15\,000}{2\,400} = 6,25 \text{ amp.} \quad (21)$$

El ensayo en cortocircuito se realizó a la intensidad nominal de la corriente, según se acostumbra a hacer.

De los datos en cortocircuito,

$$R_{eqH} = \frac{P_H}{I_H^2} = \frac{237}{(6,25)^2} = 6,07 \text{ ohm a } 25^\circ\text{C}. \quad (22)$$

Para calcular la resistencia equivalente a 75°C, hay que determinar la componente correspondiente a la corriente continua de la resistencia equivalente. La razón de transformación es 10, y de las resistencias a la corriente continua

$$R_{ccH} + a^2 R_{ccX} = 2,80 + 2,76 = 5,56 \text{ ohm a } 25^\circ\text{C}$$

El factor de corrección de temperatura $309,5/(234,5 + \theta)$ de la ecuación 20 es $309,5/259,5 = 1,19$. Por tanto, de la ecuación (20), a 75°C,

$$R_{eqH(75)} = 5,56 \times 1,19 + (6,07 - 5,56) \frac{1}{1,19} = 7,05 \text{ ohm.} \quad (23)$$

Puede ahora determinarse el rendimiento convencional mediante la ecuación (16), de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} I^2 R_{eqH(75)} &= (6,25)^2 7,05 = 276 \text{ W} \\ \text{Pérdida en el núcleo} &= 84 \\ \text{Pérdida total} &= \text{suma} = 360 \\ \text{Salida } 0,80 \times 15\,000 &= 12\,000 \\ \text{Entrada} &= \text{suma} = 12\,360 \\ \frac{\text{Pérdidas}}{\text{Entrada}} &= \frac{360}{12\,360} = 0,0291 \\ \text{Rendimiento} &= 1 - 0,0291 = 0,9709 \end{aligned} \quad (24)$$

El cálculo de la regulación de tensión requiere haber hallado la reactancia equivalente. De los datos en cortocircuito,

$$Z_{eqH} = \frac{V_H}{I_H} = \frac{74,5}{6,25} = 11,92 \text{ ohm} \quad (25)$$

$$X_{eqH} = \sqrt{Z_{eqH}^2 - R_{eqH}^2} \quad (26)$$

Obsérvese que para determinar X_{eqH} deberá utilizarse el valor de R_{eqH} a la temperatura del ensayo. Luego,

$$X_{eqH} = \sqrt{11,92^2 - 6,07^2} = 10,27 \text{ ohm.} \quad (27)$$

Como las constantes se refieren al lado de alta tensión, este devanado debe considerarse como secundario al calcular la regulación. Así, en la ecuación (14),

$$\begin{aligned} \cos \theta_L &= 0,800 & \text{sen } \theta_L &= + 0,600 \\ I_L R_{eq2} &= 6,25 \times 7,05 & I_L X_{eq2} &= 6,25 \times 10,27 \\ &= 44,1 & &= 64,2. \end{aligned}$$

Simplificando la notación, en la ecuación (14),

$$\begin{aligned} IR \cos \theta &= 35,3 & IX \cos \theta &= 51,4 \\ IR \text{ sen } \theta &= 38,5 & IR \text{ sen } \theta &= 26,4 \\ \text{Suma} &= 73,8 & \text{Diferencia} &= 25,0 \\ \frac{73,8}{2400} &= 0,0308 & \frac{1}{2} \left(\frac{25,0}{2400} \right)^2 &= \text{despreciable.} \end{aligned}$$

Luego,

$$\text{Regulación} = 0,0308, \text{ o sea, } 3,80 \% \quad (28)$$

5. RENDIMIENTO ENERGÉTICO; EJEMPLO

Aun cuando el rendimiento de la transmisión de potencia constituye un importante factor de mérito, de importancia aún mayor es el rendimiento de la transmisión de energía; es decir, la razón de los kilowatt-hora de salida a los de entrada.

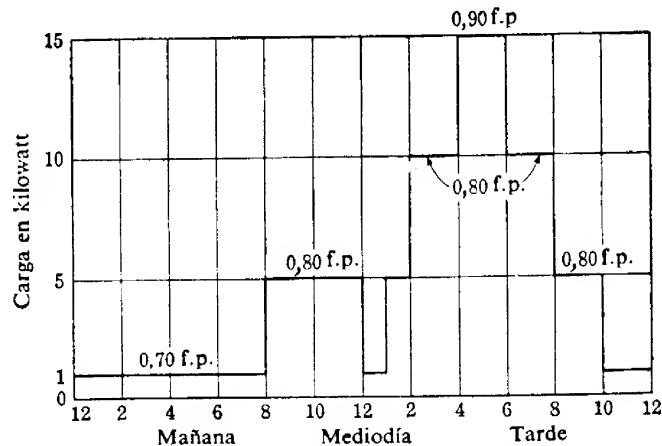


FIG. 3. Curva de carga diaria simplificada.

Este rendimiento energético no sólo depende de las características del transformador, sino también del ciclo de carga.

Puesto que, si la tensión es constante, la pérdida en el núcleo es casi constante, la energía consumida diariamente, expresada en kilowatt-horas, por las pérdidas en el núcleo es igual al producto de la pérdida en el núcleo, expresada en kilowatt, por el número de horas que funciona diariamente el transformador. Sin embargo, la pérdida en la carga depende del cuadrado de la intensidad de la corriente de carga y por tanto es mucho más difícil su cálculo, puesto que la carga suele fluctuar. El cálculo de la energía consumida en la pérdida en la carga se estudia con detalle en el apartado 3 del capítulo XVI. En cambio, si quisiera considerarse la curva diaria de carga como función escalonada constituida por un cierto número de períodos de carga constante, como se indica en la figura 3, los cálculos son relativamente sencillos.

Por ejemplo, intentemos determinar el rendimiento energético del transformador de 15 kVA del apartado 4 funcionando con el ciclo de carga representado en la figura 3.

Solución: El examen de la figura 3 indica que el ciclo diario de carga puede resumirse de la manera siguiente:

Horas	Kilowatt de salida	Factor de potencia
2	15	0,90
4	10	0,80
7	5	0,80
11	1	0,70

Las pérdidas son la pérdida constante en el núcleo, que debe suministrarse continuamente, y la pérdida en la carga, que varía con el cuadrado de la intensidad de la corriente. Así, la energía disipada en pérdidas en el núcleo es:

$$\frac{24 \times 84}{1000} = 2,02 \text{ kWh diariamente} \quad (29)$$

La salida diaria y la pérdida en la carga pueden calcularse y tabularse en la forma indicada a continuación. Para el cálculo de la pérdida en la carga se toma como resistencia equivalente el valor medio de sus valores en caliente y en frío; es decir, de las ecuaciones (22) y (23),

$$R_{eqH} = \frac{6,07 + 7,05}{2} = 6,56 \text{ ohm.} \quad (30)$$

Horas	Salida				I_H	$I_H^2 R_{eqH}$ kW	Pérdida en la carga kWh
	kW	kWh	F. p.	kVA			
2	15	30	0,90	16,67	6,94	0,316	0,632
4	10	40	0,80	12,5	5,20	0,177	0,709
7	5	35	0,80	6,25	2,60	0,0443	0,310
11	1	11	0,70	1,43	0,595	0,0023	0,025

Salida total = 116 kWh

Pérdida total en la carga = 1,676 kWh

Puede calcularse ahora el rendimiento energético a partir de la energía de salida y de las pérdidas, de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Pérdida total en la carga} &= 1,68 \text{ kWh diariamente} \\ \text{Pérdida total en el núcleo} &= 2,02 \\ \hline \text{Pérdida total} &= 3,70 \\ \text{Salida} &= 116,00 \\ \hline \text{Entrada} &= 119,70 \end{aligned}$$

Luego

$$\text{Rendimiento energético} = 1 - \frac{\text{pérdidas}}{\text{entrada}} = 1 - \frac{3,70}{119,7} = 0,9691 \quad (31)$$

6. TANTOS POR CIENTO Y POR UNO

En el estudio de los aparatos de potencia es corriente expresar los valores de las intensidades y tensiones como tanto por ciento o por uno de sus valores nominales a plena carga. * El valor de la intensidad o de la tensión expresado como tanto por ciento o por uno de este valor de base se define como *tanto por ciento o por uno* de la intensidad o de la tensión.

Frecuentemente, este método de expresar los valores de las intensidades y tensiones lleva consigo más información respecto a los aparatos que la expresión de las intensidades y tensiones en ampere y volt. Así, en el apartado 4 se dice que la corriente de excitación de un transformador de distribución de 15 kVA, 2 400 : 240 V tiene una intensidad de 1,70 A, medida desde el lado de baja tensión a la tensión nominal. Para determinar la importancia de esta corriente de excitación, es necesario expresar la intensidad como fracción (tanto por uno) o tanto por ciento de la intensidad nominal. Así, la intensidad nominal de la corriente que circula por el devanado de baja tensión es:

$$\frac{15\,000}{240} = 62,5 \text{ A.} \quad (32)$$

Luego, la intensidad de la corriente de excitación expresada como fracción de la intensidad nominal es:

$$\frac{1,70}{62,5} = 0,0272. \quad (33)$$

Decir que la intensidad de la corriente de excitación es el 0,0272 por uno, o el 2,72 %, da inmediatamente información referente a su importancia relativa en lo que afecta a las características del transformador. En la expresión de las tensiones en tanto por uno o por ciento se encuentran ventajas análogas. Por ejemplo, si la

* Los valores normales o de base de las intensidades y tensiones no tienen por qué ser los valores nominales a plena carga. En el análisis de sistemas de potencia en los que interviene la interconexión de un cierto número de generadores, transformadores y otras máquinas de diferentes calibres, pueden elegirse valores de base convenientes cualesquiera. No obstante, cuando se trate de un solo aparato, tal como un transformador, conviene elegir como valores de base los valores nominales de la tensión y la intensidad a plena carga.

caída óhmica equivalente referida al devanado de alta tensión de este transformador es de 44,1 V a la intensidad nominal de la corriente, esta caída de tensión es:

$$\frac{44,1}{2\,400} = 0,0184 \text{ por uno, o sea, el } 1,84 \%. \quad (34)$$

Se da más información referente a la importancia relativa de la caída óhmica dando su valor en tanto por uno o por ciento, que en volt.

Análogamente, las impedancias pueden expresarse convenientemente en valores porcentuales o fraccionarios. Así, el valor normal o de base de la impedancia es el número de ohm dado por la razón de la tensión normal en volt a la intensidad normal en ampere, y el valor de una impedancia expresado como fracción o como tanto por ciento de la impedancia normal se define como *tanto por uno o por ciento* de la impedancia. Puede también decirse que el tanto por uno de caída de tensión a la intensidad normal es igual al tanto por uno de la impedancia. Por ejemplo, si la resistencia equivalente referida al devanado de alta tensión del transformador de 15 kVA del apartado 4 es 7,05 ohm, la caída óhmica a la intensidad nominal es:

$$6,25 \times 7,05 = 44,1 \text{ V.} \quad (35)$$

Luego, el tanto por uno o por ciento de resistencia viene dado por la ecuación (34). A la intensidad normal de la corriente, el tanto por uno de impedancia y el tanto por uno de caída de tensión en la impedancia son numéricamente iguales.

También la admitancia puede expresarse en tanto por uno o por ciento. Así, la admitancia normal es la razón de la intensidad normal en ampere a la tensión normal en volt, y se define el *tanto por uno* de una admitancia como la razón de su valor al valor normal. También puede decirse que el tanto por uno de intensidad resultante cuando se aplica la tensión normal a un elemento de circuito es igual al *tanto por uno* de su admitancia. Por ejemplo, si el valor de la admitancia de excitación de este transformador de 15 kVA es 0,00708 mho medida desde su lado de baja tensión, la intensidad de la corriente de excitación a la tensión normal es:

$$240 \times 0,00708 = 1,70 \text{ A.} \quad (36)$$

Así, pues, el tanto por uno de admitancia de excitación viene dado por la ecuación (33). A la tensión normal, el tanto por uno de admitancia y el tanto por uno de intensidad de la corriente que conduce la admitancia son numéricamente iguales.

Evidentemente, la potencia real y la aparente pueden también expresarse en tanto por uno o por ciento. Por ejemplo, si la pérdida en el cobre de este transformador de 15 kVA es de 276 W a la intensidad nominal de corriente, es:

$$\frac{276}{15\,000} = 0,0184, \text{ ó sea } 1,84 \% \quad (37)$$

de la potencia aparente de base. Obsérvese que a la intensidad nominal de corriente, el tanto por uno de pérdida en el cobre, el tanto por uno de caída óhmica en la resistencia equivalente y el tanto por uno de resistencia equivalente son numéricamente iguales.

Las relaciones entre los tantos por uno y los valores absolutos en volt-ampere-ohm pueden resumirse de la manera siguiente:

$$\text{Tanto por uno de intensidad} = \frac{\text{intensidad en ampere}}{\text{n.º de ampere de base}} \quad \blacktriangleright (38)$$

$$\text{Tanto por uno de tensión} = \frac{\text{tensión en volt}}{\text{n.º de volt de base}} \quad \blacktriangleright (39)$$

$$\text{Tanto por uno de impedancia} = \frac{\text{impedancia en ohm}}{\text{n.º de ohm de base}} \quad \blacktriangleright (40)$$

$$= \frac{(\text{impedancia en ohm})(\text{n.º de ampere de base})}{\text{n.º de volt de base}} \quad (41)$$

$$\text{Tanto por uno de admitancia} = \frac{\text{admitancia en mho}}{\text{n.º de mho de base}} \quad \blacktriangleright (42)$$

$$= \frac{(\text{admitancia en mho})(\text{n.º de volt de base})}{\text{n.º de ampere de base}} \quad (43)$$

$$\text{Tanto por uno de potencia} = \frac{\text{potencia en kilowatt}}{\text{n.º de kVA de base}} \quad \blacktriangleright (44)$$

Una importante ventaja del sistema de unidades a tanto por uno o por ciento es que transformadores grandes y pequeños de tensiones nominales muy diferentes resultan muy parecidos cuando se expresan sus constantes como tanto por uno o por ciento de sus valores nominales tomados como base. Así, aun cuando la corriente de excitación de un transformador de distribución de 2 kVA, 2 400 V sea menor que 0,1 A, mientras que la corriente de excitación de un transformador de potencia de 20 000 kVA, 13 800 V es de unos 70 A, estas corrientes de excitación, expresadas en tanto por uno o por ciento, son del mismo orden de magnitud. Así, es fácil recordar unos cuantos tantos por uno o por ciento de algunas cantidades importantes, y dichos valores serán correctos aproximadamente tanto para aparatos grandes como pequeños de diseño normal. Así, la corriente de excitación de un transformador cualquiera, de distribución o de potencia, para 60 Hz suele ser del 4-8 %. la pérdida en el núcleo suele ser del 0,5-2 %, la resistencia equivalente (es decir, la pérdida en el cobre a plena carga) suele ser del 0,5-2 %, y la reactancia equivalente (es decir, caída en la reactancia a plena carga) suele ser del 3-10 %. En general, el tanto por ciento de corriente de excitación, de pérdida en el núcleo y de resistencia, disminuye al aumentar el tamaño, y el tanto por ciento de reactancia crece con la tensión.

Cuando se expresan en tanto por ciento o por uno las intensidades, tensiones, impedancias y admitancias de un transformador, éste puede analizarse como de razón 1:1 sin el empleo de factores de reducción para referir las cantidades del primario al secundario, o viceversa; es decir, el tanto por uno de una intensidad, tensión, impedancia o admitancia medida en un lado es también igual a su tanto por uno referido al otro lado. Por ejemplo, si la tensión inducida en el secundario es de E_2 volt, esta tensión referida al primario es de aE_2 volt, siendo a la razón de transformación N_1/N_2 . No obstante, como la tensión nominal del primario es igual al producto de a por la tensión nominal del secundario, aE_2 volt representa el mismo porcentaje de la tensión nominal del primario que E_2 de la del secundario.

Por tanto, el tanto por uno de tensión del secundario es igual también a su tanto por uno referido al primario. La razón de transformación que refiere el número de espiras de un lado al otro, entra en el sistema de unidades a tanto por uno mediante los diferentes valores de las tensiones de base de primario y secundario. Análogamente, si la corriente de secundario tiene una intensidad de I_2 ampere, esta intensidad referida al primario es de I_2/a ampere. Ahora bien, la intensidad nominal del primario es igual al producto de $1/a$ por la intensidad nominal del secundario. Así, pues, I_2/a ampere es el mismo tanto por ciento de la intensidad nominal del primario que I_2 lo es de la intensidad nominal del secundario, o sea, que el tanto por uno de intensidad de corriente en el secundario es también igual a su valor en tanto por uno referido al primario. Análogamente, el valor en tanto por uno de una impedancia o admitancia referida al lado del secundario es también igual a su valor en tanto por uno referido al primario.

Existen otras ventajas de cálculo en el empleo de los tantos por uno o por ciento. Por ejemplo, a la intensidad nominal de la corriente, los valores a tanto por uno de la resistencia R , de la caída óhmica IR y de la pérdida en el cobre I^2R son numéricamente iguales. También los tanto por uno de reactancia X , de caída en la reactancia IX y de volt-ampere reactivos I^2X son numéricamente iguales. Análogamente, a la tensión nominal los tantos por uno de admitancia Y , de intensidad de corriente VY , y de los volt-ampere V^2Y consumidos por una admitancia, son numéricamente iguales. Como los cálculos se realizan a menudo a la tensión e intensidad nominales, estas simplificaciones permiten ahorrar tiempo. Por ejemplo, consideremos la ecuación 14 que expresa la regulación en función de las caídas de tensión en la resistencia y reactancia equivalentes, de la tensión y del factor de potencia. Obsérvese que a la tensión nominal $I_L R_{eq2}/V_2$ e $I_L X_{eq2}/V_2$ son simplemente los valores a tanto por uno de las caídas en la resistencia y reactancia equivalente. Luego, cuando se expresen estas caídas en tanto por uno, la ecuación (14) se reduce a

$$\text{Regulación} = IR_{eq} \cos \theta_L + IX_{eq} \sin \theta_L + \frac{1}{2}(IX_{eq} \cos \theta_L - IR_{eq} \sin \theta_L)^2. \quad (45)$$

donde IR_{eq} e IX_{eq} son las caídas de tensión en la resistencia y reactancia equivalentes expresadas en tanto por uno. A la intensidad nominal, estas caídas de tensión son iguales a los valores a tanto por uno de la resistencia y reactancia equivalentes.

El uso de cantidades expresadas en tanto por uno introduce ciertas simplificaciones en los cálculos de los circuitos trifásicos. * En dichos cálculos aparece frecuentemente el factor $\sqrt{3}$ en las conversiones de cantidades entre fase y fase o entre fase y neutro cuando se realizan los cálculos con volt y ampere. En cambio, cuando se expresan las magnitudes en tantos por uno puede suprimirse este factor. Por ejemplo, si el tanto por uno de tensión respecto al neutro de un sistema trifásico en estrella equilibrado es 1,1 veces el normal (o a tanto por uno), la tensión entre fase y fase es también 1,1 veces la normal (o a tanto por uno). Sin embargo, el valor normal o de base de la tensión entre fase y fase es $\sqrt{3}$ veces mayor que el valor normal de la tensión entre fase y neutro. Es decir, el factor $\sqrt{3}$ queda absorbido por los diferentes valores en volt de la tensión de base para las tensiones entre fase y fase y entre fase y neutro.

* El empleo de cantidades expresadas a tanto por uno en problemas trifásicos se estudia en el apartado 2b del capítulo XXII.

7. EJEMPLO ILUSTRATIVO DEL SISTEMA DE TANTOS POR UNO

Se conecta un transformador de distribución de 100 kVA, 12 000 : 2 400 V, 60 Hz a un colector monofásico de tensión V_B (nominalmente 12 000 V) mediante una línea de alta tensión de impedancia $15,1 + j64,0$ ohm, y suministra potencia

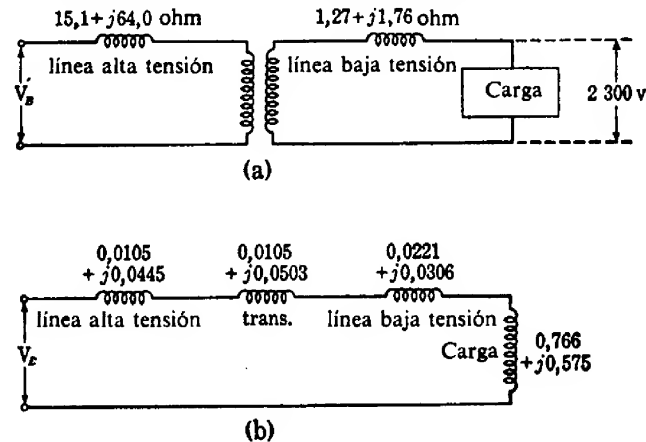


FIG. 4. Circuito para el ejemplo del apartado 7. a) Esquema del circuito. b) Circuito equivalente basado en los tantos por uno.

a una carga inductiva a través de una línea de baja tensión de impedancia $1,27 + j1,76$ ohm, en la forma indicada en la figura 4.

Determinar la tensión del colector V_B necesaria para mantener 2 300 V en la carga cuando por ésta circule la intensidad nominal del transformador con un factor de potencia de 0,80.

Los datos obtenidos de un ensayo en cortocircuito en el que se realizaron las medidas en el lado de baja tensión, son:

$$\begin{aligned} V &= 123 \text{ V} \\ I &= 41,7 \text{ A} \\ P &= 1,05 \text{ kW.} \end{aligned}$$

Solución: Este problema se resuelve en forma conveniente con el empleo de cantidades expresadas a tanto por uno. En consecuencia, el primer paso será expresar todas las constantes del circuito en tantos por uno de los valores nominales del transformador tomados como base. Representando con los subíndices H y X los circuitos de alta y baja tensión, respectivamente,

$$\begin{aligned} V_H \text{ de base} &= 12\,000 \text{ V} & V_X \text{ de base} &= 2\,400 \text{ V} \\ I_H \text{ de base} &= \frac{100\,000}{12\,000} & I_X \text{ de base} &= \frac{100\,000}{2\,400} \\ &= 8,34 \text{ A} & &= 41,7 \text{ A} \\ Z_H \text{ de base} &= \frac{12\,000}{8,34} & Z_X \text{ de base} &= \frac{2\,400}{41,7} \\ &= 1\,440 \text{ ohm} & &= 57,5 \text{ ohm} \end{aligned}$$

De los datos y valores de las impedancias de base resulta que el tanto por uno de impedancia de la línea de alta tensión es

$$\frac{15,1 + j64,0}{1\,440} = 0,0105 + j0,0445 \text{ por unidad de impedancia} \quad (46)$$

y de la línea de baja tensión es

$$\frac{1,27 + j1,76}{57,5} = 0,0221 + j0,0306 \text{ por unidad de impedancia} \quad (47)$$

Convirtiendo los datos de cortocircuito del transformador en tantos por uno:

$$\begin{aligned} V &= \frac{123}{2\,400} = 0,0513 \text{ por unidad de tensión} \\ I &= 1,00 \text{ por unidad de intensidad} \\ P &= \frac{1,05}{100} = 0,0105 \text{ por unidad de potencia} \end{aligned}$$

Como la tensión es la caída en la impedancia a la intensidad normal de corriente, su tanto por uno es igual al de la impedancia equivalente y además, como la potencia es la pérdida en el cobre a la intensidad normal, su tanto por uno es igual al de la resistencia equivalente. Luego, el tanto por uno de reactancia equivalente del transformador es:

$$\sqrt{0,0513^2 - 0,0105^2} = 0,0503 \text{ por unidad de impedancia} \quad (48)$$

El tanto por uno de impedancia equivalente del transformador es:

$$Z_{eq} = 0,0105 + j0,0503 \text{ por unidad de impedancia} \quad (49)$$

El tanto por uno de tensión de carga es:

$$\frac{2\,300}{2\,400} = 0,958 \quad (50)$$

Como la corriente de carga tiene la intensidad nominal, la carga equivale a una impedancia cuyo valor en tanto por uno es igual al de la tensión en la carga. Como el factor de potencia es 0,800 inductivo, el tanto por uno de la impedancia de carga (vectorial) es:

$$0,958(0,800 + j0,600) = 0,766 + j0,575 \text{ por unidad de impedancia} \quad (51)$$

Como la impedancia de la línea de alta tensión sólo es el 0,05 por uno (ec. 46) y un valor razonable de la intensidad de la corriente de excitación del transformador (no consignado) sería un 0,05 por uno, el valor de la caída en la impedancia de la línea de alta tensión debida a la corriente de excitación sería aproximadamente $0,05 \times 0,05 = 0,0025$ por unidad de tensión. Por tanto, el error que se introduce al despreciar la corriente de excitación es insignificante y el transformador se representará por su impedancia equivalente en serie con los alimentadores, como se indica en la figura 4b.

La impedancia del circuito total vista desde las barras de alta tensión es la suma de las cuatro componentes dadas por las ecuaciones (46), (47), (49) y (51), y es

$$0,809 + j0,700 = 1,07/\theta \text{ por unidad de impedancia.}$$

Como la corriente tiene la intensidad normal, este tanto por uno de impedancia es también igual al tanto por uno de tensión en barras del extremo emisor. Luego, la tensión en barras V_B es

$$\begin{aligned} V_B &= 1,07 \text{ por unidad de tensión} \\ &= 1,07 \times 12\,000, \text{ o sea, } 12\,850 \text{ V} \end{aligned} \quad (52)$$

8. VALORES NOMINALES DE LOS TRANSFORMADORES DE POTENCIA Y DE DISTRIBUCIÓN

Las condiciones de funcionamiento para las cuales se diseña un transformador constituyen sus *valores nominales*. En el caso de una transformación de potencia o de distribución, estas condiciones son la frecuencia, tensiones eficaces de primario y secundario y capacidad de potencia aparente (kVA) normales. Este último valor es al que más frecuentemente se hace referencia en el lenguaje técnico. Los valores nominales de un transformador están limitados por la temperatura que alcanzan los materiales aislantes debida al calor desprendido a causa de las pérdidas en el transformador. Los valores nominales consignados en la placa indicadora de la mayoría de tipos transformadores dan la carga que puede transportar el transformador en forma continua sin deteriorarse ni acortar su duración, a altitudes no superiores a 1 000 m con aire que circule libremente en su derredor que tenga una temperatura máxima de 40°C y una temperatura media en 24 horas de 30°C. Las temperaturas excesivas de los aislantes debidas a sobrecargas fuertes, originan el deterioro de los aislantes y acortan la vida del transformador. * Por otra parte, si se sobrecarga un transformador durante períodos cortos, el calor específico de sus partes metálicas da lugar a una gran capacidad de absorción del calor, por lo que las sobrecargas temporales no originan una temperatura tan elevada de los devanados como la que se alcanzaría si la sobrecarga fuera continuada. ** La American Standard Association ha aprobado, a título de ensayo, las curvas indicadas en las figuras 5 y 6 para los multiplicadores para sobrecargas de corta duración, que son aplicables a los valores nominales para carga continua de los transformadores fabricados a partir de 1939. Si el transformador funciona en aire ambiente que se halle a menos de 30°C, se permiten los siguientes incrementos de carga, de acuerdo con las normas A.S.A. propuestas: ⁵

1. Los transformadores autorrefrigerados de inmersión en aceite pueden cargarse continuamente un 1 % por encima de los kVA nominales por cada grado centígrado que se halle por debajo de los 30°C la temperatura media diaria del medio refrigerante (aire).

2. Un transformador autorrefrigerado, de inmersión en aceite, con refrigeración por aire forzado puede cargarse en forma continua por encima de los kVA nominales correspondientes a la refrigeración por aire forzado un 1 % de sus kVA nominales correspondientes a la autorrefrigeración por cada grado centígrado que se halle por debajo de 30°C la temperatura media diaria del medio refrigerante (aire). Por ejemplo, si el valor nominal para autorrefrigeración es 10 000 kVA y el correspondiente a refrigeración por

* Véase el apartado 1 del capítulo VIII.

** Véase el apartado 6 del capítulo VIII.

⁵ American Engineering and Industrial Standards, «No 557: Proposed American Standards: Transformers, Regulators, and Reactors (New York: American Standards Association, 1940), párrafo 11004 (c), págs. 87.

aire forzado es 13 333 kVA, la carga continua permisible con una temperatura media diaria de 0°C sería $13\,333 + (0,30 \times 10\,000) = 16\,333$ kVA con refrigeración por aire forzado. Este incremento asciende al 0,75 % de su valor nominal para refrigeración por aire forzado por cada grado centígrado que la temperatura ambiente se halle por debajo de 30°C.

3. Los transformadores de inmersión en aceite refrigerados por agua pueden cargarse en forma continua un 1 % sobre los kVA nominales por cada grado centígrado que la temperatura media diaria del medio refrigerante (agua) se halle por debajo de 25°C.

4. No son recomendables cargas continuas superiores al 130 % de los kVA nominales, aun cuando la temperatura del aire fuera inferior a 0°C, ni cargas continuas superiores al 125 % de los kVA nominales en el caso de transformadores refrigerados por agua.

El efecto de la temperatura del aire que rodea al transformador, llamada técnicamente *temperatura ambiente*, constituye un elemento importante en el funcionamiento de los transformadores. En el norte de los Estados Unidos, los picos de carga en los transformadores de potencia suelen presentarse durante los meses de invierno. Es posible, entonces, aprovechar la mayor capacidad de carga de los transformadores que funcionan al aire libre y emplear transformadores menores que los que sería posible en un clima más cálido. En la época de Navidad, muchos transformadores de potencia transportan cargas máximas extraordinarias durante algunas horas cada noche durante una semana. Si fuera necesario instalar transformadores mayores en todos los lugares a fin de subvenir a las necesidades que representan estas cargas máximas de Navidad tan intensas, el gasto inherente sería enormemente elevado. Desde luego, hay que instalar transformadores especiales que contribuyan a la capacidad total, tales como para el alumbrado decorativo de las principales vías comerciales, o para zonas residenciales en las que se instalen alumbrados navideños extraordinariamente intensos.

En muchas compañías suministradoras, se tiende a utilizar durante los cortos períodos de carga máxima, transformadores de distribución sobrecargados dentro de los límites señalados por las curvas de las figuras 5 y 6. Como ejemplo, damos el siguiente: Una compañía registra las siguientes mejoras en el uso económico de la capacidad del transformador conectado a ciertos circuitos de distribución, durante un período de tres años:

Año	Capacidad del transformador de distribución, kVA	Demanda adicional de máxima potencia aparente de los circuitos que intervienen, kVA	Factor de utilización
1932	74 782	41 175	0,55
1935	70 415	47 224	0,67

Al realizar mejoras en la utilización de los transformadores, los técnicos de la compañía esperan que algunos de los transformadores se sobrecarguen suficientemente para producir fallos ocasionales. Se cree que es más económico tener algunos fallos

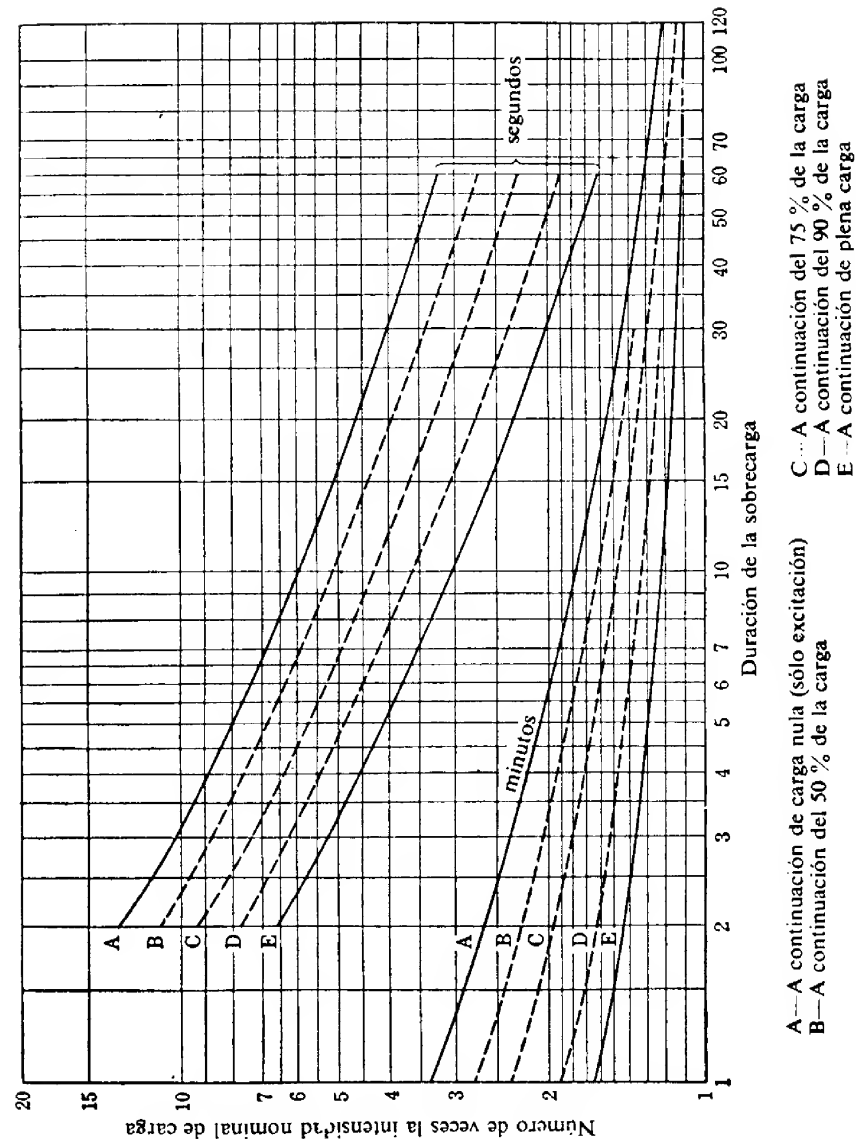


Fig. 5. Sobrecargas cortas recurrentes para transformadores de inmersión en aceite de más de 100 kVA, autorrefrigerados con aire a 30°C, o refrigerados por agua a 25°C. Para transformadores de inmersión en aceite refrigerados por aire forzado, utilícese el 75 % del incremento sobre la intensidad nominal de la corriente de carga que indican estas curvas. (Una sobrecarga corta recurrente es una impuesta ocasionalmente, a intervalos no inferiores a una vez cada 24 horas, aproximadamente).

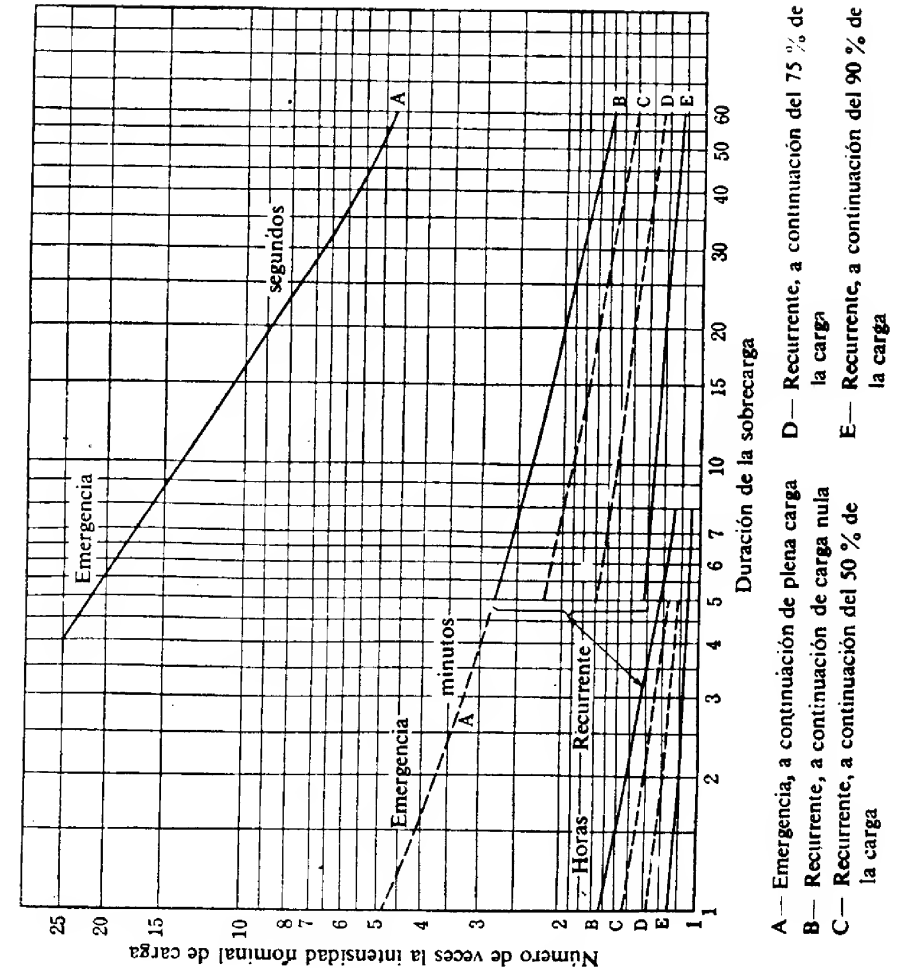


Fig. 6. Sobrecargas cortas para transformadores de inmersión en aceite, de 100 kVA y menores, por debajo de los 15 000 V; y para transformadores de red de 500 kVA y menores, autorrefrigerados por aire a 30°C, o por agua a 25°C. Para transformadores de inmersión en aceite refrigerados por aire forzado, empléese el 75 % del incremento sobre la intensidad nominal de la corriente de carga que indican estas curvas. (Una sobrecarga corta recurrente es una impuesta ocasionalmente, a intervalos no inferiores a una vez cada 24 horas, aproximadamente).

a causa de sobrecargas que evitarlos haciendo funcionar varios transformadores a capacidad reducida.

Sobre la conveniencia de sobrecargar los transformadores existen dos consideraciones que ejercen una influencia negativa: la regulación de tensión y el crecimiento futuro de la carga. Como la caída de tensión en la impedancia de un transformador crece con la carga, la carga máxima permisible podrá estar limitada por la caída de tensión tanto como por el calentamiento. Durante los picos de carga, las caídas de tensión en los conductores del secundario y en el cableado de los edificios son máximas; luego la caída de tensión máxima simultánea en el transformador puede ser una limitación de la calidad del servicio. Por lo que respecta al crecimiento de la carga, en la selección del transformador debe considerarse cualquier incremento de carga que pueda considerarse razonablemente cierto con una anticipación de unos dos años. Por ejemplo, en una zona en que se van adoptando rápidamente cocinas eléctricas y otros aparatos electrodomésticos, el sentido común indica que hay que instalar los transformadores con un cierto margen de capacidad a fin de poder atender al incremento de carga previsible para un futuro próximo.

PROBLEMAS

1. Demostrar que la ecuación (14) para la regulación a plena carga puede ponerse en la forma

$$\text{Regulación} = \frac{V_{sc}}{V_2} \cos(\theta_{sc} - \theta_L) + \frac{1}{2} \left[\frac{V_{sc}}{V_2} \sin(\theta_{sc} - \theta_L) \right]^2, \quad (53)$$

donde V_{sc} es la tensión entre terminales del secundario correspondiente a la intensidad nominal de la corriente con el primario cortocircuitado, V_2 es la tensión nominal entre terminales del secundario, θ_L es el ángulo del factor de potencia de la carga (considerado positivo para corriente retrasada), y $\theta_{sc} = \arccos \frac{P_{sc}}{V_{sc} I_{sc}}$, donde P_{sc} e I_{sc} son, respectivamente, la potencia de entrada y la intensidad de la corriente en la condición especificada de cortocircuito.

2. Dígase si es verdad que el tanto por ciento de regulación de tensión de un transformador es exactamente el mismo, independientemente de cual de los dos devanados sea el secundario. Probar la conclusión enunciada.

3. Un transformador de 5 000 kVA, 60 Hz, 69 200 : 19 020 V consume 14 000 W, y 3,65 A cuando funciona a la frecuencia y tensión de secundario nominales (19 020 V) con el primario en circuito abierto. Cuando funciona a la tensión e intensidad de corriente de primario nominales con el secundario cortocircuitado, el transformador consume 32 000 kVA a 5 220 V.

a) Calcular el tanto por ciento de regulación de tensión de este transformador para una carga inductiva de 4 600 kW a la tensión nominal del secundario y factor de potencia 0,91.

b) Calcular el rendimiento del transformador cuando suministra la carga indicada en a). Despréciense las variaciones con la temperatura de la pérdida en la carga.

4. Los siguientes datos se obtuvieron ensayando a 25°C un transformador de distribución de 10 kVA, 60 Hz, 2 400 : 240 V.

	Frecuencia	Tensión	Intensidad	Potencia
Devanados de alta tensión en circuito abierto	60 Hz	240 V	0,533 A	63,3 W
Terminales de baja tensión cortocircuitados	60	57,7	4,17	142

$$R_{cc1} = 3,68 \text{ ohm}$$

$$R_{cc2} = 0,0428 \text{ ohm}$$

a) Representar gráficamente el tanto por ciento de regulación de tensión en función del factor de potencia a la tensión y potencia aparente de salida nominales para valores del factor de potencia comprendidos entre 0,5 retrasada y 0,5 adelantada.

b) Representar gráficamente el rendimiento convencional de este transformador a la potencia aparente de salida nominal en función del factor de potencia para las condiciones especificadas en la parte a).

5. Un transformador de 1 000 kVA, 60 Hz, 66 000 : 11 000 V tiene una impedancia equivalente de $1,0 + j4,9$ ohm, referida al lado de baja tensión, y una pérdida en vacío de 5 500 W a la tensión nominal entre terminales.

a) Cuando funciona este transformador a la frecuencia y tensión nominal del secundario, ¿a qué potencia aparente de salida presenta un máximo su rendimiento?

b) ¿Cuál es el valor del rendimiento máximo?

c) Si el transformador suministra su potencia aparente nominal a la tensión nominal a una carga de factor de potencia variable, ¿a qué factor de potencia de la carga es nula la regulación de tensión?

6. El transformador cuyos datos se consignan en el problema 5 funciona a la tensión nominal del secundario siguiendo un ciclo de carga representado por los siguientes valores:

Horas	Tanto por ciento de carga en kVA	Factor de potencia
1	125	0,80
2	100	0,84
1	50	0,90
5	12	0,98
15	0	—

a) ¿Cuál es el rendimiento energético del transformador?

b) ¿Cuál sería el rendimiento energético si la resistencia equivalente fuese al 150 % del valor dado en el problema 5?

7. La demanda media de carga para un periodo de 24 horas de un transformador monofásico de 500 kVA, 60 Hz, 11 000 : 2 300 V es la indicada en la figura 7. Cuando se ensaya el transformador en circuito abierto con una tensión de 2 300 V aplicada al secundario a la frecuencia nominal, la potencia de entrada es de 2 960 W. Cuando se ensaya en cortocircuito aplicando al primario 345 V a la frecuencia nominal, la potencia de entrada es de 3 370 W y la intensidad de la corriente de 45,5 A.

Determinar el rendimiento energético del transformador, suponiendo que la tensión del secundario se mantiene a su valor nominal.

8. Un transformador de 1/2 kVA, 60 Hz, 220 : 110 V tiene una resistencia de primario de 0,970 ohm, una inductancia de fuga del primario de 12,8 mH y una intensidad de la corriente de excitación a tensión normal del 0,100 por uno a un factor de potencia de 0,100. El primario es el devanado de tensión más elevada. Un ensayo con el primario cortocircuitado da una potencia de 0,02 por uno a 11 V con una intensidad de corriente del 100 %.

a) Mientras el transformador funciona bajo una carga inductiva desconocida, la tensión, intensidad y potencia del primario son, respectivamente, 200 V, 3 A y 500 W. Hallar la tensión en terminales, intensidad de corriente del secundario y el factor de potencia de la carga.

b) Hallar la regulación a plena carga, factor de potencia unidad y tensión nominal del secundario.

c) Hallar el rendimiento para las condiciones de (b).

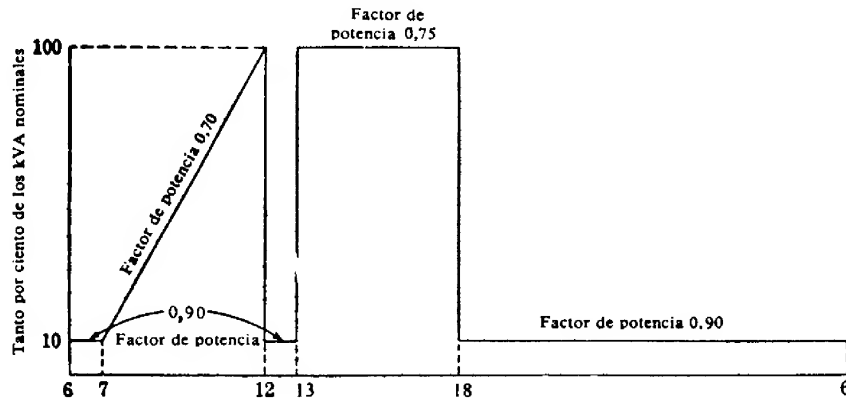


FIG. 7. Curva carga-demanda, problema 7.

9. Una subcentral suministra potencia a una carga inductiva a través de una línea de distribución corta terminada en cada extremo por transformadores en la forma indicada en la figura 8. La carga consume 80 kVA a un factor de potencia de 0,90 y 230 V, y la línea

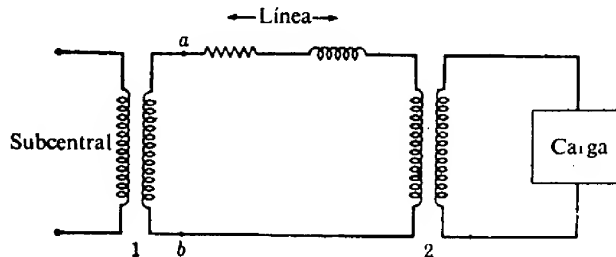


FIG. 8. Circuito de distribución, problema 8.

tiene una impedancia de $0,20 + j0,36$ ohm. El transformador número 1 es de 150 kVA, 60 Hz y 13 800 : 2 300 V. El transformador número 2 es de 100 kVA, 60 Hz y 2 300 : 230 V. Ensayos convencionales en cortocircuito de los transformadores dan los datos siguientes:

DATOS EN CORTOCIRCUITO

	Transformador N.º 1	Transformador N.º 2
Frecuencia	60 Hz	60 Hz
Tensión en terminales primario	0,060	0,054
Intensidad de la corriente	1,0	1,0
Potencia de entrada	0,010	0,012

Todos los valores excepto el de la frecuencia están dados en tanto por uno. La base para todo valor en tanto por uno es el valor nominal correspondiente del transformador.

a) Determinar el tanto por ciento de regulación de tensión en la carga.

b) Entre los puntos *a* y *b* se conecta otra línea de distribución que transporta una carga constante de 60 kVA con factor de potencia unidad. Determinar el tanto por ciento de variación de la tensión entre *a* y *b* correspondiente a una variación de la carga original desde cero hasta 80 kVA. La tensión de la subcentral se mantiene constante a un valor que da 230 V en la carga original cuando ésta es de 60 kVA.

10. La pérdida en el núcleo a la tensión y frecuencia nominales del transformador número 1 del problema 9 es del 0,011 por uno; la del transformador número 2 es del 0,009 por uno. Las bases para los valores unitarios son los kVA nominales de los transformadores. Para la tabla de carga indicada a continuación, determinar el rendimiento energético del sistema de distribución del problema 9 a.

Horas	Carga, kVA	Factor de potencia
9 : 00-12 : 00	90	0,9
12 : 00-14 : 00	50	0,9
14 : 00-16 : 00	90	0,9
16 : 00-17 : 00	20	0,95
17 : 00- 9 : 00	—	—

Supóngase que se regula la tensión de la subcentral para mantener en la carga la tensión nominal y que las pérdidas en el núcleo de los transformadores son proporcionales a los cuadrados de sus tensiones de secundario. Supóngase que los transformadores funcionan continuamente, y que la carga es despreciable desde las 17 : 00 a las 9 : 00 del día siguiente.

Autotransformadores

Un transformador ordinario de dos circuitos cuyos devanados 1 y 2 se conecten en serie, tal como se indica en la figura 1, recibe el nombre de *autotransformador*. El devanado 1 suele llamarse *devanado serie* y el devanado 2 *devanado común*. Los autotransformadores pueden utilizarse para transformar potencia disponible a una tensión V_H en potencia a una tensión inferior V_X , o al revés. Aun cuando el análisis de este capítulo se realiza en la hipótesis de que el transformador entrega potencia al lado de baja tensión, las conclusiones son independientes del sentido en que se transmita la potencia.

1. RELACIONES DE TENSIONES Y CORRIENTES

En la figura 1 puede verse que la tensión V_X en el lado de baja tensión es la tensión entre terminales V_2 del devanado común y que la tensión V_2 del lado de alta tensión es la suma vectorial de las tensiones en los terminales de los devanados serie y común; es decir

$$V_X = V_2 \quad \blacktriangleright (1)$$

$$V_H = V_1 + V_2. \quad \blacktriangleright (2)$$

Las tensiones V_1 y V_2 difieren de las tensiones inducidas por el flujo resultante en el núcleo, tan sólo en las caídas de tensión relativamente pequeñas que se producen en las reactancias de fuga de los devanados. Como las tensiones inducidas E_1 y E_2 están en concordancia de fase, las tensiones entre terminales V_1 y V_2 también están casi en fase y la suma vectorial de las tensiones en los devanados expresada en la ecuación (2) resulta casi igual, en módulo, a la suma de los módulos. La tensión inducida E_X que aparece en el circuito de baja tensión es la tensión inducida E_2 en el devanado común, y la tensión E_H que aparece en el circuito de alta tensión es la combinación serie de las tensiones inducidas en los dos devanados; así,

$$E_X = E_2 \quad (3)$$

$$E_H = E_1 + E_2. \quad (4)$$

Las tensiones inducidas E_1 y E_2 son proporcionales a los números de espiras N_1 y N_2

de los devanados serie y común, respectivamente y están en concordancia de fase en los sentidos positivos indicados en la figura 1, de donde,

$$E_1 = \frac{N_1}{N_2} E_2, \quad (5)$$

y de las ecuaciones (3), (4) y (5),

$$E_H = E_2 \left(\frac{N_1}{N_2} + 1 \right) = \frac{N_1 + N_2}{N_2} E_X. \quad (6)$$

La razón de transformación entre los circuitos de alta y baja tensión es E_H/E_X y difiere solamente de la razón entre las tensiones terminales en los efectos de las pequeñas caídas de tensión en las impedancias de fuga; es decir,

$$\frac{V_H}{V_X} \approx \frac{E_H}{E_X} = \frac{N_1 + N_2}{N_2}. \quad (7)$$

También puede verse en la figura 1 que la corriente I_H en el circuito de alta tensión es la corriente I_1 en el devanado serie y que la corriente I_X en el circuito de baja tensión es la suma vectorial de la corriente I_1 en el devanado serie más la corriente I_L en el devanado común; es decir,

$$I_H = I_1 \quad \blacktriangleright (8)$$

$$I_X = I_1 + I_L. \quad \blacktriangleright (9)$$

Si se desprecia la corriente de excitación, las corrientes que circulan por los devanados crean fuerzas magnetomotrices iguales y opuestas; de donde la relación entre las corrientes directamente opuestas I_1 e I_L que circulan por los devanados es:

$$N_1 I_1 \approx N_2 I_L. \quad (10)$$

Las corrientes que circulan por los devanados se hallan casi en concordancia de fase, por lo que su suma vectorial de la ecuación (9) es, en módulo, casi igual a la suma de los módulos. De las ecuaciones (8), (9) y (10), la relación entre las corrientes que circulan por los circuitos exteriores es, muy aproximadamente,

$$I_X \approx I_1 \left(1 + \frac{N_1}{N_2} \right) = \frac{N_1 + N_2}{N_2} I_H, \quad (11)$$

o sea,

$$\frac{I_H}{I_X} \approx \frac{N_2}{N_1 + N_2}. \quad (12)$$

► Desde el punto de vista de la estructura, la única diferencia entre un autotransformador y un transformador ordinario de dos circuitos estriba en que el devanado serie del autotransformador debe estar aislado para una tensión igual a la tensión a tierra del circuito de alta tensión —tensión mayor que la inducida en el devanado mismo—. En todos los demás aspectos, un autotransformador no es más

que un transformador ordinario de dos devanados conectados de manera que queden en serie. El comportamiento interno del autotransformador no es diferente del transformador ordinario de dos circuitos, pero a causa del método de conexión las relaciones entre las tensiones y las corrientes en los circuitos exteriores y las que circulan por los devanados son las dadas en las ecuaciones (1), (2), (8) y (9). ◀

Las características sobresalientes de los autotransformadores pueden deducirse fácilmente comparando los valores nominales, pérdidas, corriente de excitación y características de impedancia de un transformador de dos circuitos cuando se conectan como autotransformador, con las características correspondientes cuando se conecta como transformador ordinario de dos circuitos.

2. VALORES NOMINALES

Consideremos un transformador cuyos valores nominales como transformador ordinario de dos circuitos sean 100 kVA, 11 500 : 2 300 V. Si conectamos sus devanados en la forma indicada en la figura 2, este transformador podrá utilizarse como autotransformador con tal que haya suficiente aislamiento entre el devanado de 2 300 V y tierra.

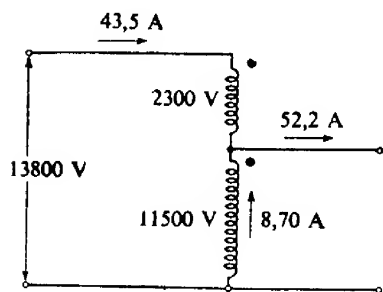


FIG. 2. Transformador con devanados de 2 300 V y 11 500 V conectados como autotransformador de 13 800 : 11 500 V.

Si la tensión entre terminales del devanado de 11 500 V tiene su valor nominal, la tensión entre terminales del devanado de 2 300 V tendrá un valor muy próximo al suyo nominal, ya que las caídas de tensión en las impedancias de fuga suelen ser muy pequeñas. Como las tensiones en los devanados están casi en concordancia de fase, la tensión en el circuito de alta tensión es muy aproximadamente igual a la suma de las tensiones en los devanados, o sea, 13 800 V. Por tanto, cuando este transformador se conecte

como autotransformador, podrá servir para interconectar dos circuitos cuyas tensiones nominales sean 13 800 V y 11 500 V.

La intensidad nominal de la corriente que circula por el devanado de 2 300 V es:

$$\frac{100\,000}{2\,300} = 43,5 \text{ A.} \quad (13)$$

Si circula esta corriente por el devanado serie y es despreciable la corriente de excitación, la corriente que circula por el devanado común tendrá su intensidad nominal de

$$\frac{100\,000}{11\,500} = 8,70 \text{ A.} \quad (14)$$

Como las corrientes directamente opuestas que circulan por los devanados están casi en concordancia de fase, la intensidad I_X de la corriente que circula por el cir-

cuito exterior de baja tensión es casi igual a la suma aritmética de las intensidades de las corrientes que circulan por los devanados serie y común, o sea, 52,2 A.

Si el transformador suministra potencia al circuito de baja tensión, la potencia aparente de salida es:

$$\frac{11\,500 \times 52,2}{1\,000} = 600 \text{ kVA.} \quad (15)$$

Si se desprecian las caídas de tensión en las impedancias de fuga y la corriente de excitación, la potencia aparente de salida será igual también a la de entrada procedente del circuito de alta tensión, o sea,

$$\frac{13\,800 \times 43,5}{1\,000} = 600 \text{ kVA.} \quad (16)$$

► Este transformador, cuya potencia nominal como transformador de dos circuitos es sólo de 100 kVA, es, por tanto, capaz de transformar 600 kVA conectado como autotransformador. ◀

En un transformador ordinario de dos circuitos, toda la potencia entregada en los terminales de baja tensión se transmite por inducción electromagnética desde el lado de alta tensión al de baja. El autotransformador posee la importante propiedad de que sólo una parte de la potencia se transmite por inducción electromagnética. En este ejemplo, el único cambio que se pide al transformador es una reducción de tensión de 2 300 V y un incremento de intensidad de 8,70 A. La reducción de tensión es la fracción

$$\frac{2\,300}{13\,800} = \frac{1}{6} \quad (17)$$

de la tensión de entrada, o en general la fracción

$$\frac{E_1}{E_1 + E_2} = \frac{E_H - E_X}{E_H} \quad (18)$$

de la tensión del lado de alta tensión, donde E_1 , E_2 son las tensiones nominales de los devanados y E_H , E_X las tensiones nominales de los circuitos exteriores. Cuando son despreciables las caídas de tensión en las impedancias de fuga, estas tensiones nominales son iguales a las tensiones inducidas.

En general, si las intensidades y tensiones tienen sus valores correspondientes a plena carga, la potencia aparente nominal del devanado serie es:

$$E_1 I_1 = (E_H - E_X) I_H, \quad (19)$$

que es también la potencia aparente nominal del devanado común. Este es el valor nominal del transformador cuando se utiliza como transformador ordinario de dos circuitos. En cambio, el valor nominal como autotransformador es $E_H I_H$. Luego estos dos valores nominales dan la razón,

$$\frac{\text{Valor nominal como autotransformador}}{\text{Valor nominal como transformador de 2 circuitos}} = \frac{E_H}{E_H - E_X} \quad \text{►} (20)$$

En este ejemplo, el valor nominal como autotransformador es:

$$\frac{13\,800}{13\,800 - 11\,500} = 6 \quad (21)$$

veces el valor nominal como transformador de dos circuitos. Es decir, este dispositivo, cuya potencia nominal como transformador de dos circuitos es solamente de 100 kVA, tiene una potencia de 600 kVA cuando se conecta como autotransformador y es por tanto equivalente a un transformador de dos circuitos de 600 kVA. Evidentemente, el autotransformador es menor y cuesta menos que el transformador de dos circuitos de 600 kVA. Los tamaños relativos de las partes, el peso y el costo de un autotransformador comparados con los de un transformador de dos circuitos para la misma aplicación dependen de la razón $(E_H - E_X)/E_H$.

3. PÉRDIDAS Y RENDIMIENTO

Por otra parte, el rendimiento es más elevado cuando se realiza la conexión de autotransformador. Por ejemplo, si el rendimiento del transformador de 100 kVA a plena carga con factor de potencia unidad es 0,9825 cuando se conecta como transformador de dos circuitos, sus pérdidas son:

$$\frac{0,0175 \times 100}{0,9825} = 1,78 \text{ kW.} \quad (22)$$

Cuando se conecta como autotransformador, sus pérdidas a plena carga siguen siendo 1,78 kW, pero estas pérdidas son ahora solamente

$$\frac{1,78}{601,78} = 0,00296 \quad (23)$$

de la potencia de entrada. En consecuencia, su rendimiento a plena carga con factor de potencia unidad como autotransformador es 0,99704. ¡Casi perfecto! En general, el cociente entre el tanto por ciento o por uno de pérdidas de un transformador dado conectado como autotransformador y sus pérdidas como transformador ordinario de dos circuitos es el recíproco del cociente entre las potencias nominales para estas dos conexiones. Así, pues, por la ecuación (20).

Pérdidas a plena carga en % del valor nominal del autotransformador
Pérdidas a plena carga en % del valor nominal del transformador de 2 circuitos

$$= \frac{E_H - E_X}{E_H} \quad (24)$$

En la figura 3 puede verse la variación de $(E_H - E_X)/E_H$ con el cociente E_H/E_X . Así, pues, cuando la razón de transformación E_H/E_X entre los circuitos de alta y baja tensión es inferior a 2 : 1, la variación unitaria de tensión $(E_H - E_X)/E_H$ que puede dar el transformador es menor que $1/2$. Por tanto, el ahorro de tamaño y costo y el aumento del rendimiento cuando se utiliza un autotransformador en vez de un trans-

formador de dos circuitos puede ser importante cuando E_H/E_X sea inferior a 2, si bien estas ventajas del autotransformador no son tan significativas para valores mayores de la razón de transformación E_H/E_X .

4. CORRIENTE DE EXCITACIÓN

La corriente de excitación tiene menos importancia cuando el transformador funciona como autotransformador que cuando lo hace como transformador de dos circuitos. Si las tensiones de los devanados tienen sus valores nominales a carga nula, el flujo en el núcleo tiene su valor nominal y los ampere-espira totales en vacío son

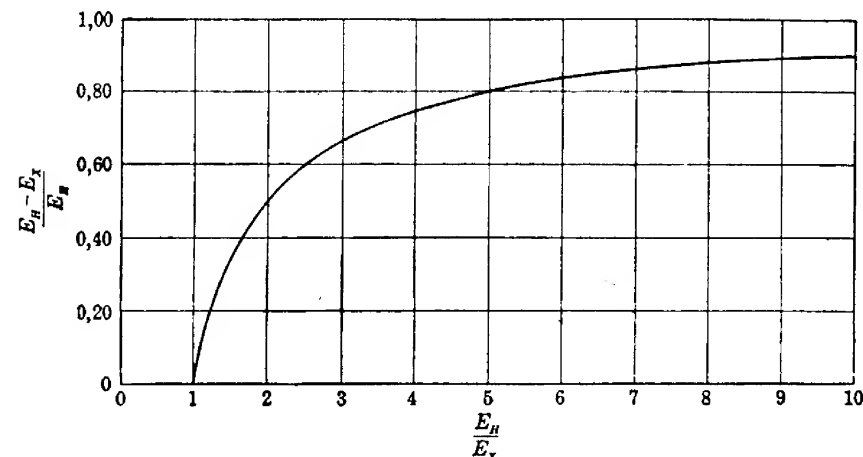


Fig. 3. Variación unitaria de tensión $\frac{E_H - E_X}{E_H}$ en función de la razón de tensiones de los circuitos E_H/E_X .

los mismos tanto si el transformador está conectado como autotransformador como si lo está como transformador ordinario de dos circuitos. La corriente de excitación varía inversamente con el número de espiras por las que circula la corriente de excitación. Como las tensiones nominales son proporcionales a los números de espiras, los volt-ampere de excitación a la tensión normal son los mismos tanto si el transformador está conectado como autotransformador como si lo está como transformador ordinario de dos circuitos. Por ejemplo, si los volt-ampere de excitación del transformador de 100 kVA de la figura 2 funcionando como transformador de dos circuitos son el 3 %, o sea 3 kVA sus volt-ampere de excitación conectado como autotransformador siguen siendo 3 kVA. No obstante, esto no es más que el 0,5 % de su potencia nominal de 600 kVA que tiene funcionando como autotransformador. En general, se deduce de la ecuación (20) que,

$$\frac{I_\phi \text{ en \% como autotransformador}}{I_\phi \text{ en \% como transformador de dos circuitos}} = \frac{E_H - E_X}{E_H} \quad (25)$$

Esta relación es aplicable a un transformador dado conectado como autotransformador o como transformador de dos circuitos. Es sólo aproximadamente la razón de la corriente de excitación de un autotransformador a la de un transformador de dos circuitos diferentes pero de igual valor nominal, ya que el porcentaje de la corriente de excitación en los diseños normales varía algo con el tamaño.

El despreciar la corriente de excitación en un transformador ordinario de dos circuitos suele introducir un error pequeño, excepto en el análisis de problemas relacionados directamente con los fenómenos de excitación, especialmente de aquellos en los que interviene el comportamiento de los armónicos. Como, por lo general, la corriente de excitación de un autotransformador es muy débil, el despreciarla introduce un error aún menor.

5. CIRCUITOS EQUIVALENTES Y FENÓMENOS DE IMPEDANCIA

Si se desprecia la no linealidad de las características de excitación, el autotransformador puede representarse por uno de los circuitos de la figura 4. Según el teorema de Thévenin, el autotransformador visto desde sus terminales de baja tensión

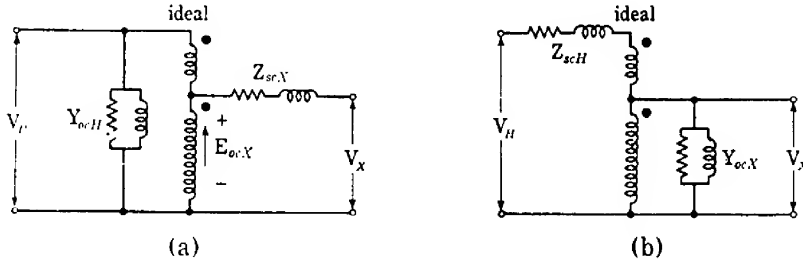


FIG. 4. Circuitos equivalentes «exactos» de un autotransformador

equivale a una fuerza electromotriz igual a la tensión en circuito abierto E_{ocX} medida entre los terminales de baja tensión, en serie con la impedancia Z_{scX} medida entre los terminales de baja tensión con los terminales de alta cortocircuitados, como en la parte de la derecha del transformador ideal de la figura 4a. Si la razón de transformación del transformador ideal es V_H/E_{ocH} , la tensión en sus terminales de alta es igual a la alta tensión V_H del autotransformador real. Esta razón de tensiones en circuito abierto es muy aproximadamente igual a $(N_1 + N_2)/N_2$, donde N_1 y N_2 son los números de espiras de los devanados serie y común, respectivamente. Puede demostrarse que si se conecta entre los terminales de alta del autotransformador ideal la admitancia en circuito abierto Y_{ocH} medida desde el lado de alta tensión del transformador real, el circuito de la figura 4a es un circuito equivalente «exacto» del autotransformador tanto para el lado de alta tensión como para el de baja. Evidentemente, si se realizan las medidas en circuito abierto en el lado de baja tensión y las medidas en cortocircuito desde el lado de alta tensión, también el circuito de la figura 4b será un circuito equivalente «exacto» del autotransformador. Cuando se desprecia la corriente de excitación, los circuitos equivalentes «exactos» de la figura 4 se reducen a los circuitos equivalentes aproximados

de la figura 5. Los circuitos equivalentes son útiles para la determinación del comportamiento externo de los autotransformadores como elementos de circuito.

Interiormente, el autotransformador es exactamente igual que un transformador ordinario de dos circuitos, y por tanto, pueden deducirse circuitos equivalentes de la teoría de los transformadores de dos circuitos. En el estudio que sigue, daremos esta otra manera de deducción a fin de poner de manifiesto las relaciones entre el autotransformador y el transformador ordinario de dos circuitos.

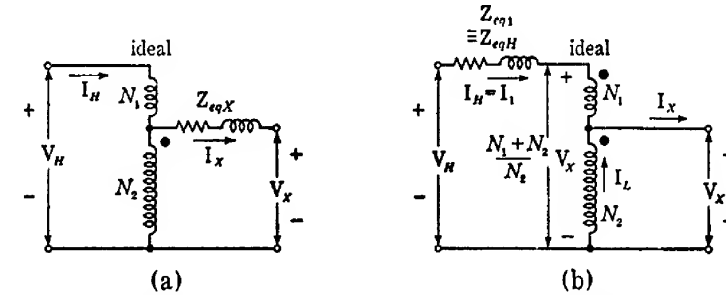


FIG. 5. Circuitos equivalentes aproximados de un autotransformador

Si se desprecia la corriente de excitación, la relación entre las tensiones terminales V_1 y V_2 de los devanados se puede escribir en función de las corrientes que circulan por ellos, de la impedancia equivalente entre devanados y de la razón de transformación. Así, pues, como en la teoría del transformador de dos circuitos,

$$V_1 = I_1 Z_{eq1} + \frac{N_1}{N_2} V_2, \quad (26)$$

donde $(N_1/N_2)V_2$ es la tensión entre los terminales del devanado común, referida al devanado serie. Excepto a los efectos de la corriente de excitación, la impedancia equivalente Z_{eq1} es igual a la impedancia en cortocircuito, medida entre los terminales del devanado serie con el devanado común cortocircuitado, como en la teoría del transformador de dos circuitos. Sumando V_2 a ambos miembros de la ecuación (26),

$$V_1 + V_2 = I_1 Z_{eq1} + \frac{N_1 + N_2}{N_2} V_2. \quad (27)$$

En esta ecuación $V_1 + V_2$ es igual a la tensión V_H entre los terminales de alta tensión cuando se conecta el transformador como autotransformador (véase Fig. 1), I_1 es la corriente I_H que circula por el circuito de alta tensión, y V_2 es la tensión V_X entre los terminales de baja. Así, la ecuación que relaciona las tensiones entre los terminales externos de un autotransformador puede escribirse en la forma,

$$V_H = I_H Z_{eq1} + \frac{N_1 + N_2}{N_2} V_X. \quad (28)$$

Esta ecuación para el transformador, es también aplicable al circuito equivalente de la figura 5b, consistente en una impedancia Z_{eq1} en serie con un autotransformador ideal. Si la corriente de excitación es despreciable, la relación entre las co-

rientes que circulan por los circuitos de alta y baja tensión del autotransformador es, en virtud de la ecuación (12),

$$I_H = \frac{N_2}{N_1 + N_2} I_X, \quad (29)$$

como en el autotransformador ideal de la figura 5b. Por tanto, el circuito equivalente de la figura 5b, representa correctamente al autotransformador.

La ecuación (29) pone de manifiesto que la impedancia equivalente Z_{eqH} del autotransformador, referida a su lado de alta tensión, es la misma que la impedancia equivalente Z_{eq1} referida al devanado serie cuando el transformador funciona como transformador ordinario de dos circuitos; es decir,

$$Z_{eqH} \equiv Z_{eq1}. \quad (30)$$

Esta impedancia puede determinarse midiendo la impedancia entre los terminales del devanado serie con el devanado común cortocircuitado, como en el ensayo de un transformador ordinario de dos circuitos. También puede determinarse cortocircuitando los terminales de baja tensión del autotransformador y aplicando una tensión reducida a los terminales de alta. Debido al cortocircuito, la tensión queda aplicada directamente al devanado serie, por lo que en estos dos ensayos se mide la misma impedancia.

A veces puede obtenerse un circuito equivalente más conveniente, refiriendo la impedancia equivalente al circuito de baja tensión. Multiplicando la ecuación 28 por $N_2/(N_1 + N_2)$, el resultado puede expresarse en la forma,

$$\frac{N_2}{N_1 + N_2} V_H = \frac{N_1 + N_2}{N_2} I_H \left(\frac{N_2}{N_1 + N_2} \right)^2 Z_{eqH} + V_X \quad (31)$$

$$= I_X Z_{eqX} + V_X, \quad (32)$$

donde

$$Z_{eqX} = \left(\frac{N_2}{N_1 + N_2} \right)^2 Z_{eqH}. \quad (33)$$

En la ecuación 32, Z_{eqX} es la impedancia equivalente del autotransformador referida a su lado de baja tensión, y $\frac{N_2}{N_1 + N_2} V_H$ es la tensión entre terminales del lado de alta tensión referida al lado de baja. La ecuación 32 puede representarse mediante un transformador ideal en serie con la impedancia en serie Z_{eqX} , como en la figura 5a. La impedancia equivalente Z_{eqX} puede medirse mediante un ensayo en cortocircuito, con V_H cortocircuitada y una tensión reducida aplicada a los terminales de baja tensión.

Consideremos de nuevo el transformador de dos circuitos de 100 kVA, 11 500 : 2 300 V del apartado 2. Supongamos que cuando funciona como transformador de dos circuitos, su caída de tensión en la impedancia equivalente, a la intensidad nominal a plena carga, es el 6 % de su tensión nominal. Es decir, su caída de tensión en la impedancia equivalente $I_1 Z_{eq1}$ referida al devanado de 2 300 V es 138 V, cuando I_1 tiene su intensidad nominal. Cuando el transformador funciona como

autotransformador de 600 kVA (como en la Fig. 2), la tensión nominal en el lado de alta tensión es de 13 800 V. La caída de tensión en la impedancia equivalente referida al lado de alta tensión, sigue siendo de 138 V, pero ahora no representa más que un 1 % de la alta tensión nominal. En general, la caída en la impedancia a plena carga expresada como tanto por ciento de la tensión nominal cuando se conecta el transformador como autotransformador está relacionada con su caída en la impedancia (expresada en tanto por ciento), cuando está conectada como transformador de dos circuitos por la razón

$$\frac{\% \text{ de caída en la impedancia a plena carga en autotransformador}}{\% \text{ de caída en la impedancia a plena carga en transformador de 2 circuitos}} = \frac{E_H - E_X}{E_X}. \quad (34)$$

Como la regulación de tensión es muy aproximadamente proporcional al tanto por ciento de impedancia, para la regulación de tensión a plena carga y a un factor de potencia especificado, será aproximadamente válida una expresión del tipo de la ecuación 34. Es decir,

$$\frac{\text{Regulación como autotransformador}}{\text{Regulación como transformador de 2 circuitos}} \approx \frac{E_H - E_X}{E_H} \quad (35)$$

Como la intensidad de la corriente de cortocircuito cuando se mantiene en el primario su tensión nominal es inversamente proporcional a la impedancia en cortocircuito, la intensidad de la corriente de cortocircuito en un autotransformador es mayor que cuando se conecta el mismo dispositivo como transformador de dos circuitos. El cociente entre las intensidades de las corrientes de cortocircuito es:

$$\frac{\text{Intensidad de c.c. como autotransformador}}{\text{Intensidad de c.c. como transformador de 2 circuitos}} = \frac{E_H}{E_H - E_X}. \quad (36)$$

Cuando se utiliza como transformador ordinario de dos circuitos el de 100 kVA, 11 500 : 2 300 V, su tanto por uno de impedancia equivalente es 0,06 y la intensidad de la corriente de cortocircuito a la tensión nominal es 1/0,06, o sea 16,7 veces mayor que la intensidad de la corriente a plena carga. De la ecuación 36 resulta que cuando se conecta como autotransformador de 13 800 : 11 500 V, la intensidad de su corriente de cortocircuito a la tensión nominal es $6 \times 16,7$, o sea 100 veces mayor que la intensidad normal de la corriente. Esto tiene mucha importancia, porque las fuerzas destructoras en un cortocircuito son proporcionales al cuadrado de la intensidad de la corriente de cortocircuito. Principalmente por esto, el empleo de los autotransformadores se limita a aplicaciones en las que el circuito del primario contenga una impedancia suficiente para limitar la corriente de cortocircuito a una intensidad mucho menor que la que se obtendría si durante el cortocircuito se mantuviera constante la tensión entre los terminales del primario.

Obsérvese que las ecuaciones (34), (35) y (36) son aplicables al mismo transfor-

mador conectado como autotransformador o como transformador de dos circuitos. No son aplicables a un autotransformador y a otro transformador de dos circuitos de igual potencia nominal.

6. CONCLUSIONES

Puede ahora verse que un autotransformador diseñado económicamente, tiene alguna o todas las ventajas siguientes sobre un transformador ordinario de dos circuitos de igual potencia nominal:

1. Menor tamaño,
2. Costo más bajo,
3. Mayor rendimiento,
4. Menor corriente de excitación,
5. Mejor regulación de tensión.

Por otra parte, el autotransformador tiene las desventajas siguientes:

1. Corrientes de cortocircuito más intensas,
2. Conexión conductiva entre los circuitos de baja y alta tensión

Desde luego, estas características se hallan sujetas a grandes variaciones en el diseño. Por ejemplo, se puede diseñar un autotransformador y un transformador ordinario de dos circuitos que tengan iguales sus potencias nominales y sus rendimientos. En dicho diseño, el autotransformador es menor y cuesta menos que el transformador de dos circuitos. Por otra parte, también se puede diseñar un autotransformador y un transformador de dos circuitos de potencias y costos iguales. En dicho diseño, el autotransformador tiene mayor rendimiento. Será económico aquel diseño en el que se logre un equilibrio entre el costo y otras cargas fijas por un lado y las pérdidas y otros gastos de funcionamiento por otro. Dicho diseño económico constituye un compromiso en el que el autotransformador cuesta algo menos que el transformador de dos circuitos y tiene un rendimiento algo mayor.

► La conveniencia de las características del autotransformador depende del cociente entre las tensiones de los circuitos y poco se gana cuando este cociente E_H/E_X tiene un valor grande. ◀

PROBLEMAS

1. Se quiere utilizar un autotransformador para alimentar una carga de 180 A a 150 V desde una línea de 220 V. Si puede considerarse ideal el transformador:

- a) ¿Cuál debe ser la razón entre los números de espiras de los devanados serie y común?
- b) ¿Cuál será la intensidad de la corriente extraída del generador de 220 V?
- c) ¿Qué tanto por ciento de la potencia suministrada a la carga circula conductivamente?
- d) ¿Cuáles deberían ser la tensión y potencia aparente nominales del transformador si se utilizara como transformador ordinario de dos devanados?

2. Los ensayos clásicos en cortocircuito y en circuito abierto realizados sobre un transformador de dos devanados de 100 kVA, 60 Hz, 4 400 : 2 200 V dan los datos siguientes:

ENSAYO EN CORTOCIRCUITO; DEVANADO DE ALTA TENSIÓN EXCITADO

Frecuencia	Tensión	Intensidad	Potencia
60 Hz	228 V	22,8 A	1 300 W

ENSAYO EN CIRCUITO ABIERTO; DEVANADO DE BAJA TENSIÓN EXCITADO

Frecuencia	Tensión	Intensidad	Potencia
60 Hz	2 200 V	1,08 A	525 W

Si se conecta este transformador como autotransformador 6 600 : 4 400 V:

- a) ¿Cuál será su potencia nominal?
 - b) ¿Qué tanto por ciento de la tensión nominal hay que aplicar a los terminales de 6 600 V para mantener la tensión nominal del secundario en una carga de 250 kVA con factor de potencia 0,85 inductivo?
 - c) ¿Cuál sería su rendimiento funcionando en las condiciones b)?
3. Un autotransformador de 25 kVA, 60 Hz, 660 : 220 V, al excitar su lado de alta tensión con 27,6 V estando cortocircuitados sus terminales de baja tensión, consume la corriente nominal del primario con una potencia de entrada de 320 W. Su pérdida en el núcleo a la tensión nominal es de 360 W.
- a) Si se utiliza el transformador para alimentar una carga inductiva de 220 V, 25 kVA y factor de potencia 0,90, determinar su tanto por ciento de regulación y su rendimiento.
 - b) Si se volviera a conectar el transformador de manera que sus tensiones nominales fueran 660 : 440 V, ¿cuál sería su potencia aparente nominal y su regulación y rendimiento cuando se alimenta la carga nominal con el factor de potencia especificado en a)?

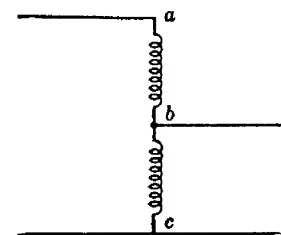


FIG. 6. Conexiones de un autotransformador, problema 6

4. En la figura 6 puede verse un esquema de un autotransformador de 10 kVA 440 : 220 V, 60 Hz. Cuando se cortocircuitan los terminales bc y se aplica a los ab una tensión de 19,2 V, 60 Hz, por los devanados circula una corriente igual a la de plena carga. En estas condiciones, la potencia consumida es de 176 W. Cuando a uno u otro par de ter-

minales se aplica su tensión nominal a 60 Hz manteniendo el otro par en circuito abierto. la potencia consumida es de 142 W.

a) Aplicando a los terminales *ac* 440 V a 60 Hz con los terminales *bc* cortocircuitados, ¿qué tanto por ciento de la intensidad de la corriente a plena carga circulará por cada devanado?

b) Si desde los terminales *bc* se alimenta la carga nominal con un factor de potencia 0,75 a la tensión nominal, determinar el rendimiento y el tanto por ciento de regulación.

c) Si se utiliza el autotransformador como transformador regular de 220 V 60 Hz con razón de transformación unidad y se aplica al primario una tensión de 220 V, 60 Hz, teniendo cortocircuitado el secundario, ¿qué tanto por ciento de la intensidad de la corriente a plena carga circulará por cada devanado?

d) Si se conecta el transformador como transformador regular, según se indica en el apartado c) y desde los terminales de su secundario se alimenta una carga de 5 kVA a un factor de potencia de 0,75 y tensión nominal, determinar su rendimiento y el tanto por ciento de su regulación.

5. Se alimenta el autotransformador del problema 2 por medio de una línea de impedancia $6 + j10$ ohm desde una fase de un gran banco trifásico de transformadores. La tensión entre terminales del secundario del banco trifásico es de 6 720 V y se puede considerar constante.

Si se produce un fallo en el secundario del autotransformador, ocasionando un cortocircuito, hallar:

a) La intensidad de la corriente en el fallo, y

b) Las intensidades de las corrientes en cada devanado del autotransformador.

Economía en las aplicaciones de los transformadores de sistemas de potencia

La posesión y funcionamiento de un sistema eléctrico de potencia cualquiera lleva consigo gastos de dos tipos: fijos, que son inherentes a la propiedad y que existen tanto si se utiliza el equipo como si no; y de funcionamiento, los cuales están relacionados con la forma de empleo. Ambos tipos dependen de los métodos de diseño y producción empleados por el fabricante del equipo. Aun cuando los transformadores tienen, de por sí, un gran rendimiento y por tanto los gastos de su funcionamiento son relativamente reducidos, servirán para ilustrar los principios generales de costo que son comunes a todos los tipos de aparatos eléctricos. Resultan evidentes las pequeñas diferencias de detalles tales como los gastos por rozamiento y pérdidas por viento creado en el movimiento de las máquinas giratorias y las pérdidas por arco que se encuentran en los dispositivos electrónicos. En general, existen tres puntos de vista diferentes que son importantes en relación con los gastos del transformador: los del fabricante del transformador, los de la compañía suministradora del fluido eléctrico y los del industrial que utiliza los transformadores.

El fabricante del transformador se enfrenta con varios problemas económicos importantes. Primeramente, debe procurar mantener los costos de fabricación lo más bajos posible compatible con la buena calidad que se espera de su producto. La necesidad de reducción de los costos de fabricación ha conducido frecuentemente a mejoras físicas verdaderas en los transformadores; por ejemplo, de ello han resultado importantes reducciones de tamaño y peso en los transformadores de corriente para alta tensión, indicadas en la figura 10 del capítulo X. El fabricante debe estar enterado de los cambios generales de las características de las cargas de los transformadores, porque las tendencias de las cargas guardan una importante relación económica con las características de pérdidas convenientes para el transformador. Por último, el fabricante debe construir transformadores de manera que su registro de servicio resulte satisfactorio a los usuarios, tendiendo así a ampliar el mercado de su producto.

Los mayores usuarios de transformadores para instrumentos y de potencia son las compañías suministradoras de fluido eléctrico, cuyas necesidades dictan en gran manera el progreso de desarrollo en las características de funcionamiento de los transformadores y en sus accesorios. El rápido crecimiento en el suministro de energía eléctrica por parte de las centrales desde 1910 hasta 1940 ha hecho conveniente transmitir la potencia a grandes distancias desde lugares en los que resulta barata su generación hasta los centros de utilización. La transmisión de potencia a larga distancia sólo es económica cuando la tensión de funcionamiento es muy elevada; por eso las compañías suministradoras piden a los fabricantes transformadores de tensiones nominales cada vez más elevadas. La extensión del servicio eléctrico a zonas rurales ha exigido que los transformadores de distribución para líneas eléctricas rurales tengan el precio de venta más bajo posible y también ha hecho que se

mejoraran notablemente los métodos de protección de los transformadores contra los rayos.

Los ferrocarriles y los usuarios industriales de la electricidad están interesados vitalmente en la aplicación económica de los transformadores. Casi todas las empresas industriales consumen grandes cantidades de energía eléctrica y suelen utilizar uno o más bancos de transformadores para reducir la tensión suministrada por la compañía hasta el valor de utilización en la fábrica. Cuando el usuario industrial posee estos transformadores reductores, la energía que se le vende es la medida en sus lados de alta tensión. Por ellos, el costo de las pérdidas en el transformador es importante para el usuario, ya que estas pérdidas se hallan incluidas en la energía medida que se le vende y por tanto ocasionan una carga que hay que pagar como gasto de funcionamiento definido. Si la instalación industrial tiene su propio equipo generador, los costos de capital y generador necesarios para subvenir a las pérdidas en el transformador son un elemento de los costos globales en los gastos de producción que hay que reducir a un mínimo.

Pueden realizarse interesantes estudios de inversión relativos al método de instalar los transformadores. ¿Puede comprarse un transformador normal para ser colocado al aire libre, o deberá colocarse en el interior de un edificio, en un recinto a prueba de incendio? ¿Puede comprarse un transformador especial que contenga un líquido aislante no combustible ni explosivo, para ser montado en el interior de un edificio? ¿Deberá colocarse el transformador para exteriores sobre el suelo en un recinto vallado, o deberá colocarse montado sobre uno o más postes? ¿Deberán comprarse los cambiadores de tomas, pararrayos, interruptores de aceite, fusibles, interruptores de desconexión, equipos de medida, transformadores de instrumentos, ventiladores y demás dispositivos auxiliares formando una unidad única alojada junto con el transformador (como se ve en la figura 28 del capítulo XI), o deben instalarse separadamente por el usuario? Como banco trifásico, ¿se utilizarán tres transformadores monofásicos o un sólo transformador trifásico? No solamente importan al técnico estas cuestiones de instalación; también le interesan los costos relativos de funcionamiento de diversos transformadores adecuados. El menor costo de funcionamiento que puede lograrse en una instalación cualquiera de transformadores depende principalmente del ciclo de carga impuesto al banco de transformadores. Por tanto, será necesario conocer las características probables de carga para preparar una estimación de los costos de funcionamiento. Las estimaciones de los costos de instalación y funcionamiento de los distintos planes de instalación junto con las consideraciones de seguridad, conveniencia y aspecto, dictan la decisión siempre que quiera erigirse una subcentral transformadora nueva. En los apartados siguientes se tratan los elementos esenciales de la economía de un transformador, como guía para la resolución de problemas prácticos de transformadores.

1. ELEMENTOS DE LOS COSTOS DE TRANSFORMADORES

La consideración de los costos detallados de fabricación de un transformador es un problema especializado que se sale del ámbito de un texto de principios fundamentales. Sin embargo, es posible bosquejar y discutir los elementos generales del costo que intervienen en el empleo de los transformadores. Un transformador pro-

piedad de una compañía suministradora de fluido eléctrico puede tener gastos de los tipos indicados a continuación:

A. Costos fijos (sujetos a la cuantía de la inversión)

1. Directos (derivados del costo de instalación del transformador y de sus dispositivos asociados de mando y protección) *

- a. Interés
- b. Impuestos
- c. Seguro
- d. Depreciación
- e. Administración

2. Indirectos (costos fijos en otras partes de la fábrica, ocasionados por el transformador.

a. Aumento de los costos fijos en otras partes de la fábrica, resultantes del tamaño adicional de la fábrica debido a las pérdidas del transformador y la corriente de excitación.

b. Parte de las cargas fijas sobre reguladores de tensión del alimentador o condensadores necesarios para compensar la caída de tensión en la impedancia del transformador.

B. Costos de funcionamiento (variables, dependientes de las condiciones de utilización)

1. Directos (costos de las pérdidas internas del transformador)

a. Costo de la pérdida en el núcleo (prácticamente constante)

b. Costo de la pérdida en la carga (proporcional al cuadrado de la intensidad de la corriente)

c. Costo de la energía consumida por el equipo auxiliar de refrigeración

d. Costo del agua de refrigeración

2. Indirectos (aumento de costo de las pérdidas en circuitos exteriores originado por el transformador y gastos de mantenimiento)

a. Pérdida adicional en el cobre del circuito y del generador que alimenta al transformador, resultante de la corriente de excitación y pérdidas del transformador.

b. Parte de las pérdidas en el regulador de tensión del alimentador necesario para mantener constante la tensión de salida del transformador.

c. Gastos de mantenimiento

- a. Comprobación periódica del aceite
- b. Filtrado o cambio del aceite
- c. Reparaciones
- d. Comprobación periódica de la carga
- e. Sustitución del gas inerte y de los productos químicos desoxidantes.

2. COSTOS DIRECTOS FIJOS

Como norma general, los costos directos fijos asociados a la propiedad y funcionamiento de un transformador superan a los costos de funcionamiento. Los costos directos fijos tipo 1 anuales suelen considerarse proporcionales al costo inicial de la

* Obsérvese que el costo de instalación incluye gastos asignados a la instalación del transformador de los gastos globales generales de la compañía propietaria del transformador, incluyendo gastos de administración, gastos de cálculo y los gastos globales directos de instalación descritos en el apartado 2.

instalación del transformador. El costo de instalación incluye, además del material, trabajo y bienes raíces, un cierto número de costos globales asociados a la instalación. Estos se refieren a vigilancia de la construcción, ingeniería, herramientas, interés durante la construcción, compensación de los empleados y seguros, y otros capítulos menos importantes.

Los réditos anuales a cargar en concepto de interés, impuestos y seguros varían tanto con las condiciones locales y normas de la compañía que creemos preferible no presentar aquí tantos por ciento definidos a emplear en los estudios de costos, sino más bien sugerir que se investigue cada caso como problema individual. Por ejemplo, en las localidades en que los transformadores son clasificados por asesores como propiedad personal exenta de impuestos la compañía propietaria de un transformador no paga impuestos por él, aun cuando se paguen impuestos sobre bienes raíces por la estructura que rodea a la subcentral; mientras que si se monta el transformador sobre un poste, hay que pagar por el poste soportante. Muchas compañías no aseguran los transformadores a menos que estén colocados en edificios y prefieren considerar un fallo ocasional como parte de la base general para réditos de depreciación. No pueden evitarse las cargas por interés, ya que, aun cuando se disponga de fondos para comprar e instalar un transformador sin necesidad de préstamos, el dinero gastado en el transformador y en su instalación podría haberse invertido de otra manera que produjera interés.

La valoración de la depreciación varía mucho en compañías diferentes y en diversos tipos de industrias. Los riesgos de trabajo son mayores en las industrias de fabricación que en las compañías suministradoras de fluido; por eso los fabricantes suelen amortizar la inversión en equipo, incluidos los transformadores, más rápidamente que las compañías suministradoras. Si queda anticuado un proceso de fabricación que precise la utilización de un transformador, el valor de rescate de éste estará determinado por el precio en el mercado de los transformadores usados. Por otra parte, una compañía suministradora puede trasladar fácilmente los transformadores de un lugar a otro, manteniendo en servicio activo la mayoría de los mismos. Por tanto, una compañía suministradora del fluido eléctrico puede esperar que el tanto por uno de depreciación de los transformadores esté determinado por la duración media en servicio más que por caer en desuso.

Los transformadores tienen, por término medio, una vida útil bastante larga, aun cuando un transformador puede fallar ocasionalmente al cabo de un corto tiempo de servicio, a causa de una sobrecarga excesiva, un rayo u otras causas. En un sistema en el que se emplee un gran número de transformadores, mantenidos en forma adecuada y comprobadas periódicamente sus condiciones de carga, puede esperarse, sin exageración, una vida media de unos 25 años¹. Existe, por tanto, un comercio activo de transformadores usados y las administraciones de las industrias adquieren frecuentemente equipos usados con el fin de reducir las cargas fijas inmediatas. Para obtener una seguridad razonable de una duración en servicio satisfactorio, con una reducción correspondiente en las cargas fijas, el comprador de un transformador usado deberá obtener una garantía conveniente del vendedor del transformador, o deberá exigir la condición de una inspección minuciosa de los devanados y del aceite aislante.

¹ R. WINFREY, «Statistical Analyses of Industrial Property Retirements», *Iowa State College Engineering Experiment Station Bulletin 125* (diciembre, 1935).

Una parte de los gastos generales de administración de una compañía se carga anualmente como carga fija a todo el capital de la compañía, incluidos los transformadores. Los gastos de administración incluyen una parte de los salarios de administración, gastos de cálculo del capital fijo, gastos de registros técnicos, costos legales, salarios y gastos del departamento de impuestos y seguros, y otros costos similares.

3. COSTOS DIRECTOS DE FUNCIONAMIENTO

Los costos de funcionamiento de un transformador son funciones directas de la manera en que se utilice dicho transformador. Exceptuando una parte de los gastos de mantenimiento, los costos de funcionamiento cesan en el momento en que se quita de servicio el transformador. Si el transformador está refrigerado por un equipo exterior, tal como ventiladores o circulación de agua, el costo de funcionamiento de dicho equipo es un costo directo de funcionamiento. La mayoría de los transformadores se hallan accionados continuamente a una tensión aproximadamente igual a la nominal, por lo que siempre hay pérdida en el núcleo. Si un transformador se halla accionado continuamente, su pérdida de energía debida a la pérdida en el núcleo, expresada en kilowattthora por año, es:

$$\text{Pérdida anual de energía en el núcleo} = (\text{pérdida en el núcleo en kW}) \times 8\,760 \text{ kWh} \quad \blacktriangleright(1)$$

Por otra parte, las pérdidas en la carga son proporcionales al cuadrado de la intensidad de la corriente de carga (cuando es despreciable la corriente de excitación), y son más difíciles de calcular que la pérdida en el núcleo. Las pérdidas en la carga incluyen la pérdida calorífica en los devanados del transformador y las pérdidas parásitas en la carga que se producen en las partes de hierro, las cuales resultan de las condiciones de carga, según se estudia en el apartado 2b del capítulo XIV. Para estar de acuerdo con el léxico comunemente empleado, de ahora en adelante con la expresión *pérdida en el cobre* significaremos la *pérdida en la carga*, que incluye tanto las pérdidas por efecto Joule en los devanados como las pérdidas parásitas. La pérdida en el cobre correspondiente a la corriente a plena carga puede emplearse para determinar la pérdida anual de energía resultante de las pérdidas variables en el cobre, utilizando un método que se describirá en párrafos posteriores.

Ciertos términos que se utilizan aquí solamente para los transformadores, son de aplicación general a todos los aparatos de potencia eléctrica utilizados en el servicio y resultan esenciales para el estudio del método. *Demanda* es la carga de un sistema o dispositivo eléctrico promediado para un intervalo de tiempo determinado. Las unidades comunes para la medida de la demanda son kilowatt, kilovoltampere y kilovoltampere reactivos o kilovar. El concepto de demanda es muy importante en el suministro de potencia. Como la magnitud de las cargas suele variar frecuentemente entre amplios límites, incluso en un tiempo de pocos segundos, será poco importante el empleo de valores momentáneos * de la carga máxima para la determinación de la capacidad de transporte de corriente necesaria de los aparatos de potencia, si bien

* Este término *momentáneo* que introducimos, significa el valor que señalaría un instrumento de medida normal, en oposición con el valor *instantáneo* que indicaría un instrumento oscilográfico.

los picos momentáneos son importantes a causa de su efecto sobre la regulación de tensión. No obstante, el valor medio de la carga tomado en un intervalo de tiempo adecuado, tal como 15 minutos, 30 minutos o una hora, constituye una medida de los requisitos de transporte de corriente del equipo de potencia. Teóricamente, el valor eficaz de la carga durante un tiempo determinado es una medida más precisa del calor generado por las pérdidas que la carga media, pero en la práctica se usa el valor medio para determinar la demanda porque el valor medio durante varios minutos se puede medir con dispositivos de medida más sencillos que los requeridos para medir el valor eficaz durante dicho intervalo.

Si se determina la demanda para cada uno de los intervalos de una serie de intervalos de demanda básicos consecutivos (p. e. 24 intervalos consecutivos de una hora, durante un día), la *demanda eficaz* para el período total transcurrido correspondiente es el valor eficaz de las demandas de los intervalos básicos para dicho período. Introducimos aquí el término demanda eficaz por su utilidad en el cálculo de la energía consumida por las pérdidas en el cobre de un transformador. Supongamos que las demandas de una hora consignadas a continuación representan la carga de un transformador durante un período de 24 horas:

Demanda	Número de horas
10 kVA	8
50 kVA	6
70 kVA	5
100 kVA	5

La demanda eficaz para este período de 24 horas es:

$$\text{Demanda eficaz} = \sqrt{1/24[(10^2 \times 8) + (50^2 \times 6) + (70^2 \times 5) + (100^2 \times 5)]} \quad (2)$$

$$= 61,4 \text{ kVA}. \quad (3)$$

La *demanda máxima* de un sistema o dispositivo eléctrico es la mayor de todas las demandas que se han producido durante un tiempo determinado. La demanda máxima se utiliza para determinar la responsabilidad de una carga individual cualquiera que contribuye a la carga del sistema total, y también para determinar los valores eficaces del equipo necesario para alimentar una carga dada.

Factor de carga de un sistema o dispositivo eléctrico es el cociente entre la carga media y la carga máxima durante un tiempo determinado, estando medidas las cargas media y máxima en las mismas unidades. El término factor de carga se emplea mucho como medida de la constancia de una carga. Si la carga se mantiene constante durante el intervalo de tiempo en cuestión, tiene un factor de carga del 100 %. Ordinariamente, el factor de carga se mide para intervalos de tiempo de un día, mes o año. El factor de carga no da idea alguna de en cuánto está cargado un dispositivo que tenga determinados valores nominales; así, por ejemplo, un transformador puede funcionar con un factor de carga del 100 % y estar cargado solamente con el 70 % de su potencia nominal.

En el ejemplo que damos a continuación puede verse el significado físico de los diversos términos definidos anteriormente. En la figura 1, las curvas *A* y *B* representan las características de dos cargas diferentes, medidas en kilovoltampere, durante 24 horas. El área bajo la curva *A* es de 1 910 kVAh; el área bajo la curva *B* es de 2 230 kVAh. Si se toma de una hora el intervalo de demanda, el área bajo una curva para una hora, dividida por 1, da la demanda de una hora para dicha hora.

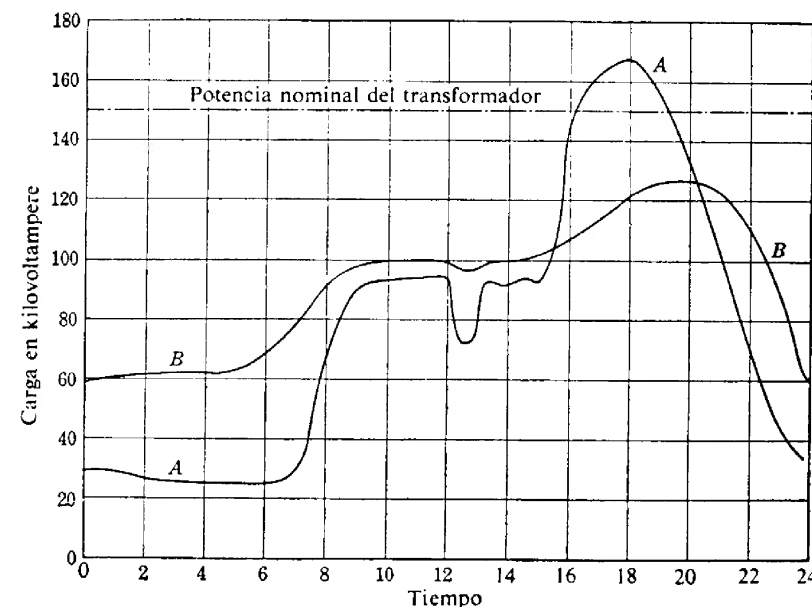


FIG. 1. Dos curvas de carga que ilustran la diferencia entre el factor de carga y la razón de demanda eficaz.

Por ejemplo, el área bajo la curva *B* de 6 a 7 de la tarde es de 124 kVAh, con lo que la demanda durante dicha hora es de 124 kVA. Como ejemplo de un intervalo de demanda de 15 minutos, el área bajo la curva *A* entre las 7 y las 7:15 es de 8,75 kVAh. La demanda de 15 minutos será, pues, $8,75/0,25$, ó sea 35 kVA. La demanda máxima para un intervalo de una hora es, para la curva *A*, 167 kVA; para la *B*, 125 kVA. Los factores de carga son:

$$\text{Factor de carga, curva } A = \frac{1\,910/24}{167} \times 100 = 47,7 \% \quad (4)$$

$$\text{Factor de carga, curva } B = \frac{2\,230/24}{125} \times 100 = 74,3 \% \quad (5)$$

La carga *B* es más constante que la *A* y por ello tiene mayor factor de carga. Sin embargo, el factor de carga indica, no la verdadera carga transportada por el transformador, sino simplemente la mayor o menor constancia de esta carga. La demanda eficaz, calculada de la manera indicada en la ecuación (2) y por intervalos básicos

de una hora es, para la curva *A*, 92,0 kVA; para la *B*, 95,6 kVA. La razón de la demanda eficaz diaria a la potencia nominal del transformador es:

$$\frac{\text{Demanda eficaz diaria, curva } A}{\text{Potencia nominal del transformador}} = \frac{92,0}{150} = 0,614 \quad (6)$$

$$\frac{\text{Demanda eficaz diaria, curva } B}{\text{Potencia nominal del transformador}} = \frac{95,6}{150} = 0,638 \quad (7)$$

Esta comparación ilustra el hecho de que no existe ninguna relación general entre el factor de carga y la razón de la demanda eficaz a la potencia nominal del transformador. Esto debe comprenderse bien, pues existen casos en la literatura técnica en los que ambos términos se usan, incorrectamente desde luego, dándoles el mismo significado. El término factor de carga tendrá poca aplicación en las cuestiones que se tratarán a continuación y sólo lo hemos presentado para poner bien de manifiesto esta distinción.

Para determinar una expresión de la pérdida anual de energía resultante de las pérdidas en el cobre del transformador, sean:

- $W_a \equiv$ pérdida anual de energía en kilowatthora debida a las pérdidas en el cobre del transformador,
- $P_{cu} \equiv$ pérdida en el cobre conocida en kilowatt a la corriente nominal de plena carga,
- $p \equiv$ pérdida momentánea en el cobre en kilowatt,
- $t \equiv$ tiempo en horas,
- $i \equiv$ intensidad momentánea de la corriente de carga en ampere eficaces,*
- $I_{fl} \equiv$ intensidad nominal a plena carga en ampere eficaces,
- $I_a \equiv$ intensidad eficaz de la corriente de carga en ampere tomada para un tiempo de un año, tal como se define en la ecuación (10),
- $\lambda \equiv I_a/I_{fl}$.

Las intensidades i , I_{fl} e I_a están referidas al mismo lado del transformador, o bien se expresan todas en tanto por uno.

La pérdida momentánea en el cobre p , que es proporcional al cuadrado de la intensidad momentánea de la corriente de carga, puede expresarse en función de la pérdida en el cobre conocida a plena carga y de la intensidad conocida de la corriente a plena carga; así:

$$p = P_{cu} \left(\frac{i}{I_{fl}} \right)^2 \quad (8)$$

La pérdida total anual en el cobre es:

$$W_a = \int_0^{8760} p \, dt = \frac{P_{cu}}{I_{fl}^2} \int_0^{8760} i^2 \, dt, \quad (9)$$

donde 8760 es el número de horas de un año.

* Obsérvese que ésta no es la intensidad instantánea. Véase nota del pie de la página 395.

Por definición de valor eficaz, la intensidad eficaz anual de la corriente de carga I_a es:

$$I_a \equiv \sqrt{\frac{1}{8760} \int_0^{8760} i^2 \, dt}, \quad (10)$$

de donde,

$$\int_0^{8760} i^2 \, dt = 8760 I_a^2. \quad (11)$$

Sustituyendo la ecuación (11) en la (9), se tiene:

$$W_a = 8760 \left(\frac{I_a}{I_{fl}} \right)^2 P_{cu} = 8760 \lambda^2 P_{cu}. \quad (12)$$

La ecuación (12) determina la pérdida anual de energía resultante de las pérdidas en el cobre del transformador. Si se empleara la curva de carga anual de la corriente momentánea, el cálculo riguroso de la intensidad eficaz anual I_a de la corriente de carga sería muy engorroso y puede simplificarse de la manera siguiente. Como ya se ha definido, λ es la razón de la intensidad eficaz anual a la intensidad a plena carga de la corriente; no obstante, suponiendo constante la tensión de salida del transformador, λ es análogamente la razón de la demanda eficaz anual en kVA de la carga a la potencia nominal a plena carga en kVA del transformador. La demanda eficaz anual en kVA necesaria para hallar λ puede determinarse fácilmente a partir de un sistema de curvas de carga tomadas para algunos días representativos del año, por el método de la ecuación (2).

El costo del servicio eléctrico depende no sólo de los costos de funcionamiento, sino también de los gastos fijos. En consecuencia, las tasas eléctricas incluyen, en general, una carga de energía para cubrir los costos de funcionamiento y una carga de demanda, basada en la demanda máxima, para cubrir los gastos fijos. Como las pérdidas originan por sí mismas una demanda, el costo de las pérdidas del transformador incluyen un costo de demanda además del costo de energía. La demanda máxima debida al cobre es:

Demanda máxima de pérdida en el cobre =

$$P_{cu} \left(\frac{\text{Demanda máxima en kVA}}{\text{Potencia nominal del transformador en kVA}} \right)^2. \quad (13)$$

La suma de las energías en la pérdida en el núcleo y en la pérdida en el cobre determinan el costo total resultante de las pérdidas del transformador. Análogamente, la suma de la demanda máxima debida a la pérdida en el núcleo más la debida a la pérdida en el cobre determinan el costo total de la demanda resultante de las pérdidas del transformador. Si el transformador usa potencia medida, estos dos costos se establecen por el tanto pagado por el servicio eléctrico marcado en el contador; si el transformador lo utiliza una compañía suministradora, frecuentemente se toma como costo de la energía el costo real de generación de la electricidad en la instalación de potencia, cifra que es probable se halle comprendida entre 0,10 centavos de dólar y 0,75 centavo de dólar por kilowatthora. Cada compañía suministradora conoce,

por experiencia, el coste fijo anual medio por kilovoltampere de demanda que se aplica a cada distrito servido por la compañía; este costo unitario se emplea como carga de demanda anual para las pérdidas. Las condiciones existentes en los Estados Unidos pueden representarse por una carga anual de demanda de 15,00 \$ por kilovoltampere de demanda.

4. EJEMPLO: COMPARACIÓN DE TRANSFORMADORES USADOS Y NUEVOS

Una empresa industrial consume potencia suministrada por un sistema trifásico de 2 400 V. Una ampliación de la fábrica exige la instalación de un banco de transformadores de 150 kVA para reducir la tensión a 240 V para la distribución trifásica en el nuevo edificio. La empresa será propietaria y se encargará del funcionamiento de los transformadores. Se tienen en consideración los dos siguientes tipos de instalación para los transformadores:

Plan A: Tres transformadores monofásicos usados trece años, de 50 kVA cada uno.

Plan B: Un transformador trifásico nuevo de 150 kVA

En uno y otro plan, la carga transportada por el banco de transformadores está representada por las curvas de demanda diaria de la figura 2. Estas curvas presentan las demandas horarias en kilovoltampere en épocas del año características y para cargas en días en que la fábrica no trabaja. La tasa pagada para electricidad, medida en los terminales de entrada del banco de transformadores, es:

Gastos de demanda mensual

Primeros 10 kVA de demanda máxima	1,80 \$ por kVA
Siguientes 40 kVA de demanda máxima	1,30 » »
Demanda adicional en exceso sobre 50 kVA	0,90 » »

Gasto energético mensual

Primeros 1 000 kWh	0,03 \$ por kWh
Siguientes 4 000 kWh	0,02 » »
Energía adicional, en exceso sobre 5 000 kWh	0,01 » »

Los datos de pérdida para ambos planes son los siguientes:

	Plan A (transformadores usados)	Plan B (transformador nuevo)
Pérdida en el núcleo en watt		
Cada transformador	230	
Para el banco	690	480
Pérdida en el cobre a plena carga en watt		
Cada transformador	630	
Para el banco	1 890	1 700

Los costos de instalación para ambos planes son los siguientes:

	Plan A (transformadores usados)	Plan B (transformador nuevo)
Precio de entrega del banco de transformadores	375,00 \$	1 030,00 \$
Precio de instalación del contratista*	400,00	375,00
Gastos de instalación, al 15 %	116,00	211,00
Costo total de la instalación	891,00 \$	1 616,00 \$
Valor de salvamento al final de la duración prevista	50,00	150,00
Costo inicial de la instalación menos el valor de salvamento	841,00 \$	1 466,00 \$

* El precio del contratista incluye el suministro e instalación de los cortacircuitos, para-rrayos, tierras y conexiones, necesarios.

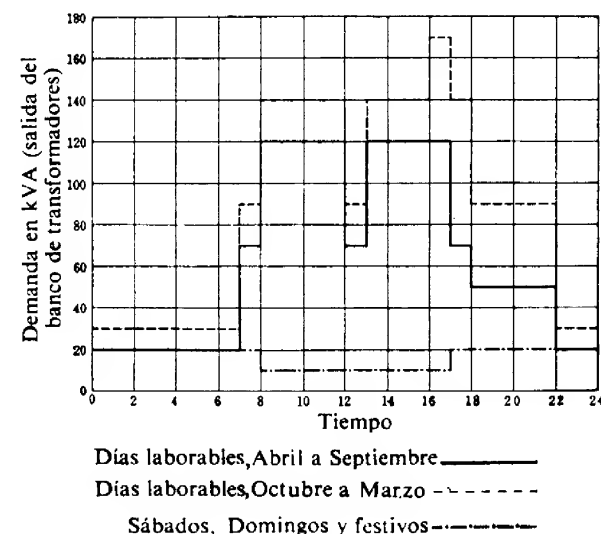


FIG. 2. Curvas de demanda de la instalación industrial estudiada en el apartado 4.

La inversión en los transformadores usados se amortiza en tres años, pero para el nuevo puede esperarse un tiempo de depreciación de diez años. Hay que aplicar el método lineal para el cálculo de la depreciación; es decir, el gasto o carga anual de depreciación es:

$$\text{Depreciación anual} = \frac{\text{costo de instalación menos valor de salvamento}}{\text{duración prevista}} \quad (14)$$

Las tasas anuales para gastos fijos distintos de la depreciación son:

Interés de la inversión	6 %
Impuestos	2 %
Seguro	1,5 %
Administración	3 %
Gasto fijo anual total, excluida la depreciación	12,5 %

El suministrador de los transformadores usados conviene en limpiar y secar los devanados y el tanque y poner aceite nuevo antes de entregar los transformadores, incluyendo estos servicios en el precio de venta citado. También ofrece una garantía de un año contra defectos, la cual conviene al futuro comprador.

Cálculo de las pérdidas anuales en la carga: La pérdida de energía anual debida a las pérdidas en la carga del transformador está determinada por la ecuación (12), que volvemos a escribir:

$$W_a = 8760 \lambda^2 P_{cu} \quad (15)$$

donde,

W_a = pérdida energética anual debida a pérdidas en la carga, en kilowatt-hora
 λ = razón de la intensidad eficaz anual I_a a la intensidad nominal a plena carga I_n de la corriente,
 P_{cu} = pérdida en el cobre en kilowatt a la intensidad nominal a plena carga de la corriente.

Si se supone constante la tensión, la razón λ es la misma para las demandas de kVA que para las de corrientes. Para determinar λ , debe calcularse la demanda eficaz anual. Durante 117 días la instalación del transformador está cargada en la forma que indican las líneas de trazo y punto de la figura 2. Estos 117 días incluyen 52 sábados, 52 domingos, 8 fiestas y 5 días de cierre por inventario. De los restantes 248 días del año, 124 corresponden a las líneas de trazo continuo que representan las condiciones desde abril a septiembre, y 124 corresponden a las líneas de trazos que indican las condiciones existentes entre octubre y marzo. Es evidente que, en la práctica, no existe una distinción tan tajante pero las condiciones medias representadas en estos gráficos de carga son suficientemente buenas para nuestros fines.

Primeramente se calculan las demandas eficaces para días únicos representativos:

Domingos, etc...

$$\begin{aligned} \text{Demanda eficaz} &= \sqrt{1/24[(10^2 \times 9) + (20^2 \times 15)]} \\ &= 17 \text{ kVA.} \end{aligned} \quad (16)$$

Días laborables de abril a septiembre,

$$\begin{aligned} \text{Demanda eficaz} &= \sqrt{1/24[(20^2 \times 9) + (50^2 \times 4) + (70^2 \times 3) + (120^2 \times 8)]} \\ &= 77,3 \text{ kVA.} \end{aligned} \quad (17)$$

Días laborables de octubre a marzo,

$$\begin{aligned} \text{Demanda eficaz} &= \sqrt{1/24[(30^2 \times 9) + (90^2 \times 6) + (140^2 \times 8) + (170^2 \times 1)]} \\ &= 100,5 \text{ kVA.} \end{aligned} \quad (18)$$

Los valores empleados en las ecuaciones (16-18) se han tomado de las gráficas de la figura 2. Por ejemplo, los domingos se tiene una carga de 10 kVA durante 9 horas y de 20 kVA durante 15 horas.

A continuación se determina la demanda eficaz anual a partir de los valores eficaces diarios dados por las ecuaciones (16-18); así:

$$\begin{aligned} \text{Demanda eficaz anual} &= \sqrt{1/365[(17^2 \times 117) + (77,3^2 \times 124) + (100,5^2 \times 124)]} \\ &= 74,5 \text{ kVA.} \end{aligned} \quad (19)$$

A tensión constante,

$$\lambda = \frac{\text{demanda eficaz anual en kVA}}{\text{potencia nominal del transformador}} = \frac{74,5}{150} = 0,496 \quad (20)$$

$$\lambda^2 = 0,246. \quad (21)$$

Mediante la ecuación (15), puede determinarse ahora la energía anual consumida en las pérdidas en la carga. Para los tres transformadores monofásicos del plan A,

$$W_a = 8760(0,246)(1,89) = 4070 \text{ kWh por año.} \quad (22)$$

Para el transformador trifásico del plan B,

$$W_a = 8760(0,246)(1,70) = 3660 \text{ kWh por año.} \quad (23)$$

Cálculo de las pérdidas anuales en el núcleo: La energía W_c consumida en pérdidas en el núcleo es, según la ecuación (1):

Para el plan A,

$$W_c = 8760(0,69) = 6050 \text{ kWh por año.} \quad (24)$$

Para el plan B,

$$W_c = 8760(0,48) = 4210 \text{ kWh por año.} \quad (25)$$

Cálculo de la demanda resultante de las pérdidas: La demanda adicional ocasionada por las pérdidas del transformador depende de la carga de pico, la cual es 120/150, ó sea el 80 % del valor nominal durante seis meses, y 170/150, ó sea el 113 % del valor nominal durante seis meses cada año. Para simplificar, supongamos que el factor de potencia correspondiente al pico de carga es del 90 % ó mejor, con lo que la demanda kW resultante de las pérdidas se suma casi aritméticamente a la demanda de kVA de la carga. Tabulamos a continuación el efecto de las pérdidas sobre la demanda:

	Plan A (transformadores usados)	Plan B (transformador nuevo)
Demanda máxima adicional debida a pérdidas en el cobre, abril-septiembre	$(0,80)^2 \times 1,89 = 1,21 \text{ kW}$	$(0,80)^2 \times 1,70 = 1,09 \text{ kW}$
Demanda máxima adicional debida a pérdidas en el cobre, octubre-marzo	$(1,13)^2 \times 1,89 = 2,40 \text{ kW}$	$(1,13)^2 \times 1,70 = 2,18 \text{ kW}$
Demanda máxima adicional media debida a pérdidas en el cobre	1,80 kW	1,64 kW
Demanda máxima adicional debida a pérdidas en el núcleo	0,69 kW	0,48 kW
Demanda máxima adicional media debida a las pérdidas totales del transformador	2,49 kW	2,12 kW

Comparación de los costos finales: En cada mes del año, la demanda máxima de la carga es superior a 50 kVA, con lo que, a fines de comparación entre los dos planes, se carga el efecto de las pérdidas del transformador sobre la demanda en el concepto de 0,90 \$ de los gastos de demanda. De la gráfica de carga para el intervalo de tiempo entre abril y septiembre, el consumo de kilovoltamperehora para dicho intervalo resulta ser $[(20 \times 9) + (50 \times 4) + (70 \times 3) + (120 \times 8)]$, o sea, 1 550 kVAh por día laborable. Es evidente que, con cualquier valor práctico del factor de potencia, el consumo mensual de energía por parte de la carga será bastante mayor que 5000 kWh. Luego, el costo total de las pérdidas del transformador se cargará en el concepto de tasa de energía de 1 centavo por kWh. Pueden ahora compararse los costos anuales de ambos planes, según se hace en la siguiente tabla:

	Plan A (transformadores usados)	Plan B (transformador nuevo)
Inversión	891,00 \$	1 616,00 \$
Costos anuales		
Depreciación (ec. 14)	280,30 \$	146,00 \$
Otros gastos fijos al 12,5 % del costo de instalación	111,40	202,00
Gasto de demanda debido a pérdidas a 0,90 \$ por kVA ($12 \times 0,90 \times \text{kW}$ de demanda debida a pérdidas)	26,90	22,90
Gastos de energía debido a pérdidas en el cobre a 0,01 \$ por kWh	40,70	36,60
Gasto de energía debido a pérdidas en el núcleo	60,50	42,10
Mantenimiento, estimado	50,00	30,00
Costo comparativo anual total cargable a los transformadores	569,80 \$	480,20 \$

La comparación indica que, durante los tres primeros años de propiedad, los costos anuales del transformador trifásico nuevo serán inferiores en 89,60 \$ a los costos anuales de los transformadores usados. Transcurridos tres años, la depreciación de los transformadores usados (plan A) se habrá amortizado y los gastos anuales contra ellos serán entonces de 569,80 \$ menos 280,30 \$, o sea de 289,50 \$. Así, si la duración de servicio de los transformadores usados se extendiera más allá de su vida prevista de tres años, el transformador nuevo costaría más de propiedad y funcionamiento que los transformadores usados, porque los gastos de depreciación contra el transformador nuevo persistirán durante siete años más. El exceso del costo anual del plan B sobre el plan A durante estos siete años restantes es de 480,20 \$ menos 289,50 \$, o sea 190,70 \$. Si la posición de capital de la empresa es sólida, el costo superior de propiedad del transformador nuevo, tomado para un período de diez años, se justificaria probablemente por la mayor seguridad que ofrece. En cambio, si la posición de capital de la empresa fuese insegura, con lo que el factor guía sería el desembolso inmediato mínimo, probablemente se elegirían los transformadores usados en la esperanza de que su utilidad de servicio se prolongara a más de tres años. Es interesante ver que la diferencia entre los costos anuales de las pérdidas de ambos planes, resultante de un mayor rendimiento de la unidad nueva, sólo es de 26,50 \$, cantidad muy pequeña comparada con el costo total de la energía eléctrica transportada por los transformadores.

5. COSTOS INDIRECTOS

Junto a los costos fijos y de funcionamiento cargables a él directamente, el transformador origina aumentos en los costos fijos y de funcionamiento del circuito que acciona.

Los costos fijos indirectos resultantes de un transformador son menos evidentes y relativamente menos importantes que los costos fijos directos estudiados en el apartado 2. Las pérdidas de energía en un transformador constituyen una energía que debe ser suministrada por un generador y transmitida mediante otros transformadores, reguladores de tensión de alimentadores, conductores de línea, interruptores y otros dispositivos de circuitos. El equipo generador y transmisor debe, pues, tener un tamaño adecuado para transportar, no sólo la carga útil, sino también la carga resultante de las pérdidas del transformador. El equipo generador y transmisor también debe suministrar la componente reactiva de la corriente de excitación del transformador y, a los factores de potencia corrientes de las cargas comerciales, la corriente de excitación incrementa la carga en kilovoltampere del sistema. En casos individuales, estas consideraciones pueden parecer triviales, pero las magnitudes que intervienen en la carga adicional de un sistema grande son verdaderamente importantes. Por ejemplo, en 1935 una compañía suministradora ² utilizaba transformadores de distribución que tenían una potencia nominal adicional de 70 415 kVA sobre circuitos de distribución que tenían una carga de pico adicional de 47 224 kVA. Si se supone que durante el pico del sistema los transformadores funcionaban con un rendimiento medio del 97 %, las estaciones generadoras tenían que desarrollar alrededor de 1 400 kW solamente para proveer a las pérdidas en los transformadores, independientemente del efecto de las pérdidas y de las corrientes de excitación sobre los circuitos existentes entre los generadores y los transformadores. La inversión en la planta reservada para generar estos 1 400 kW representa gastos fijos del tipo consignado como costos fijos indirectos, artículo A2a del apartado 1.

Los costos fijos indirectos adicionales son los resultantes de la regulación de tensión del transformador. En los sistemas de las compañías suministradoras, los cambiadores de tomas o los reguladores de tensión de los alimentadores varían la tensión de entrada a la línea de transmisión o alimentador para compensar aproximadamente la caída de tensión total en el sistema entre el generador y la carga *. Si el regulador de tensión del alimentador eleva en un 10 % la tensión a plena carga, y si la caída de tensión a través de los transformadores de distribución es de un 1,5 %, entonces el 15 % de los gastos fijos del regulador se cargarán a los transformadores servidos por el alimentador conectado al regulador. Este tipo de gasto fijo indirecto está indicado como artículo A2b en el apartado 1.

Además de ocasionar gastos fijos adicionales, la carga adicional producida por las pérdidas internas y la corriente de excitación de un transformador origina nuevas pérdidas en el circuito que suministra la energía. El costo de estas nuevas pérdidas es un gasto indirecto de funcionamiento que se carga al transformador y está consignado en el artículo B2a del apartado 1. Estas pérdidas exteriores dependen del

² C. H. LEWIS y E. H. SNYDER, «Distribution Transformer Load Supervising Methods», *Edison Electric Institute Bulletin* 5 (1937), 329-333.

* En el capítulo XIX se estudian los transformadores con tomas variables y los reguladores de tensión.

efecto que ejerce sobre la corriente total suministrada al transformador la corriente de excitación y la carga originadas por las pérdidas. A la carga nominal con factor de potencia unidad, la corriente de excitación tiene un efecto despreciable sobre el circuito exterior. No obstante, cuando se disminuye la intensidad de la corriente de carga o el factor de potencia se hace más inductivo, la corriente de excitación ejerce un efecto cada vez más apreciable sobre la corriente del circuito exterior, con lo que hay que hacer un gasto correspondiente a las pérdidas originadas por la corriente de excitación del transformador. Este costo indirecto de funcionamiento es pequeño frente a los costos directos del transformador.

Parte de las pérdidas en el regulador de tensión del alimentador situado en el circuito que alimenta el transformador también pueden cargarse como costo de funcionamiento del transformador. La parte de las pérdidas del regulador de tensión cargable al transformador suele determinarse a partir del cociente entre el tanto por ciento de regulación de tensión del transformador y el tanto por ciento de elevación de tensión realizado por el regulador. Este tipo de costo indirecto de funcionamiento está consignado en el artículo B2b del apartado 1.

6. COSTOS DE MANTENIMIENTO

Los transformadores necesitan muy poco mantenimiento, pero a intervalos de tiempo definidos se les debe prestar cierto tipo de atenciones consignadas en el artículo B3 del apartado 1. Debe comprobarse anualmente la rigidez dieléctrica del aceite aislante de los grandes transformadores de potencia y de los transformadores subterráneos. La humedad y los barroes en el aceite tienden a disminuir su rigidez dieléctrica y provocar, en consecuencia, fallos en los devanados. Si el examen del aceite indica condiciones inferiores a las normales, debe filtrarse el aceite o, en casos más graves, cambiarlo. En algunos transformadores de gran potencia, el espacio por encima del aceite se llena de un gas inerte, para evitar la oxidación de aquél. El gas inerte puede «respirar» mediante productos químicos que extraen cualquier traza de oxígeno del gas. Hay que mantener el suministro de gas inerte y de productos desoxidantes, lo cual lleva consigo un pequeño gasto de mantenimiento. A veces son necesarias pequeñas reparaciones, tales como la sustitución de un pasatapas roto, de un fusible protector fundido, el ajuste de los contactos de los disyuntores, la sustitución de pararrayos rotos, la comprobación de la resistencia a tierra y el mantenimiento de buenas condiciones de puesta a tierra.

Una actividad de mantenimiento importante relativa a los transformadores es la vigilancia de la carga del transformador la cual, en las compañías suministradoras, se organiza sobre una base definida con personal especializado asignado a ella. Los métodos satisfactorios de estudio de la carga de los transformadores incluyen:

a) Comprobaciones periódicas en varios lugares de las cargas del transformador por medio de amperímetros de núcleo partido.

b) Cálculo de las cargas del transformador a partir de mapas del territorio servido, haciendo también uso de registros de las lecturas de los contadores de los usuarios y de factores de carga bien establecidos y de factores de diversidad;

c) Observación de las lecturas de los termómetros instalados en forma per-

manente, los cuales indican la temperatura máxima alcanzada por el aceite del transformador;

d) Registros gráficos de la carga obtenidos en instrumentos registradores (solamente aplicables en instalaciones de potencia grandes, habida cuenta de lo elevado del costo de compra y mantenimiento de los instrumentos registradores).

Los métodos más corrientemente empleados son los consignados en a) y c), si bien se obtienen resultados excelentes mediante el método de cálculo b) en las compañías que lo utilizan. Todos los métodos entrañan cierto gasto. Las referencias dadas en la bibliografía ofrecen una información más detallada referente a las técnicas de ensayo de carga de los transformadores.

7. DETERMINACIÓN DE LA RAZÓN DE PÉRDIDA MÁS ECONÓMICA

El diseñador puede fijar en gran manera el precio del transformador, ya que dentro de ciertos límites el costo de producción es inversamente proporcional al producto de la pérdida en el núcleo por la pérdida en el cobre a plena carga.³ Corrientemente, el diseñador puede rebajar el costo del transformador, y por tanto, disminuir los gastos fijos que lo gravan, aumentando cualquiera de sus pérdidas, con el correspondiente incremento del costo de funcionamiento.

También puede variar el diseñador la razón de la pérdida en el núcleo a la pérdida en el cobre a plena carga. Como la pérdida en el núcleo existe siempre que esté accionado el transformador, pero la pérdida en el cobre sólo tiene importancia cuando el transformador está cargado, la razón de pérdida constituye un factor en la determinación del costo de funcionamiento para cualquier curva de carga especializada.

Puede deducirse una relación general importante para la determinación de la razón de pérdida más económica para un producto de pérdida especificado cualquiera y una razón de demanda eficaz anual. Sean

L \equiv producto de pérdida conocido en kilowatt al cuadrado para un transformador standard cuya potencia nominal sea la deseada,

P_c \equiv pérdida en el núcleo desconocida, kilowatt,

P_{cu} \equiv pérdida desconocida en el cobre a la carga nominal, kilowatt,

m \equiv razón de la demanda máxima en kVA de la carga a la potencia nominal en kVA del transformador,

D \equiv gasto de demanda para las pérdidas del transformador, dólares, por año y por kVA,

E \equiv gasto de energía para las pérdidas del transformador, dólares por kilowatthora

Si se suman las pérdidas en el núcleo y en el cobre, y si se supone que la demanda en kVA debida a las pérdidas se suma aritméticamente con la demanda en kVA debida a la carga (lo que es muy aproximadamente cierto para factores de potencia

³ W. A. SUMNER y J. B. HODTUM, «Realizing Transformers with Distribution», *Elec. W.*, 105 (1935), 1586-1588.

de la carga próximos a la unidad), los costos anuales de las pérdidas del transformador son

$$\text{Costo anual de energía} = 8\,760E(P_c + \lambda^2 P_{cu}) \text{ dólares} \quad (26)$$

$$\text{Costo anual de demanda} = D(P_c + m^2 P_{cu}) \text{ dólares} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \text{Costo anual total de pérdidas} \\ = (D + 8\,760E)P_c + (m^2 D + 8\,760\lambda^2 E)P_{cu} \end{aligned} \quad (28)$$

Como en todas las deducciones que siguen aparecen los coeficientes $(D + 8\,760E)$ y $(m^2 D + 8\,760\lambda^2 E)$, hagamos

$$a \equiv D + 8\,760E, \quad (29)$$

$$b \equiv m^2 D + 8\,760\lambda^2 E \quad (30)$$

En las ecuaciones (29) y (30) el símbolo a representa la componente de pérdida en el núcleo de costo unitario, expresada en dólares por año y por kilowatt de pérdida en el núcleo; mientras b representa la componente de pérdida en el cobre de costo unitario, expresada en dólares por año y por kVA eficaz de demanda. * Por las definiciones de los símbolos,

$$P_{cu} = \frac{L_s}{P_c}. \quad (31)$$

Sustituyendo las ecuaciones (29), (30) y (31) en la ecuación (28) se tiene:

$$\text{Costo anual total de pérdidas} = aP_c + \frac{bL_s}{P_c}. \quad (32)$$

Para hallar el costo anual mínimo, anularemos la derivada respecto a P_c del costo anual de pérdidas:

$$\frac{d}{dP_c} (\text{costo anual}) = 0 = a - \frac{bL_s}{P_c^2}. \quad (33)$$

de donde,

$$P_c = \sqrt{\frac{bL_s}{a}}, \quad (34)$$

y

$$P_{cu} = \frac{L_s}{P_c} = \sqrt{\frac{aL_s}{b}}. \quad (35)$$

La razón de pérdida correspondiente al costo anual mínimo es

$$\text{Razón de pérdida} = \frac{P_{cu}}{P_c} = \frac{L_s}{P_c^2} = \frac{a}{b}. \quad (36)$$

* Se entiende por demanda eficaz en kVA a la demanda durante todo el año, corregida de su efecto sobre el costo según se determina por la forma de la tasa eléctrica.

La ecuación (36) dice que, para máxima economía de funcionamiento, la razón de la pérdida en el cobre a plena carga a la pérdida en el núcleo debe ser igual a la razón del costo anual por kilowatt de pérdida en el núcleo al costo anual de pérdida en el cobre por kVA eficaz de demanda. En la figura 3 se ha representado gráficamente la expresión de la razón de pérdida de la ecuación (36), pudiendo verse el efecto de las variaciones de cualquiera de las cuatro cantidades m , λ , D y E . El hecho más sobresaliente es la pendiente marcadamente negativa de todas las curvas al representar gráficamente la razón de pérdida para economía máxima en

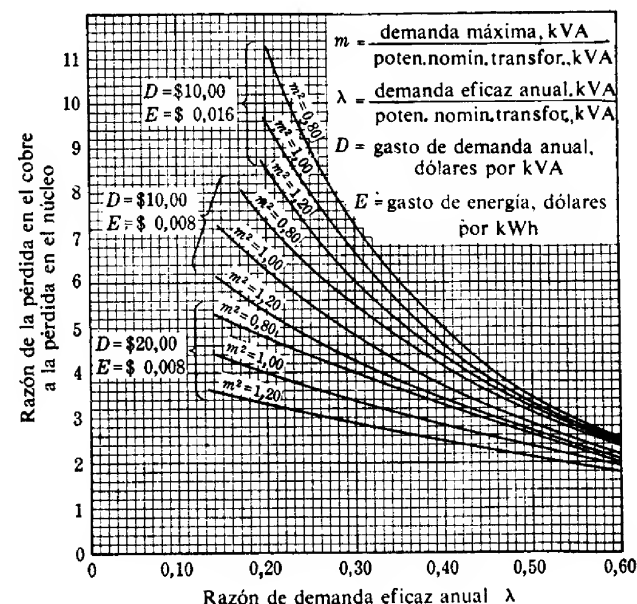


FIG. 3. Razón de pérdida para costo anual mínimo de pérdidas en función de las variables m , λ , D y E .

función de la razón λ de demanda eficaz anual. La pendiente negativa indica, al igual que la ecuación (36), que al crecer la pérdida en el cobre a causa del crecimiento de las cargas, la razón conveniente de la pérdida en el cobre a la pérdida en el núcleo, disminuye. Se ve, pues, que, en general, un transformador de subcentral cuya carga es probable que tenga una razón λ de demanda eficaz relativamente elevada, deberá tener una razón de pérdida inferior a la de un transformador de distribución.

La anterior solución teórica no da indicación numérica alguna de la importancia de las desviaciones respecto a los valores óptimos. Será, pues, interesante calcular los resultados de variar la razón de pérdida en un caso ordinario. Un transformador de distribución de 10 kVA, diseñado en 1940, tiene un producto de pérdida de aproximadamente 10 700 W², o sea 0,0107 kW². Supóngase que se desea estudiar los costos de pérdidas de dicho transformador de 10 kVA, manteniendo

constante el producto de pérdida. Supóngase las siguientes condiciones de funcionamiento:

$$m^2 = 1,15$$

$$\lambda^2 = 0,16$$

$$D = 10,00 \text{ \$ por año y por kVA de demanda}$$

$$E = 0,009 \text{ \$ por kWh}$$

Según la ecuación (36), la razón de pérdida para economía máxima es

$$\text{Razón de pérdida} = \frac{10 + 8\,760(0,009)}{1,15(10) + 8\,760(0,16)(0,009)} = 3,69 \quad (37)$$

En la tabla I se consigna el costo anual de pérdida correspondiente a diferentes valores de las razones de pérdida.

TABLA I

COMPARACION DE LOS COSTOS ANUALES DE PERDIDAS EN UN TRANSFORMADOR DE DISTRIBUCION DE 10 kVA, AL SER AFECTADO POR LA RAZON DE PERDIDA

1. Razón de pérdida (supuesta)	6,00	4,50	3,69*	2,80	2,00
2. Producto de pérdida, kW ²	0,0107	0,0107	0,0107	0,0107	0,0107
3. Pérdida en el núcleo P_c , kW	0,0422	0,0488	0,0539	0,0619	0,0731
4. Pérdida en el cobre P_{cu} , kW	0,254	0,219	0,199	0,173	0,146
5. Energía anual gastada en pérdidas en el núcleo, kWh	370	428	472	542	640
6. Energía anual gastada en pérdidas en el cobre, kWh	356	307	279	243	204
7. Pérdida anual total, kWh	726	735	751	785	844
8. Demanda máxima debida a la pérdida en el cobre, kW	0,292	0,251	0,229	0,199	0,168
9. Demanda máxima debida a la pérdida total, kVA	0,334	0,300	0,283	0,261	0,241
10. Costo anual de la energía, dólares	6,54	6,62	6,76	7,07	7,59
11. Costo anual de la demanda, dólares	3,34	3,00	2,83	2,61	2,41
12. Costo anual total de las pérdidas	9,88	9,62	9,59	9,68	10,00

* Razón teórica para costo anual mínimo

$$\text{Línea 3} = \sqrt{\frac{\text{línea 2}}{\text{línea 1}}}$$

$$\text{Línea 4} = \frac{\text{línea 2}}{\text{línea 3}}$$

$$\text{Línea 5} = 8\,760 \times \text{línea 3}$$

$$\text{Línea 6} = 8\,750\lambda^2 \times \text{línea 4} = 1\,400 \times \text{línea 4}$$

$$\text{Línea 7} = \text{línea 5} + \text{línea 6}$$

$$\text{Línea 8} = m^2 \times \text{línea 4} = 1,15 \times \text{línea 4}$$

$$\text{Línea 9} = \text{línea 3} + \text{línea 8}$$

$$\text{Línea 10} = E \times \text{línea 7} = \$0,009 \times \text{línea 7}$$

$$\text{Línea 11} = D \times \text{línea 9} = \$10,00 \times \text{línea 9}$$

$$\text{Línea 12} = \text{línea 10} + \text{línea 11}$$

La tabla I nos ayuda a conservar el sentido de la proporción. De la ecuación (36) podía haberse sacado la impresión de que el valor óptimo de la razón de pérdida da costos anuales muy inferiores a los resultados de otras razones de pérdida. La tabulación pone de manifiesto que una desviación razonable respecto al valor óptimo de la razón de pérdida no tiene mucha importancia, por lo que la razón de pérdida seleccionada puede tener un valor cualquiera, razonablemente próximo al correcto, que sea más práctico desde el punto de vista del fabricante del transformador. Sería mejor utilizar transformadores cuya razón de pérdida P_{cu}/P_c sea algo menor que el valor óptimo, en vez de mayor, a fin de lograr una economía máxima durante un número de años durante el cual la razón λ de demanda eficaz tienda, probablemente, a aumentar. Como los transformadores de distribución se utilizan en gran cantidad, una desviación grande de la razón de pérdida teórica sería ruinosa. Por ejemplo, si en el caso que nos ocupa se utilizara una razón de pérdida de 2,00 en lugar de 3,69, el costo anual de pérdidas por mil transformadores de 10 kVA sería superior en 410 \$ al costo necesario, posible ahorro que justifica ampliamente el costo de un estudio para determinar la mejor razón de pérdida. Los transformadores standard de distribución tienen, en general, razones de pérdida apropiadas para las condiciones de carga que prevalecen en la práctica en el instante de la fabricación, y el subcomité de transformadores del American Institute of Electrical Engineers proporciona una oportunidad a los fabricantes y usuarios de estudiar tendencias de las condiciones de carga y recomendar normas futuras para el diseño de transformadores para un costo mínimo de pérdidas.

8. DETERMINACIÓN DEL PRODUCTO DE PÉRDIDA MÁS ECONÓMICO

El precio de un transformador es, dentro de ciertos límites, inversamente proporcional al producto de su pérdida en el núcleo por su pérdida en el cobre a plena carga. Cuando se paga una tasa relativamente elevada por la electricidad y en condiciones de carga muy intensa, se justifica la compra de un transformador cuyo producto de pérdida sea inferior al normal y cuyo precio sea correspondientemente más elevado. Inversamente, si se aumenta el producto de pérdida de un transformador, con las provisiones especiales adecuadas de refrigeración, el inferior precio resultante puede ser conveniente en determinadas circunstancias. La combinación ideal de producto de pérdida y razón de pérdida, se puede determinar analíticamente.

Además de los símbolos utilizados en el apartado 7, sean

C_t = precio en dólares del transformador que tiene el producto de pérdida normal L_t .

$l = P_c P_{cu}$ = producto de pérdida en kW² para una economía total máxima, incluidos los gastos fijos,

c = precio en dólares del transformador que tiene el producto de pérdida l ,

F = tasa * de los gastos fijos anuales, parte decimal del costo de producción.

Como el precio se supone inversamente proporcional al producto de pérdida,

$$c = \frac{C_t L_t}{l} \quad (38)$$

* Incluye interés, impuestos, seguro, depreciación, etc.

y, por las definiciones de los símbolos,

$$P_{cu} = \frac{l'}{P_c}. \quad (39)$$

El gasto fijo anual es cF , o sea $\dot{C}_s L_s F/l$, que se suma a la ecuación (32) (sustituyendo en la ecuación (32) L_c por l) para dar el costo total anual. Hagamos, por conveniencia

$$g = C_s L_s F. \quad (40)$$

Entonces,

$$\text{Costo anual total de pérdidas y gastos fijos} = aP_c + \frac{bl}{P_c} + \frac{g}{l}. \quad (41)$$

Para hallar el costo mínimo anual, se anularán las dos derivadas parciales del costo anual⁴. Entonces

$$\frac{\partial}{\partial l} \left[aP_c + \frac{bl}{P_c} + \frac{g}{l} \right] = 0 \quad (42)$$

$$\frac{b}{P_c} - \frac{g}{l^2} = 0 \quad (43)$$

$$l = \sqrt{\frac{gP_c}{b}} \quad (44)$$

$$\frac{\partial}{\partial P_c} \left[aP_c + \frac{b}{P_c} \sqrt{\frac{gP_c}{b}} + g \sqrt{\frac{b}{gP_c}} \right] = 0 \quad (45)$$

$$a - \sqrt{\frac{gb}{P_c^3}} = 0 \quad (46)$$

$$P_c = \sqrt[3]{\frac{bg}{a^2}} \quad \blacktriangleright (47)$$

$$l = \sqrt{\frac{gP_c}{b}} = \sqrt[3]{\frac{g^2}{ab}} \quad \blacktriangleright (48)$$

$$P_{cu} = \frac{l}{P_c} = \sqrt[3]{\frac{ag}{b^2}} \quad \blacktriangleright (49)$$

La razón de pérdida P_{cu}/P_c correspondiente a economía total máxima es:

$$\text{Razón de pérdida } \frac{P_{cu}}{P_c} = \frac{a}{b}, \quad \blacktriangleright (50)$$

como en la ecuación (36).

⁴ Véase F. S. Woods, *Advanced Calculus* (nueva ed.; Boston: Ginn & Company, 1934), 117.

El producto de pérdida l hallado por la ecuación (48) puede ser menor, igual o mayor que el producto de pérdida conocido L_s de un transformador standard autorrefrigerado. Si es l menor que L_s , podrá justificarse la compra del transformador a un precio mayor que el standard, pues el ahorro en el costo de las pérdidas puede ser mayor que los gastos fijos adicionales resultantes del precio más elevado.

Si es l mayor que L_s , con lo que es teóricamente deseable comprar un transformador cuyo producto de pérdida es superior al normal, se puede comprar un transformador:

- a) de diseño normal, o
- b) de rendimiento inferior al normal, o
- c) de potencia nominal con autorrefrigeración inferior a la potencia nominal con autorrefrigeración normal requerida por la carga, pero con sistema auxiliar de refrigeración para ser utilizado en los picos de carga.

Para aplicaciones de distribución se seguirán, en general, las alternativas a) y b). Determinadas líneas de transformadores de distribución se fabrican con dos clases de rendimientos llamados, respectivamente, transformadores de gran rendimiento y de bajo rendimiento. Si se fabrica un transformador de bajo rendimiento que sea adecuado para la aplicación en cuestión, sus costos totales probablemente serán inferiores a los del transformador standard de gran rendimiento, cuando l es mayor que L_s . Para aplicación en una subcentral, es corriente comprar un transformador de dos potencias nominales, una correspondiente al transformador autorrefrigerado y otra correspondiente a la refrigeración con ventiladores, tal como se sugiere en la alternativa c).

9. RESUMEN DEL ESTUDIO DEL COSTO DE UN TRANSFORMADOR

Los transformadores son los representantes de todo el equipo de potencia eléctrico por lo que concierne a los principales elementos de costo. Por tanto, el estudio de los factores de costo de los transformadores sirve como guía para los métodos de análisis de costo para otros tipos de aparatos de potencia. No obstante, los transformadores tienen un rendimiento tan elevado que las diferencias numéricas resultantes de las variaciones en los factores que rigen el costo no son, en general, demasiado grandes; luego no es necesario el empleo de los valores óptimos absolutos de los factores que rigen el costo.

La pérdida anual resultante de la pérdida en el núcleo es una constante, pero la pérdida anual por pérdida en el cobre es una función de la razón de la demanda eficaz anual a la potencia nominal del transformador a plena carga. Desde el punto de vista económico, una razón de demanda eficaz baja indica una razón de pérdida en el cobre a pérdida en el núcleo, de valor elevado; y una demanda eficaz alta indica una razón de pérdida baja. Los gastos fijos suelen ser el elemento más caro de los costos del transformador, las pérdidas son algo menos costosas, mientras que los gastos de mantenimiento son pequeños frente a los costos de los gastos fijos y pérdidas. Es conveniente sobrecargar los transformadores durante tiempos cortos, * dentro

* Véase el apartado 8 del capítulo XIV.

de los límites establecidos por la American Standard Association (o las normas adecuadas en boga en la época en que se fabricó el transformador), a fin de llevar a cabo los gastos fijos menores resultantes del ahorro de tamaño del transformador.

Una vez seleccionada una potencia nominal para el transformador no habrá por qué dejar tolerancias grandes para un futuro desarrollo, salvo en localidades en las que se sabe que los incrementos de carga se producen con rapidez.

PROBLEMAS

1. Un fabricante compra potencia para su fábrica a una compañía suministradora a 2 400 V. El contador de la compañía suministradora registra no solamente la demanda real y los requisitos de energía de la carga de la fábrica, sino también, además, las pérdidas en el transformador de la fábrica que reduce la tensión al valor de utilización en dicha fábrica. El contador señala la potencia con una aproximación de 0,5 kW de demanda y la energía consumida en un mes con una aproximación de 10 kWh. La potencia se paga de acuerdo con la siguiente tasa:

Gasto de demanda mensual

Primeros 10 kW de demanda	2,00 \$ por kW
50 kW siguientes de demanda	1,50 \$ por kW
Demanda adicional	1,00 \$ por kW

Gasto de energía

Primeros 1 200 kWh por mes	0,035 \$ por kWh
1 300 kWh siguientes por mes	0,02 \$ por kWh
Energía adicional	0,0125 \$ por kWh

Descuento por compra de potencia a 2 400 V, transformadores propios	10 % del total factura cada mes
---	---------------------------------

La subcentral del fabricante consiste en un transformador de 75 kVA, comprado originalmente 17 años atrás, en cuya época se previó amortizar la inversión en el transformador en 15 años. El equipo auxiliar, incluidos fusibles protectores y pararrayos, se han mantenido y remplazado cuando ha sido necesario y se hallan aún en condiciones satisfactorias para continuar en servicio. En la actualidad se espera que los requisitos de potencia de la fábrica aumenten, y puede optarse por una de las dos soluciones siguientes:

1) Un comerciante en transformadores usados ofrece entregar uno de 75 kVA de características exactamente iguales a las del transformador en servicio, a un precio de entrega de 120 \$, garantizando todo defecto de funcionamiento durante un año. Este transformador podría ponerse en paralelo con el ya existente, costando 60,00 \$ su instalación, según oferta de un contratista. Puede esperarse, razonablemente, una duración de 5 años para los dos transformadores de 75 kVA.

2) Un fabricante ofrece entregar un transformador nuevo de 150 kVA al precio de 753 \$ franco sobre fábrica. El porte del transformador cuesta 18,00 \$ y la cantidad estimada por el contratista para entrega e instalación es de 60,00 \$. El comerciante en transformadores usados ofrece 60,00 \$ por el transformador viejo de 75 kVA, corriendo de su cuenta los trabajos de traslado.

Las pérdidas de cada uno de los transformadores de 75 kVA, son:

Pérdida en vacío	400 W
Pérdida en el cobre a plena carga	655 W

Las pérdidas del transformador de 150 kVA son:

Pérdida en vacío	540 W
Pérdida en el cobre a plena carga	1 240 W

La experiencia del fabricante prevé los siguientes gastos:

Interés	7 % anual sobre la inversión
Impuestos	No intervienen en este problema
Seguro	1.5 % sobre el precio de compra
Depreciación	Método lineal — 15 años para el transformador nuevo, 5 años para el usado
Mantenimiento	No hay diferencia en favor de uno u otro plan, pero existe la probabilidad de que el transformador viejo precise cambio del aceite a 25 centavos el galón. El transformador de 75 kVA contiene 54 galones de aceite.

La curva de carga media mensual estimada para la nueva carga es:

kVA en % de la potencia nominal a plena carga	Factor de potencia en %	Horas por mes a la carga enunciada
100	80	72
75	70	216
25	60	72
5	100	360

Determinar cuál de las dos alternativas debe adoptar el fabricante en cada una de las siguientes circunstancias:

a) El negocio del fabricante es muy estable y goza de un crédito excelente. La firma tiene buena reputación por su rapidez en las entregas, y por tanto valora en mucho la pérdida ocasionada por las interrupciones del trabajo.

b) El negocio es inestable, el crédito marginal, y lo que sostiene el negocio son sus productos baratos en lugar de una buena reputación en calidad y servicio.

Nota: Una instalación de este tamaño sería, normalmente, trifásica, pero este problema es totalmente representativo, aun cuando se resuelva como problema monofásico.

2. La oficina técnica de una compañía fabricante de transformadores realiza un estudio para determinar la mejor razón de pérdida para un nuevo diseño de transformadores de distribución. Los datos para este estudio los suministran diversas compañías

suministradoras de energía eléctrica, entre las que existe una divergencia considerable entre las normas referentes a la demanda de la carga en edificios, estructura de tarifas y técnicas. Se deben estudiar los datos recibidos de cada compañía para determinar el mejor diseño de transformador correspondiente a los requisitos de cada compañía, tras lo cual se realizará un diseño standard que parezca ser el mejor compromiso para una venta general a todas las compañías suministradoras.

Nueve compañías suministradoras facilitan datos referentes a sus técnicas. Algunas de ellas quieren evaluar parte de las pérdidas del transformador a razón de lo que habría que pagar por la energía por parte de los usuarios, mientras otras compañías evalúan las pérdidas a los costos de energía suministrada a los transformadores. En la tabla siguiente se consignan los costos de las pérdidas en cada una de las nueve compañías:

Número de la compañía	Gasto de demanda D en dólares por año y por kVA de demanda máxima	Gasto de energía E en dólares por kilowatthora
1	0	0,030
2	0	0,020
3	0	0,010
4	10,00	0,030
5	10,00	0,020
6	10,00	0,010
7	24,00	0,020
8	24,00	0,010
9	24,00	0,005

Este problema demuestra el efecto de las condiciones de carga y de la tasa eléctrica sobre la razón de pérdida conveniente. Los estudiantes pueden dividirse en grupos, cada uno de los cuales complete la solución aplicable a la tasa para pérdidas en una de las compañías suministradoras. Cada grupo de estudiantes debe determinar la razón de pérdida P_{cu}/P_c que dé el costo de funcionamiento anual mínimo para una de las compañías anteriormente consignadas, utilizando valores de λ iguales a 0,20; 0,30; 0,40; 0,50 y 0,60 y suponiendo que la demanda máxima es la carga nominal. Además, el ahorro del costo anual de pérdida debido a emplear esta razón de pérdida óptima en vez de la razón de pérdida standard, deberá determinarse para cada valor de λ para un grupo de oien transformadores de 15 kVA. La razón de pérdida standard de un transformador de distribución de 15 kVA puede tomarse igual a 3,40 y el producto de pérdida standard igual a 20 100 W².

Las razones de pérdida convenientes halladas por los distintos grupos de estudiantes se pueden representar gráficamente en función de la razón de demanda eficaz λ para cada tasa eléctrica, como comprobación de la precisión de los resultados y para poner de manifiesto el efecto de cambiar los valores de las variables.

Autoinducciones e inducciones mutuas

Se vio en el capítulo XII que los flujos que atraviesan primario y secundario pueden expresarse de dos maneras. Un método de combinar las componentes representa a los flujos resultantes que atraviesan cada devanado como suma de un flujo de fuga y de un flujo mutuo resultante*; así,

$$\varphi_1 = \varphi_{n1} + \varphi \quad (1)$$

$$\varphi_2 = \varphi_{n2} + \varphi, \quad (2)$$

donde,

φ_1 y φ_2 son los flujos resultantes que atraviesan, respectivamente, a primario y secundario,

φ_{n1} y φ_{n2} son los flujos de fuga,

φ es el flujo mutuo resultante creado por los efectos simultáneos de las corrientes que circulan por ambos devanados.

El otro método expresa los flujos resultantes φ_1 y φ_2 como suma de flujos componentes creados por cada corriente actuando por sí sola**; así,

$$\varphi_1 = \varphi_{11} + \varphi_{12} \quad (3)$$

$$\varphi_2 = \varphi_{22} + \varphi_{21}, \quad (4)$$

donde,

φ_{11} es el flujo que atraviesa al devanado 1 debido a la corriente i_1 actuando sola,

φ_{22} es el flujo que atraviesa al devanado 2 debido a la corriente i_2 actuando sola.

φ_{21} y φ_{12} son los flujos mutuos componentes creados por las corrientes que circulan por los devanados 1 y 2 respectivamente.

Las ecuaciones (1) y (2) son la base del método de análisis estudiado en los apartados 3 y 4 del capítulo XII y desarrollado en detalle en los capítulos XIII y XIV, mientras que las ecuaciones (3) y (4) son la base de la teoría clásica de los circuitos acoplados electromagnéticamente, en virtud de la cual pueden escribirse las ecuaciones de la tensión en la forma,

$$v_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \blacktriangleright (5)$$

$$v_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}, \quad \blacktriangleright (6)$$

* Véanse las ecuaciones (22) y (23) del capítulo XII.

** Véanse las ecuaciones (19) y (20) del capítulo XII.

donde,

v_1 y v_2 son las tensiones instantáneas entre los terminales de los devanados,
 i_1 e i_2 son las intensidades instantáneas de las corrientes que por ellos circulan,

R_1 y R_2 son sus resistencias efectivas,

L_1 y L_2 son sus coeficientes de autoinducción,

M es el coeficiente de inducción mutua.

El propósito de este capítulo es desarrollar la teoría del transformador desde el punto de vista de los circuitos acoplados.

En las ecuaciones (5) y (6) se desprecian las capacidades distribuidas de los devanados. También se desprecia la pérdida en el núcleo y, por basarse las ecuaciones en la superposición de flujos componentes creados por cada una de las corrientes actuando por sí solas, implican relaciones lineales entre cada flujo componente y la corriente que lo crea. La pérdida en el núcleo de un transformador con núcleo de hierro suele tener poco efecto sobre cualquier característica de funcionamiento salvo sobre el rendimiento y, a pesar de las características magnéticas no lineales del hierro, las ecuaciones (5) y (6) se aplican frecuentemente al análisis de dichos transformadores. Es interesante comparar este método de análisis con la teoría analítica basada en los flujos de fuga y mutuo resultante de las ecuaciones (1) y (2) y revisar algunos de los puntos importantes estudiados en el capítulo XII.

Basándose en las ecuaciones (1) y (2), se demuestra en el apartado 5 del capítulo XII que se puede representar un transformador por el circuito equivalente de la figura 6 del capítulo XII, consistente en un transformador ideal cuya razón de transformación sea igual al cociente entre los números de espiras de los devanados, en combinación con una red que represente a las imperfecciones del transformador real. Este circuito equivalente presenta los factores que son importantes en la determinación de las características eléctricas de los transformadores, y sus partes componentes tienen significados físicos bastante claros en relación con las condiciones magnéticas en un transformador cargado. Así los flujos de fuga inducen caídas de tensión que pueden interpretar las inductancias de fuga en serie con el transformador ideal y como los flujos de fuga se hallan parcialmente en el aire, estas inductancias de fuga son aproximadamente constantes. En un transformador con núcleo de hierro, el flujo mutuo resultante es aproximadamente igual al flujo en el núcleo y por tanto se supone que la no linealidad de las características magnéticas del núcleo sólo afectan a la relación entre este flujo mutuo resultante y la corriente de excitación. Si ésta es débil frente a la componente de carga de la corriente del primario, o si la amplitud de la variación del flujo mutuo resultante es relativamente pequeña, los efectos de la no linealidad magnética son relativamente poco importantes y, en tales condiciones, el transformador con núcleo de hierro se comporta como elemento de circuito esencialmente lineal. Por ello, la teoría clásica de los circuitos lineales acoplados, expresada por las ecuaciones (5) y (6), es aplicable a menudo a los transformadores con núcleo de hierro, particularmente en el análisis de circuitos de comunicaciones y de transformadores con más de dos devanados*. Aun cuando la teoría clásica desarrollada en función de los coeficientes de autoinducción y de inducción mutua no conduce a un concepto físico tan claro de los fenómenos internos

* En el capítulo XXVII se estudian los transformadores multicircuito.

de un transformador con núcleo de hierro como el análisis en función de los flujos de fuga y mutuo resultante, resulta igualmente útil, a pesar de todo, para la determinación de las características externas de un transformador como elemento de circuito cuando se desprecian la pérdida en el núcleo y la no linealidad magnética.

1. ECUACIONES PARA CIRCUITOS ACOPLADOS

Consideremos el transformador de la figura 1. Cuando se desprecian la pérdida en el núcleo y las capacidades distribuidas y se suponen constantes las inductancias,

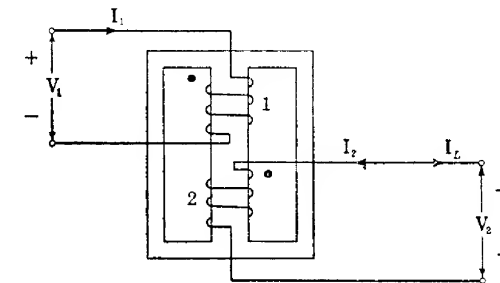


Fig. 1. Sentidos positivos de las corrientes y tensiones que figuran en las ecuaciones 7, 8, 9 y 10

las ecuaciones instantáneas para las tensiones pueden escribirse en la forma de las ecuaciones (5) y (6). Si se supone que las intensidades y tensiones varían sinusoidalmente, estas ecuaciones pueden expresarse en la forma vectorial

$$V_1 = (R_1 + j\omega L_1)I_1 + j\omega MI_2 \quad \blacktriangleright (7)$$

$$V_2 = (R_2 + j\omega L_2)I_2 + j\omega MI_1, \quad \blacktriangleright (8)$$

donde V_1 y V_2 son los vectores que representan a las tensiones entre los terminales de los dos devanados, e I_1 e I_2 son los vectores que representan a las corrientes que circulan por ellos. Los signos algebraicos de estas ecuaciones dependen de los sentidos que se tomen como positivos para corrientes y tensiones. En las ecuaciones (7) y (8), V_1 y V_2 representan caídas de potencial a través de los devanados en el mismo sentido en torno al núcleo, mientras I_1 e I_2 representan las corrientes en los mismos sentidos positivos. Como corrientes positivas en los sentidos de I_1 e I_2 de la figura 1 crean flujos componentes del mismo sentido, los términos de las ecuaciones (7) y (8) en que intervienen los coeficientes de autoinducción y de inducción mutua tienen signos iguales. Como la corriente del secundario suele crear una fuerza magnetomotriz que tiende a oponerse a la de la corriente del primario, las corrientes I_1 e I_2 suelen estar aproximadamente en oposición de fase. El sentido de circulación de la potencia está indicado por las relaciones de fase entre las corrientes y las tensiones. Así, si el devanado 1 actúa como primario, V_1 e I_1 tendrán una diferencia de fase menor que 90° , pero V_2 e I_2 diferirán en más de 90° .

Debido a su simetría, las ecuaciones (7) y (8) resultan convenientes para el estudio

de problemas generales en los que no se especifica el sentido de circulación de la potencia. No obstante, cuando se sabe que el devanado 2 entrega potencia a una carga, puede parecer más natural tomar como sentido positivo de la corriente entregada a la carga el sentido positivo de la caída de potencial V_2 a través de la carga,

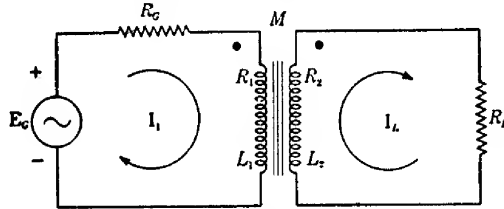


FIG. 2. Circuito consistente en un generador, transformador y carga resistiva.

tal como indica la flecha I_L de la figura 1. Corrientemente, durante la mayor parte del hemisiclo en que la corriente penetra por el extremo marcado con punto del devanado 1, sale simultáneamente la corriente por el extremo marcado con punto en el devanado 2, y por tanto las corrientes I_1 e I_L suelen estar aproximadamente en fase. Las ecuaciones de las tensiones pueden escribirse en forma vectorial en función del vector I_L representativo de la corriente suministrada a la carga en la forma

$$V_1 = (R_1 + j\omega L_1)I_1 - j\omega M I_L \quad \blacktriangleright (9)$$

$$V_2 = j\omega M I_1 - (R_2 + j\omega L_2)I_L. \quad \blacktriangleright (10)$$

Para un estudio ulterior, considérese el circuito de la figura 2, consistente en un generador de resistencia interna R_G , conectado a los terminales del primario de un transformador cuyo secundario suministra potencia a una resistencia de carga R_L . Este circuito es de gran importancia en los circuitos de comunicaciones, en donde el generador suele ser una válvula de vacío. En los textos de Electrónica se demuestra que frecuentemente puede representarse una válvula de vacío por un generador de resistencia interna constante cuya fuerza electromotriz es proporcional a la tensión aplicada a su rejilla. El circuito de salida de la válvula contiene a menudo una batería (no indicada en la figura 2), que crea una corriente continua en el primario del transformador. Los flujos creados por la tensión alterna del generador se superponen a la imitación producida por la corriente continua y por tanto, por lo que respecta a las corrientes alternas, las inductancias eficaces del transformador, L_1 , L_2 y M , son las inductancias incrementales estudiadas en los apartados 14 y 15 del capítulo VI. Si se supone que la tensión alterna del generador y las componentes alternas de las corrientes de primario y secundario varían sinusoidalmente, las ecuaciones vectoriales del circuito de la figura 2 son:

$$E_G = (R_G + R_1 + j\omega L_1)I_1 - j\omega M I_L \quad \blacktriangleright (11)$$

$$0 = -j\omega M I_1 + (R_L + R_2 + j\omega L_2)I_L, \quad \blacktriangleright (12)$$

donde E_G es el vector que representa la fuerza electromotriz del generador e I_1 , I_L son los vectores representativos de las corrientes alternas que circulan por los

circuitos de primario y secundario. Los sentidos positivos son los indicados en la figura 2. Estas ecuaciones pueden escribirse en forma más compacta en función de las impedancias de autoinducción e inducción mutua de los circuitos. Así,

$$E_G = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_L \quad (13)$$

$$0 = Z_{12}I_1 + Z_{22}I_L. \quad (14)$$

Para el circuito de la figura 2, las autoimpedancias Z_{11} y Z_{22} son

$$Z_{11} = R_{11} + jX_{11} \quad (15)$$

$$Z_{22} = R_{22} + jX_{22}, \quad (16)$$

donde,

$$R_{11} = R_G + R_1 = \text{autorresistencia de la malla que comprende el generador y el primario del transformador,} \quad (17)$$

$$R_{22} = R_L + R_2 = \text{autorresistencia de la malla que comprende la carga y el secundario del transformador,} \quad (18)$$

$$X_{11} = \omega L_1 = \text{autorreactancia de la malla del primario,} \quad (19)$$

$$X_{22} = \omega L_2 = \text{autorreactancia de la malla del secundario.} \quad (20)$$

Para las polaridades y sentidos positivos indicados en la figura 2, la impedancia mutua Z_{12} , es:

$$Z_{12} = -jX_m, \quad (21)$$

donde,

$$X_m = \omega M = \text{reactancia mutua.} \quad (22)$$

De las ecuaciones (13) y (14) pueden deducirse fácilmente expresiones para las corrientes de primario y secundario. De la ecuación (14), la relación vectorial entre las corrientes resulta ser

$$I_L = -\frac{Z_{12}}{Z_{22}} I_1. \quad (23)$$

Sustituyendo la ecuación (23) en la (13), se tiene:

$$E_G = \left(Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22}} \right) I_1. \quad (24)$$

De la ecuación (24),

$$I_1 = \frac{Z_{22} E_G}{Z_{11} Z_{22} - Z_{12}^2}, \quad (25)$$

y de las ecuaciones (23) y (25),

$$I_L = \frac{-Z_{12}E_G}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2} \quad (26)$$

Si se expresan las impedancias de las ecuaciones (25) y (26) en función de sus componentes de resistencia y reactancia, la ecuación (25) se convierte en

$$I_1 = \frac{(R_{22} + jX_{22})E_G}{(R_{11} + jX_{11})(R_{22} + jX_{22}) + X_m^2} \quad (27)$$

$$= \frac{(R_{22} + jX_{22})E_G}{R_{11}R_{22} - (X_{11}X_{22} - X_m^2) + j(R_{11}X_{22} + R_{22}X_{11})} \quad (28)$$

Análogamente, la ecuación (26) se convierte en

$$I_L = \frac{jX_m E_G}{R_{11}R_{22} - (X_{11}X_{22} - X_m^2) + j(R_{11}X_{22} + R_{22}X_{11})} \quad (29)$$

Las ecuaciones (28) y (29) expresan los vectores representativos de las corrientes de primario y secundario de la figura 2 en función de la tensión del generador E_G y de los parámetros del transformador y de los circuitos conectados a él.

2. COEFICIENTE DE ACOPLO Y COEFICIENTE DE FUGA

Conviene ahora introducir dos nuevos factores: el coeficiente de acoplo y el de fuga. Por definición, el coeficiente de acoplo entre dos circuitos acoplados magnéticamente es:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (30)$$

o en función de las autorreactancias y reactancias mutuas,

$$k = \frac{X_m}{\sqrt{X_{11} X_{22}}} \quad (31)$$

El coeficiente de acoplo es una medida de lo estrechamente enlazados que están los campos magnéticos de los dos circuitos. Si no hubiera fuga magnética alguna, el coeficiente de acoplo k sería igual a la unidad, que es el mayor valor posible. Es frecuente que el coeficiente de acoplo de un transformador con núcleo de hierro llegue a valer 0,998, si bien en el caso de transformadores con núcleo de aire los valores de k no inferiores a 0,5 sólo se logran con diseños especiales. El coeficiente de fuga σ se define en la forma

$$\sigma = 1 - k^2 \quad (32)$$

$$= 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} = 1 - \frac{X_m^2}{X_{11} X_{22}} \quad (33)$$

Como las características de los circuitos acoplados magnéticamente dependen en gran manera de las fugas magnéticas, el coeficiente de fuga resulta ser una cantidad importante en la teoría de los transformadores y también en la de otros muchos tipos de aparatos electromagnéticos.

El significado del coeficiente de acoplo en función de los flujos a que se refiere la teoría del transformador puede ponerse de manifiesto por medio de las relaciones entre dichos flujos y los coeficientes de autoinducción e inducción mutua. Por definición, la autoinducción de un devanado es el cociente entre el flujo que lo atraviesa creado por su propia corriente y la intensidad de ésta; de donde,

$$L_1 = \frac{\lambda_{11}}{i_1} = \frac{N_1 \varphi_{11}}{i_1} \quad (34)$$

$$L_2 = \frac{\lambda_{22}}{i_2} = \frac{N_2 \varphi_{22}}{i_2} \quad (35)$$

donde,

λ_{11} y λ_{22} son los flujos totales creados por las corrientes i_1 e i_2 , respectivamente, φ_{11} y φ_{22} son flujos equivalentes *.

Análogamente, la inductancia mutua de dos devanados se define como el flujo que atraviesa un devanado por unidad de intensidad de la corriente del otro. En un sistema conservativo, la inductancia mutua del devanado 1 con respecto al devanado 2 es igual a la del devanado 2 con respecto al devanado 1; así¹,

$$M = \frac{\lambda_{21}}{i_1} = \frac{N_2 \varphi_{21}}{i_1} \quad (36)$$

$$= \frac{\lambda_{12}}{i_2} = \frac{N_1 \varphi_{12}}{i_2} \quad (37)$$

donde,

λ_{21} es el flujo que atraviesa todo el devanado 2 creado por la corriente i_1 , λ_{12} es el flujo que atraviesa todo el devanado 1 creado por la corriente i_2 , φ_{21} y φ_{12} son flujos mutuos equivalentes.

A partir de estas ecuaciones se pueden expresar los flujos en función de las inductancias; así:

$$\varphi_{11} = \frac{L_1 i_1}{N_1} \quad (38)$$

$$\varphi_{22} = \frac{L_2 i_2}{N_2} \quad (39)$$

$$\varphi_{21} = \frac{M i_1}{N_2} \quad (40)$$

$$\varphi_{12} = \frac{M i_2}{N_1} \quad (41)$$

* El concepto de flujos equivalentes se estudia en el apartado 1 del capítulo XII.

¹ Véase R. R. LAWRENCE, *Principle of Alternating Currents* (2a. ed. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1935), 187.

Definamos k_1 como razón del flujo mutuo φ_{21} creado por la corriente i_1 al flujo total φ_{11} creado por i_1 ; así:

$$k_1 \equiv \frac{\varphi_{21}}{\varphi_{11}}. \quad (42)$$

Si se expresan los flujos en función de los coeficientes de autoinducción y de inducción mutua (como en las ecs. 38 y 40), la ecuación (42) queda en la forma,

$$k_1 = \frac{\frac{M i_1}{N_2}}{\frac{L_1 i_1}{N_1}} = \frac{\frac{N_1}{N_2} M}{L_1}. \quad (43)$$

Análogamente, sea k_2 la razón del flujo mutuo φ_{12} creado por la corriente i_2 al flujo total φ_{22} creado por la corriente i_2 ; entonces,

$$k_2 \equiv \frac{\varphi_{12}}{\varphi_{22}} = \frac{\frac{N_2}{N_1} M}{L_2}. \quad (44)$$

Multiplicando miembro a miembro las ecuaciones (43) y (44) se tiene,

$$k_1 k_2 = \frac{M^2}{L_1 L_2}. \quad (45)$$

En virtud de la ecuación (30), el segundo miembro de la ecuación (45) resulta ser el cuadrado del coeficiente de acoplo, de donde este coeficiente k podrá expresarse en la forma,

$$k = \sqrt{k_1 k_2} = \sqrt{\frac{\varphi_{21} \varphi_{12}}{\varphi_{11} \varphi_{22}}}. \quad (46)$$

Por tanto, el coeficiente de acoplo k es igual a la media geométrica de las razones de los flujos mutuos a los totales creados por los efectos separados de cada corriente.

En las ecuaciones (28) y (29) se expresan las corrientes del circuito de la figura 2 en función de las autorreactancias y reactancias mutuas del transformador y de las resistencias de los circuitos primario y secundario. Se puede eliminar la reactancia mutua en estas ecuaciones e introducir en ellas los coeficientes de acoplo y fuga. De la ecuación (31),

$$X_m = k \sqrt{X_{11} X_{22}} \quad (47)$$

y de la ecuación (33),

$$X_{11} X_{22} - X_m^2 = \sigma X_{11} X_{22}. \quad (48)$$

Sustituyendo las ecuaciones (47) y (48) en las (28) y (29), pueden expresarse las corrientes del circuito de la figura 2 en la forma,

$$I_1 = \frac{(R_{22} + jX_{22})E_G}{R_{11}R_{22} - \sigma X_{11}X_{22} + j(R_{11}X_{22} + R_{22}X_{11})} \quad \blacktriangleright (49)$$

$$I_2 = \frac{jk \sqrt{X_{11}X_{22}} E_G}{R_{11}R_{22} - \sigma X_{11}X_{22} + j(R_{11}X_{22} + R_{22}X_{11})} \quad \blacktriangleright (50)$$

En el caso de un transformador con núcleo de aire, los coeficientes de autoinducción mutua son constantes y el coeficiente de fuga es relativamente grande. Aquellos pueden determinarse fácilmente a partir de ensayos en circuito abierto y, si son despreciables los efectos de las capacidades distribuidas, puede calcularse satisfactoriamente el funcionamiento del transformador con núcleo de aire sustituyendo en las ecuaciones (28) y (29) los valores medidos de las resistencias y de los coeficientes de autoinducción e inducción mutua.

En cambio, cuando el transformador tiene núcleo de hierro la situación es completamente diferente. Consideremos la cantidad $X_{11}X_{22} - X_m^2$ del denominador de las ecuaciones (28) y (29). Como el coeficiente de acoplo es casi igual a la unidad, X_m^2 será muy poco inferior a $X_{11}X_{22}$ y por tanto se tendrá muy poca precisión si se calculan las corrientes empleando los valores medios de la autorreactancia y de la reactancia mutua en las ecuaciones (28) y (29), ya que la importantísima cantidad $X_{11}X_{22} - X_m^2$ se determinaría como diferencia entre dos componentes grandes casi iguales. Esta dificultad se evita en las ecuaciones (49) y (50), puesto que el coeficiente de acoplo se puede determinar con buena precisión a partir de ensayos en circuito abierto y en cortocircuito, tal como se describe en el apartado 3.

3. MEDIDA DE LOS PARÁMETROS

Cuando son despreciables la pérdida en el núcleo, la no linealidad magnética y los efectos de las capacidades distribuidas, las características eléctricas de un transformador de dos devanados se pueden expresar en función de cinco parámetros independientes. En las ecuaciones (5) y (6) para circuitos acoplados, estos parámetros son las autoinducciones y resistencias efectivas de los dos devanados y el coeficiente de inducción mutua entre ellos. Como en las ecuaciones básicas de los circuitos acoplados hay cinco parámetros independientes, el número de parámetros independientes que figurarán en todas las ecuaciones que se deduzcan de ellas serán cinco también, aun cuando se expresen por conveniencia de maneras diferentes de las de las ecuaciones originales para los circuitos acoplados. Por ejemplo, las corrientes del circuito de la figura 2 se expresan en las ecuaciones (49) y (50) en función de las dos resistencias de los devanados, de sus dos autorreactancias y del coeficiente de fuga σ —cinco parámetros del transformador—. El coeficiente de acoplo k que aparece en la ecuación (50) no es un sexto parámetro independiente, ya que puede determinarse a partir del coeficiente de fuga σ por medio de la ecuación (32).

A fin de predecir las características de funcionamiento del transformador, pues, deberán conocerse cinco constantes características independientes. Los ensayos simples que pueden realizarse para determinar los cinco parámetros son:

1. Medidas de las resistencias a la corriente continua de los dos devanados,
2. Medidas de las dos autoinducciones,
3. Medidas de la inducción mutua,
4. Medidas de la razón de tensiones con un devanado en circuito abierto.
5. Medidas de la resistencia y autoinducción con un devanado cortocircuitado

Debe realizarse un número de ensayos suficiente para dar los valores de los cinco parámetros independientes requeridos. La selección del mejor procedimiento de

ensayo depende de numerosas consideraciones tales como el tipo y potencia nominal del transformador a ensayar, la precisión deseada y los aparatos disponibles.

Las resistencias de los devanados a la corriente continua pueden determinarse con un puente de Wheatstone, o midiendo la caída de tensión en el devanado cuando es asiente de una corriente continua conocida. En el caso de transformadores pequeños, las resistencias de los devanados a la corriente continua suelen considerarse iguales a sus resistencias efectivas. Los coeficientes de autoinducción e inducción mutua y las razones de las autoinducciones a las inducciones mutuas pueden determinarse a partir de ensayos con un devanado en circuito abierto, y los ensayos en cortocircuito proporcionan un medio para determinar el coeficiente de fuga y el coeficiente de acoplo.

Las cinco constantes de un transformador de dos devanados con núcleo de aire pueden determinarse fácilmente midiendo la autoimpedancia de cada uno de sus devanados teniendo el otro en circuito abierto, y midiendo la inducción mutua. Corrientemente, las medidas se realizan mediante puentes adecuados para corriente alterna. Las únicas dificultades que pueden, probablemente, encontrarse son las resultantes de los efectos de las capacidades parásitas, los cuales pueden ser muy importantes a frecuencias elevadas. Como no hay pérdidas en el núcleo, la resistencia aparente de cada devanado con el otro en circuito abierto es su resistencia efectiva a la frecuencia empleada en la medida. Si son despreciables los efectos de las capacidades distribuidas y el efecto cortical, las resistencias e inductancias son prácticamente constantes.

En cambio, cuando el transformador tiene núcleo de hierro las medidas se complican mucho a causa de las características magnéticas no lineales del hierro y de la existencia de pérdida en el núcleo. A causa de ésta, la resistencia aparente de un devanado cuando el otro está en circuito abierto no es su resistencia efectiva, sino una resistencia mayor; las resistencias efectivas de los devanados no pueden, pues, obtenerse a partir de ensayos en circuito abierto. Además, los valores de los coeficientes de autoinducción e inducción mutua dependen de la amplitud de la inducción magnética alterna y, cuando por uno de los devanados circula corriente continua, de la intensidad de ésta. Por tanto, las inductancias deberán medirse en condiciones que se aproximen todo lo posible a las condiciones de utilización del transformador. Los valores de las inductancias dependen también de la historia magnética del núcleo, ya que el magnetismo remanente tiene un efecto apreciable sobre la permeabilidad aparente del material del núcleo. Por otra parte, los coeficientes aparentes de autoinducción e inducción mutua dependen de la forma de onda de la variación de flujo y los valores medidos dependen también del método de medida². Por todas estas razones, resulta inútil intentar lograr una gran precisión en la medida de los coeficientes de autoinducción e inducción mutua, puesto que es prácticamente cierto que los valores de las inductancias en condiciones de funcionamiento no serán exactamente iguales a los valores medidos.

Las características de un transformador dependen en gran manera de las fugas magnéticas y, afortunadamente, éstas pueden determinarse con precisión a partir de los ensayos en cortocircuito descritos en la parte c) de este apartado. Además, la variabilidad de los coeficientes de autoinducción e inducción mutua tiene relati-

E. PETERSON, «Impedance of a Nonlinear Circuit Element», *A. I. E. E. Trans.*, 46 (1927) 528-534.

vamente poca importancia cuando sea pequeña la amplitud de la inducción magnética alterna, como suele ocurrir en los transformadores para comunicaciones.

3a. *Medida de autoinducciones.* Las autoinducciones se pueden medir por varios procedimientos. La elección del mejor está influida por los valores de la intensidad de corriente, tensión y potencia que intervienen; por la frecuencia a la que se realicen las medidas; y por el hecho de si hay que medir las inductancias incrementales en presencia de corriente continua.

Cuando se realizan las medidas a frecuencias del orden de las de los sistemas de potencia y cuando la corriente en vacío, tensión y potencia son suficientemente grandes, la impedancia en circuito abierto de un transformador por cuyos devanados no circule corriente continua se puede medir utilizando instrumentos tipo para corriente alterna, tal como se indica en la figura 3. En ella se ha representado un ensayo en circuito abierto para determinar la pérdida en el núcleo y la corriente de excitación de un transformador para sistema de potencia. La autoimpedancia Z_{oc} del devanado excitado es:

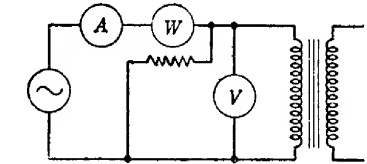


FIG. 3. Ensayo en circuito abierto con instrumentos tipo para corriente alterna

$$Z_{oc} = \frac{V}{I_{\phi}}, \quad (51)$$

donde V es el valor eficaz de la tensión aplicada leído en el voltímetro e I_{ϕ} es la intensidad eficaz de la corriente de excitación determinada por la lectura del amperímetro A corregida, si fuera necesario de las corrientes que circulan por el voltímetro y por el devanado de tensión del vatímetro. La resistencia aparente R_{oc} es:

$$R_{oc} = \frac{P_{nl}}{I_{\phi}^2}, \quad (52)$$

donde P_{nl} es la potencia absorbida por el transformador determinada por la lectura del vatímetro W corregida si fuera necesario de las pérdidas de potencia en el voltímetro y en el devanado de tensión del vatímetro. Obsérvese que R_{oc} no es la resistencia efectiva del devanado excitado. La autorreactancia del devanado es igual a su reactancia en circuito abierto X_{oc} y se:

$$X_{oc} = \sqrt{Z_{oc}^2 - R_{oc}^2}, \quad (53)$$

de donde puede calcularse el coeficiente de autoinducción si se conoce la frecuencia.

En el caso de frecuencias más elevadas y corrientes más débiles, las autoinducciones se pueden medir satisfactoriamente empleando un puente para corriente alterna adecuado. Las medidas deben realizarse a frecuencias suficientemente bajas para evitar los errores debidos a las capacidades parásitas. Si hay que medir la inductancia incremental circulando corriente continua por el devanado excitado, el circuito puente deberá disponerse de manera que proporcione un camino a la corriente continua, y la impedancia del generador de continua no deberá entrar

en la medida. La modificación del puente de Hay³, indicada en la figura 4, reúne satisfactoriamente estos requisitos. En la figura 4, *cc* es un generador ajustable de corriente continua, *A* es un amperímetro para corriente continua, *det* es un detector adecuado, y *Tr* es el transformador que se ensaya. Los condensadores confinan a la corriente continua al camino determinado por *R_c* y el transformador y como el puente puede equilibrarse ajustando *R_a* y *R_b*, la corriente continua no se verá alterada por el proceso de obtención del equilibrio. Puede demostrarse que cuando está equilibrado el puente, la inductancia incremental en circuito abierto *L_{oc}* del transformador es:

$$L_{oc} = \frac{R_a R_c C_b}{1 + (R_b \omega C_b)^2}, \quad (54)$$

y la resistencia aparente *R_{oc}* es:

$$R_{oc} = \frac{R_a R_b R_c (\omega C_b)^2}{1 + (R_b \omega C_b)^2}. \quad (55)$$

Cuando se equilibra el puente para los armónicos fundamentales de las corrientes, no está equilibrado para los armónicos superiores introducidos por el núcleo de hierro del transformador, por lo que será imposible obtener una señal nula en un detector

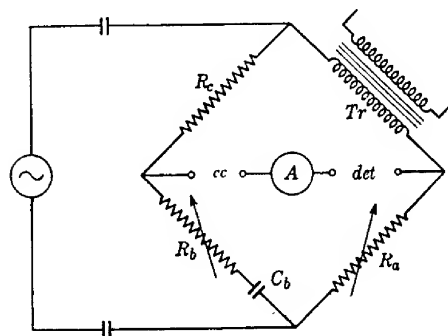


FIG. 4. Puente de Hay para la medida de la inductancia incremental.

que sea sensible a los armónicos. Esta dificultad puede salvarse utilizando un detector selectivo, tal como un analizador de ondas, sintonizado a la frecuencia fundamental. Para frecuencias del orden de 250-500 Hz, el detector puede ser un receptor telefónico, utilizado con un filtro pasa-baja para reducir su sensibilidad a los armónicos superiores. La inducción magnética alterna en el transformador es muy aproximadamente proporcional a la componente alterna de su tensión en terminales dividida por la frecuencia. Se puede medir esta

tensión alterna mediante un voltímetro de válvula de un tipo que sólo mide tensiones alternas. Si se supone que la tensión alterna varía sinusoidalmente, la amplitud del flujo alterno se podrá calcular mediante la ecuación (19) del capítulo VI.

Cuando la intensidad o la tensión es tan grande que no resulten convenientes los métodos de puente, la inductancia incremental podrá medirse por medio del circuito serie indicado en la figura 5a, que comprende un generador de tensión alterna sinusoidal, una resistencia no inductiva *R* de valor conocido, un generador ajustable de corriente continua y un amperímetro *A* para corriente continua en serie con el

³ Para una descripción más completa de este puente, véase F. E. TERMAN, *Measurements in Radio Engineering* (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1935), 53-58. Para otra disposición del puente de Hay véase B. HAGUE, *Alternating-Current Bridge Methods* (4a. ed., Londres: Sir Isaac Pitman & Sons, Ltd., 1938), 391-392.

transformador. Las magnitudes de las componentes alternas de las caídas de tensión *V₁₂*, *V₂₃* y *V₁₃* entre los puntos indicados en el esquema del circuito se pueden medir conectando sucesivamente un voltímetro de válvula adecuado entre los distintos pares de puntos. El voltímetro de válvula debe ser de un tipo que sólo indique

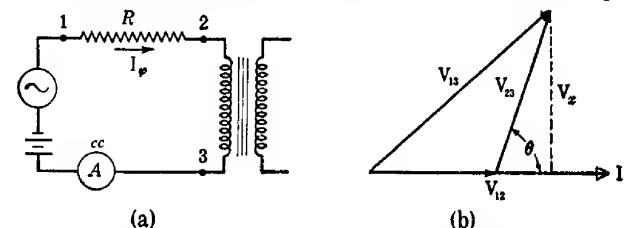


FIG. 5. Circuito serie para la medida de la inductancia incremental

tensiones alternas. Si estas tensiones alternas se suponen sinusoidales, podrán representarse por los vectores *V₁₂*, *V₂₃* y *V₁₃* de la figura 5b, que forman un triángulo. El factor de potencia del transformador en circuito abierto puede calcularse a partir de las lecturas *V₁₂*, *V₂₃* y *V₁₃*; viene dado por:

$$\cos \theta = \frac{V_{13}^2 - V_{12}^2 - V_{23}^2}{2 V_{12} V_{23}}. \quad (56)$$

La intensidad *I_φ* de la corriente alterna de excitación es:

$$I_{\phi} = \frac{V_{12}}{R}; \quad (57)$$

y puede calcularse a partir de la lectura *V₁₂* del voltímetro y de la resistencia conocida *R*. La inductancia incremental *L_{oc}* viene entonces dada por:

$$L_{oc} = \frac{V_{23} \sin \theta}{\omega I_{\phi}}. \quad (58)$$

Si el factor de potencia en circuito abierto es tan pequeño que la caída *V_x* en la reactancia (fig. 5b) es sustancialmente igual a *V₂₃*, entonces,

$$L_{oc} \approx \frac{V_{23}}{\omega I_{\phi}} = \frac{1}{\omega} \frac{V_{23}}{V_{12}} R. \quad (59)$$

3b. Medida de inducciones mutuas. También el coeficiente de inducción mutua puede determinarse mediante un ensayo en circuito abierto, bien sea por medio de un puente adecuado o por medida de la intensidad de la corriente alterna que circula por el devanado excitado y de la tensión inducida en el devanado en circuito abierto. Como la corriente que circula por el voltímetro deberá ser suficientemente débil para tener un efecto despreciable sobre la corriente que circula por el devanado excitado y para producir caídas de tensión despreciables en el transformador, en los

transformadores pequeños habrá que emplear un voltímetro de válvula. Si se excita el primario y se deja el secundario en circuito abierto, la reactancia mutua X_m es:

$$X_m = \frac{E_{oc2}}{I_{\varphi 1}}, \quad (60)$$

donde E_{oc2} es la tensión inducida en el secundario en circuito abierto e $I_{\varphi 1}$ es la intensidad de la corriente alterna de excitación del primario. Esta ecuación supone que la componente de pérdida en el núcleo de la corriente de excitación es despreciable y que la intensidad eficaz de la corriente de excitación es, por tanto, sustancialmente igual al valor eficaz de su componente reactiva o magnetizante.

Suele ser más útil el cociente entre los coeficientes de inducción mutua y auto-inducción que el valor verdadero del coeficiente de inducción mutua, ya que dicho cociente es sustancialmente constante a pesar de la naturaleza variable de las inductancias. Puede determinarse dicho cociente midiendo la tensión E inducida en el devanado en circuito abierto y la tensión alterna V aplicada al devanado excitado. Así, si se excita el primario y se deja el secundario en circuito abierto, las ecuaciones vectoriales para las tensiones son:

$$V_1 = (R_1 + jX_{11})I_{\varphi 1} \quad (61)$$

$$E_{oc2} = jX_m I_{\varphi 1}, \quad (62)$$

donde R_1 es la resistencia efectiva del primario y X_{11} es su autorreactancia. De las ecuaciones (61) y (62), el cociente entre las magnitudes de las tensiones resulta ser:

$$\frac{V_1}{E_{oc2}} = \frac{\sqrt{R_1^2 + X_{11}^2}}{X_m} = \frac{X_{11}}{X_m} \sqrt{1 + \left(\frac{R_1}{X_{11}}\right)^2}. \quad (63)$$

Por tanto,

$$\frac{X_{11}}{X_m} = \frac{L_1}{M} = \frac{V_1}{E_{oc2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_1}{X_{11}}\right)^2}}. \quad (64)$$

Análogamente, si se aplica al secundario una tensión V_2 y se mide una tensión inducida E_{oc1} en el primario en circuito abierto,

$$\frac{X_m}{X_{22}} = \frac{M}{L_2} = \frac{E_{oc1}}{V_2} \sqrt{1 + \left(\frac{R_2}{X_{22}}\right)^2}, \quad (65)$$

donde R_2 es la resistencia efectiva del secundario.

Si la frecuencia fuera tan elevada que las resistencias de los devanados resultaran pequeñas frente a sus autorreactancias, los cocientes de inductancias serían muy aproximadamente iguales a los cocientes entre las tensiones de las ecuaciones (64) y (65). No obstante, las medidas deben realizarse a frecuencias suficientemente bajas para evitar los errores introducidos por los efectos de las capacidades distribuidas.

En un transformador con núcleo de hierro, el cociente entre la inducción mutua y la autoinducción es aproximadamente igual al cociente entre los números de espiras. Así, de la ecuación (43),

$$\frac{L_1}{M} = \frac{1}{k_1} \frac{N_1}{N_2}, \quad \blacktriangleright (66)$$

y de la ecuación (44),

$$\frac{M}{L_2} = k_2 \frac{N_1}{N_2}, \quad \blacktriangleright (67)$$

donde k_1 y k_2 son los cocientes entre el flujo mutuo y el flujo total creados por cada corriente actuando por sí sola. Como en los transformadores con núcleo de hierro la mayor parte del flujo atraviesa ambos devanados, k_1 y k_2 son casi iguales a la unidad.

► Luego, de las ecuaciones (66) y (67) resulta que L_1/M es ligeramente superior a la razón de transformación N_1/N_2 , y L_2/M ligeramente inferior. ◀

La media geométrica de los dos cocientes de inductancias dados en las ecuaciones (66) y (67) es:

$$\sqrt{\frac{L_1}{M} \times \frac{M}{L_2}} = \frac{N_1}{N_2} \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$$

o sea,

$$\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{N_1}{N_2} \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}. \quad \blacktriangleright (68)$$

► La raíz cuadrada del cociente entre las autoinducciones es, pues, casi igual al cociente entre los números de espiras de un transformador con núcleo de hierro. ◀

Corrientemente, los cocientes entre inductancias de las ecuaciones (66), (67) y (68) difieren del cociente entre los números de espiras en un tanto por ciento muy pequeño y por tanto, se suele suponer que estos cocientes de inductancias son iguales al cociente entre los números de espiras. Sin embargo, no existen medidas eléctricas a partir de las cuales pueda determinarse exactamente el cociente entre los números de espiras.

3c. *Ensayos en cortocircuito.* La impedancia en cortocircuito de un transformador es la impedancia medida entre los terminales de un devanado cuando el otro está cortocircuitado. En el apartado 8b del capítulo XIII se describe el ensayo en cortocircuito tal como suele aplicarse a transformadores de sistemas de potencia, y se ve que la impedancia en cortocircuito es casi igual a la impedancia equivalente referida al devanado excitado. Así, pues, el ensayo en cortocircuito es un medio sencillo de determinación del efecto combinado de las fugas magnéticas en ambos devanados. En este apartado se estudian algunos de los factores que deben considerarse al medir la impedancia en cortocircuito de un transformador para comunicaciones, y se pone de manifiesto que los coeficientes de fuga y de acoplo pueden determinarse a partir de los resultados de un ensayo en cortocircuito y un ensayo en circuito abierto.

En los transformadores para comunicaciones, la impedancia en cortocircuito suele poderse medir satisfactoriamente por medio de un puente para corriente alterna adecuado. Como la reactancia en cortocircuito se debe casi por completo a los flujos de fuga, los cuales no se hallan afectados apreciablemente por la condición magnética del núcleo, no será necesario medir la impedancia en cortocircuito con una corriente continua superpuesta en el transformador, aun cuando éste deba funcionar de tal manera. Además, salvo por lo que respecta a los efectos de las capacidades distribuidas y al efecto cortical, las resistencias e inductancias en cortocircuito son sustancialmente constantes, y por tanto si dichos efectos no fueran despreciables, las medidas se podrían realizar a cualquier tensión y frecuencia convenientes. En los transformadores de audiofrecuencia, las medidas se suelen hacer a unos 500 Hz porque es una frecuencia conveniente para las medidas con puente y también porque es aproximadamente la media geométrica del intervalo de frecuencias en el que suelen operar estos transformadores.

Las medidas pueden hacerse con uno u otro devanado cortocircuitado y el otro excitado, con tal que para ambas disposiciones sean despreciables los efectos de las capacidades distribuidas a la frecuencia empleada en el ensayo. Suelen ser despreciables en los transformadores reductores de salida utilizados en los circuitos de comunicaciones para acoplar la salida de un amplificador a una carga de impedancia baja, tal como un altavoz. En cambio, en los transformadores elevadores utilizados para acoplar un generador de impedancia baja a la reja de una válvula amplificadora, los efectos de las capacidades distribuidas suelen ser más importantes y por tanto se hace frecuentemente necesario medir sobre su primario (baja tensión) con el secundario (alta tensión) cortocircuitado, la impedancia en cortocircuito de dicho transformador de entrada. Así se reducen a un mínimo los efectos de dichas capacidades, puesto que el devanado al que corresponde mayor capacidad está cortocircuitado.

Si se cortocircuita el secundario y se aplica una tensión V_1 a los terminales del primario, las ecuaciones vectoriales para las tensiones son:

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \quad (69)$$

$$0 = Z_{12}I_1 + Z_{22}I_2, \quad (70)$$

donde Z_{11} y Z_{22} son las autoimpedancias de los devanados. La impedancia mutua Z_{12} es:

$$Z_{12} = \pm jX_m = \pm j\omega M, \quad (71)$$

donde X_m es la reactancia mutua. El signo algebraico de la ecuación (71) está determinado por el sentido positivo supuesto para la corriente del secundario. Eliminando la corriente del secundario entre las ecuaciones (69) y (70) se tiene,

$$V_1 = \left(Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22}} \right) I_1. \quad (72)$$

Compárese con la ecuación (24) de este mismo capítulo. La única diferencia existente entre las ecuaciones (24) y (72) es que en la ecuación (24) están incluidas las impedancias del generador y de la carga, mientras que la ecuación (72) se aplica al trans-

formador solo. La impedancia en cortocircuito Z_{sc1} medida desde el lado del primario con el secundario cortocircuitado es:

$$Z_{sc1} = \frac{V_1}{I_1} = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22}} \quad (73)$$

$$= Z_{11} - \frac{(\pm jX_m)^2}{Z_{22}} = Z_{11} + \frac{X_m^2}{Z_{22}}. \quad (74)$$

Análogamente, la impedancia en cortocircuito medida desde el lado del secundario con el primario cortocircuitado es:

$$Z_{sc2} = Z_{22} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{11}} = Z_{22} + \frac{X_m^2}{Z_{11}}. \quad (75)$$

Si se expresan las impedancias complejas Z_{11} y Z_{22} en función de las resistencias y autorreactancias de los devanados, la impedancia en cortocircuito Z_{sc1} se podrá expresar en la forma,

$$\begin{aligned} Z_{sc1} &= R_1 + jX_{11} + \frac{X_m^2}{R_2 + jX_{22}} \\ &= R_1 + jX_{11} + \frac{X_m^2(R_2 - jX_{22})}{R_2^2 + X_{22}^2}, \end{aligned} \quad (76)$$

donde R_1 , R_2 son las resistencias efectivas de los devanados y X_{11} , X_{22} son sus autorreactancias. La resistencia en cortocircuito R_{sc1} es:

$$R_{sc1} = R_1 + \frac{X_m^2}{R_2^2 + X_{22}^2} R_2, \quad (77)$$

y la reactancia en cortocircuito X_{sc1} es:

$$X_{sc1} = X_{11} - \frac{X_m^2}{R_2^2 + X_{22}^2} X_{22}. \quad (78)$$

Obsérvese que la resistencia en cortocircuito es mayor que la resistencia efectiva del primario, debido a que el secundario cortocircuitado absorbe potencia. Por otra parte, la reactancia en cortocircuito es menor que la autorreactancia del primario, a causa del efecto desmagnetizante de la corriente del secundario. Esta modificación de la resistencia y reactancia aparentes es una propiedad general de las corrientes inducidas que circulan por circuitos limitados, como ocurre en este análisis, o como ocurre con las corrientes de Foucault que circulan por masas de metal. Es interesante el hecho de que el factor $X_m^2/(R_2^2 + X_{22}^2)$ de las ecuaciones (77) y (78) —que en cierto modo «refiere» al primario la resistencia y reactancia del secundario— sea igual al cuadrado del cociente de las tensiones en circuito abierto. Es decir,

$$\frac{X_m^2}{R_2^2 + X_{22}^2} = \left(\frac{E_{oc1}}{V_2} \right)^2, \quad (79)$$

donde E_{oc1} es la tensión que se induciría en el primario si estuviera en circuito abierto y se aplicara al secundario la tensión V_2 .

Salvo a frecuencias muy bajas, el cociente entre las tensiones en circuito abierto de un transformador con núcleo de hierro es casi igual al cociente entre los números de espiras y por tanto, por la ecuación (77),

$$R_{sc1} \approx R_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_2. \quad (80)$$

Por definición (véase apartado 6, cap. XIII), el segundo miembro de la ecuación (80) es la resistencia equivalente referida al primario, y por tanto, la resistencia en cortocircuito es casi igual a la resistencia equivalente. Este hecho está de acuerdo con la conclusión a la que se llegó por otro camino en el apartado 8b del capítulo XIII. La suma de las resistencias efectivas de los dos devanados referidas a un mismo lado se puede determinar midiendo la resistencia en cortocircuito, pero a partir de esta medida, no hay manera de determinar exactamente la resistencia efectiva de cada devanado por separado. Afortunadamente es su valor combinado, resistencia equivalente o en cortocircuito, cuanto se suele necesitar para determinar la caída óhmica total en el transformador con precisión suficiente para la mayoría de los fines. En los transformadores pequeños para audiofrecuencia las resistencias efectivas de los devanados suelen suponerse iguales a sus resistencias a la corriente continua.

Si se mide la impedancia en cortocircuito a una frecuencia tan elevada que la autorreactancia del secundario se haga mucho mayor que la resistencia del secundario, de las ecuaciones (77) y (78) resultan las siguientes expresiones aproximadas:

$$R_{sc1} \approx R_1 + \left(\frac{X_m}{X_{22}}\right)^2 R_2 \quad (81)$$

$$X_{sc1} \approx X_{11} - \left(\frac{X_m}{X_{22}}\right)^2 X_{22} = X_{11} \left(1 - \frac{X_m^2}{X_{11}X_{22}}\right), \quad (82)$$

y por tanto, de la ecuación (33),

$$X_{sc1} \approx \sigma X_{11} = \sigma X_{oc1}, \quad \blacktriangleright (83)$$

donde σ es el coeficiente de fuga y la autorreactancia X_{11} es igual a la reactancia X_{oc1} medida desde el lado del primario con el secundario en circuito abierto. A la reactancia σX_{11} se le llama a veces *reactancia en cortocircuito ideal* y es el valor hipotético de la reactancia en cortocircuito para resistencia nula del secundario. La reactancia en cortocircuito ideal σX_{11} es una cantidad importante no solamente en la teoría del transformador sino también en la teoría de muchos tipos de máquinas eléctricas giratorias. A menudo la resistencia del secundario es tan pequeña que la reactancia en cortocircuito real X_{sc1} es aproximadamente igual a la resistencia en cortocircuito ideal σX_{11} , como se indica en la ecuación (83).

El valor aproximado del coeficiente de fuga puede determinarse a partir de los

valores medidos de las reactancias en cortocircuito y en circuito abierto. Así, de la ecuación (83),

$$\sigma \approx \frac{X_{sc1}}{X_{oc1}}. \quad \blacktriangleright (84)$$

El coeficiente de acoplo k está relacionado con el coeficiente de fuga σ por la ecuación (32); de donde,

$$k = \sqrt{1 - \sigma} \quad (85)$$

$$\approx \sqrt{1 - \frac{X_{sc1}}{X_{oc1}}}. \quad \blacktriangleright (86)$$

Aun cuando las expresiones aproximadas de las ecuaciones (81) a (86) suelen tener suficiente precisión, hay que hacer notar que al desprestigiar la resistencia del secundario se introduce un error mucho mayor en la ecuación (82) que en la (81), ya que el segundo miembro de la ecuación (82) es la diferencia entre dos cantidades casi iguales. De la ecuación (78) puede deducirse la expresión exacta del coeficiente de fuga, que es:

$$\sigma = \frac{X_{sc1}}{X_{oc1}} - \left(\frac{R_2}{X_{22}}\right)^2 \left(1 - \frac{X_{sc1}}{X_{oc1}}\right). \quad (87)$$

Como la razón de la reactancia en cortocircuito a la en circuito abierto de un transformador con núcleo de hierro suele ser menor que 0,01, la cantidad $\left(1 - \frac{X_{sc1}}{X_{oc1}}\right)$ es casi igual a uno, y por tanto, cuando $(R_2/X_{22})^2$ sea despreciable frente a X_{sc1}/X_{oc1} se podrá utilizar la expresión aproximada para σ de la ecuación (84).

3d. *Conclusiones referentes a las medidas de los parámetros.* Según se indicó al principio de este apartado, cuando se desprecian los efectos de las capacidades, la pérdida en el núcleo y la no linealidad magnética, el funcionamiento del transformador como elemento de circuito puede expresarse en función de cinco parámetros independientes, tres de los cuales se refieren a las inductancias y dos a las resistencias.

Los coeficientes de autoinducción e inducción mutua pueden determinarse por medio de los ensayos en circuito abierto descritos en las partes a) y b) de este apartado, y las inductancias en cortocircuito se pueden determinar a partir del ensayo en cortocircuito descrito en la parte c). Para determinar los valores de los tres parámetros de inductancia deberán realizarse al menos tres medidas de inductancias independientes y dada la importancia de las fugas magnéticas, una de estas medidas ha de ser un ensayo en cortocircuito. Por ejemplo, los tres parámetros inductivos pueden determinarse a partir de medidas de la inductancia en cortocircuito de un lado, la inductancia en circuito abierto de un devanado, y el tercer ensayo puede ser una medida de la inductancia en circuito abierto del otro devanado (para las mismas condiciones magnéticas en el núcleo), o una medida de la razón de tensiones en circuito abierto (a partir de la cual puede determinarse la razón del coeficiente de autoinducción al de inducción mutua).

Por lo que respecta a las resistencias, suele ser posible formular hipótesis simplificadoras. La resistencia combinada de ambos devanados, medida en cortocir-

cuito, suele ser cuanto se necesita para determinar la caída óhmica total en el transformador. Sin embargo, si se precisa un valor aproximado de la resistencia efectiva de cada devanado, pueden medirse las resistencias a la corriente continua y determinar la razón de la resistencia efectiva a la resistencia en corriente continua comparando la resistencia medida en cortocircuito con la resistencia en cortocircuito calculada por sustitución de las resistencias en corriente continua en la ecuación (81). Frecuentemente se puede suponer que las resistencias efectivas son iguales a las resistencias en corriente continua.

4. INDUCTANCIA DE FUGA

Como el factor k_1 introducido en la ecuación (42), es la razón del flujo mutuo φ_{21} al flujo total φ_{11} creado por i_1 , $(1 - k_1)$ será la razón del flujo de fuga φ_{11} al flujo total φ_{11} ; así,

$$1 - k_1 = 1 - \frac{\varphi_{21}}{\varphi_{11}} = \frac{\varphi_{11} - \varphi_{21}}{\varphi_{11}} \quad (88)$$

Pero la diferencia entre el flujo total φ_{11} y el mutuo φ_{21} es el flujo de fuga φ_{11} del devanado 1 respecto al devanado 2; de donde,

$$1 - k_1 = \frac{\varphi_{11}}{\varphi_{11}} = \frac{L_{11}}{L_1}, \quad (89)$$

donde L_{11} es la inductancia de fuga del devanado 1 respecto al 2. De la ecuación (89),

$$L_{11} = (1 - k_1)L_1 = L_1 - k_1L_1 \quad (90)$$

y sustituyendo la ecuación (43) en la (90),

$$L_{11} = L_1 - \frac{N_1}{N_2} M. \quad (91)$$

Análogamente, la inductancia de fuga L_{12} del devanado 2 respecto al 1 puede expresarse en la forma,

$$L_{12} = L_2 - \frac{N_2}{N_1} M. \quad (92)$$

En la ecuación (91), $(N_1/N_2)M$ es la inductancia mutua referida al primario y es la componente de la autoinducción del primario debida al flujo mutuo. Análogamente, en la ecuación (92), $(N_2/N_1)M$ es la inductancia mutua referida al secundario. Obsérvese que si los devanados tuvieran igual número de espiras, las inductancias de fuga serían las diferencias entre los coeficientes de autoinducción y de inducción mutua. Aun cuando los coeficientes de autoinducción e inducción mutua de un transformador con núcleo de hierro no son constantes, la diferencia entre el coeficiente de autoinducción de un devanado y el de inducción mutua referido a dicho devanado es igual a la inductancia de fuga, según indican las ecuaciones (91) y (92),

y por tanto es casi constante, ya que los flujos de fuga se asientan parcialmente en el aire.

Las ecuaciones (91) y (92) sugieren un método teóricamente posible para la determinación de las inductancias de fuga. Así, si se conoce la razón de los números de espiras y se miden o calculan a partir de los datos de diseño los coeficientes de autoinducción e inducción mutua, estas ecuaciones dan las inductancias de fuga. No obstante, este método es muy poco preciso cuando se emplean los valores *medidos* de los coeficientes de autoinducción e inducción mutua de un transformador con núcleo de hierro. La inductancia de fuga de un tal transformador es, frecuentemente, del orden de un 0,2 % de su coeficiente de autoinducción. Por ejemplo, si el coeficiente de autoinducción de un devanado es de 10 H, su inductancia de fuga puede ser de unos 0,20 H. Si hay que determinar hasta el milihenry (o con una aproximación del 5 % de su valor) el valor de la inductancia de fuga a partir de la ecuación (91), habrá que medir el coeficiente de autoinducción con la precisión del milihenry, lo que representa un error menor que el 0,01 % de su verdadero valor, y el coeficiente de inducción mutua deberá medirse con igual tanto por ciento de precisión. En el caso de transformadores con núcleo de hierro es imposible realizar medidas tan precisas.

Aun cuando no puedan determinarse con precisión las inductancias de fuga de un transformador con núcleo de hierro sustituyendo en las ecuaciones (91) y (92) los valores *medidos* de los coeficientes de autoinducción e inducción mutua, dichas ecuaciones se utilizan ocasionalmente en cálculos de diseño⁴. Cuando así ocurre, los coeficientes de autoinducción e inducción mutua se calculan a partir de la geometría de los devanados y luego se determinan las inductancias de fuga mediante las ecuaciones. Como las inductancias de fuga no están afectadas por el flujo que se halla totalmente confinado en el núcleo, basta calcular solamente los coeficientes de autoinducción e inducción mutua debidos a los flujos que se hallan parcialmente fuera del núcleo, a los que se refieren las líneas finas de trazo continuo de las figuras 2b y 3b del capítulo XII. Suelen realizarse aproximaciones simplificativas referentes a la geometría de estos campos de fuga del núcleo y a los resultados calculados se aplican factores empíricos de corrección. Como los campos de fuga no se hallan muy afectados por el núcleo, a veces se desprecia por completo el efecto del núcleo de hierro y se calculan las inductancias de fuga como en las ecuaciones (91) y (92) a partir de fórmulas que dan los coeficientes de autoinducción e inducción mutua de bobinas con núcleo de aire⁵.

5. CIRCUITOS EQUIVALENTES PARA TRANSFORMADORES DE DOS DEVANADOS

Suele ser muy útil en el análisis poder representar un transformador, válvula electrónica o máquina giratoria por un circuito equivalente que comprenda elementos resistivos, inductivos y capacitivos. Los circuitos equivalentes ayudan frecuentemente a ver las relaciones expresadas en la teoría fundamental. Por ejemplo, el circuito equivalente de la figura 6 del capítulo XII pone claramente de manifiesto

⁴ L. F. BLUME, editor, *Transformer Engineering* (New York: John Wiley & Sons, 1938), 76-78.

⁵ E. B. ROSA y F. W. GROVER, «Formulas and Tables for the Calculation of Mutual and Self Inductances», *Sci. Paper Nat. Bur. Stand.*, N° 169 (3a. ed. (revisada); Washington: Government Printing Office, 1916).

los factores de importancia en la teoría de los transformadores y por tanto sirve para sugerir las simplificaciones que pueden hacerse a menudo en un estudio analítico, como el desarrollado en el capítulo XIII. No es ese, sin embargo, el único circuito equivalente que puede utilizarse para representar un transformador de dos devanados, ya que existen una infinidad de circuitos equivalentes, algunos de los cuales pueden tener un empleo especial.

Siempre que se represente un dispositivo por un circuito «equivalente», es de la máxima importancia examinar con cuidado en qué aspectos el dispositivo real y su circuito «equivalente» son equivalentes y en qué se diferencian. El circuito «equivalente» no puede ser equivalente al dispositivo real en todos los aspectos a menos que fuera idéntico al dispositivo real. La falta de comprensión de las limitaciones de un circuito equivalente puede conducir fácilmente a conclusiones erróneas.

Los circuitos equivalentes que se deducirán en este apartado se basan en la teoría de circuitos acoplados, según se expresa en las ecuaciones (5) y (6). Estas ecuaciones, y por tanto los circuitos equivalentes, precinden de los efectos de la no linealidad magnética, de la pérdida en el núcleo y de las capacidades distribuidas de los devanados.

Las ecuaciones de las tensiones en circuitos acoplados aplicadas a un transformador, formuladas en las ecuaciones (5) y (6) son:

$$v_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (93)$$

$$v_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}, \quad (94)$$

donde v_1 y v_2 son las tensiones instantáneas en los terminales de los dos devanados e i_1 , i_2 son las intensidades instantáneas de las corrientes. Los sentidos positivos de estas corrientes y tensiones son los indicados en la figura 6a. Examinando estas ecuaciones se ve que son aplicables, no solamente al transformador, sino también

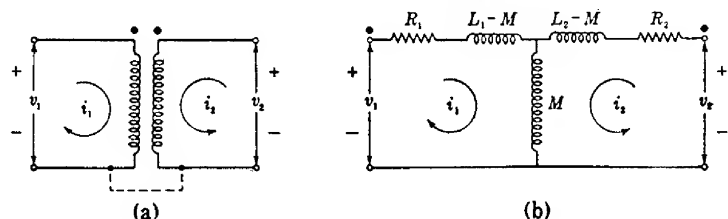


Fig. 6. Un transformador y su circuito equivalente deducido de las ecuaciones (93) y (94)

al circuito de la figura 6b que, por tanto, será equivalente al transformador en cuanto sus características eléctricas vienen especificadas por las ecuaciones (93) y (94). Obsérvese que este circuito equivalente representa a las ecuaciones tanto en las condiciones de estado permanente como transitorio. En la red de la que forma parte el transformador, éste puede sustituirse por el circuito equivalente de la figura 6b, con tal que o exista una conexión directa entre terminales de igual polaridad (indicada por la línea de trazos de la figura 6a) o que pueda realizarse sin alteración de

las condiciones del circuito que afectan al problema en consideración. Obsérvese que si los devanados tienen igual número de espiras, las inductancias $L_1 - M$ y $L_2 - M$ de las ramas son las inductancias de fuga de primario y secundario. En cambio, si la razón de los números de espiras no es la unidad, o $L_1 - M$ o bien $L_2 - M$ es casi siempre negativa. En general, una inductancia negativa es una cantidad ficticia, pero a una frecuencia única una inductancia negativa $-L$ tiene una impedancia $-j\omega L$ que es igual a la impedancia $1/j\omega C$ de un condensador cuya capacidad C es igual a $1/\omega^2 L$.

Para proseguir el estudio, supongamos que las corrientes y tensiones varían sinusoidalmente, con lo que podrán escribirse las ecuaciones de las tensiones en forma vectorial de la manera siguiente:

$$V_1 = (R_1 + jX_{11})I_1 + jX_m I_2 \quad (95)$$

$$V_2 = (R_2 + jX_{22})I_2 + jX_m I_1. \quad (96)$$

Estas ecuaciones, en las que intervienen las cinco constantes del transformador (R_1 , R_2 , L_1 , L_2 y M), determinan unívocamente sus características eléctricas cuando se dan dos cualesquiera de los vectores corriente o tensión, sea explícitamente o por medio de relaciones vectoriales. Además de las cinco constantes fundamentales, puede introducirse una sexta cantidad si se desean las relaciones en una forma especial conveniente en el análisis o en la interpretación física. Así, si se multiplica la ecuación (96) por un número A , elegido arbitrariamente, y se divide por A la corriente del secundario I_2 , las ecuaciones de las tensiones se pueden escribir en la forma,

$$V_1 = (R_1 + jX_{11})I_1 + jAX_m \frac{I_2}{A} \quad (97)$$

$$AV_2 = A^2(R_2 + jX_{22}) \frac{I_2}{A} + jAX_m I_1 \quad (98)$$

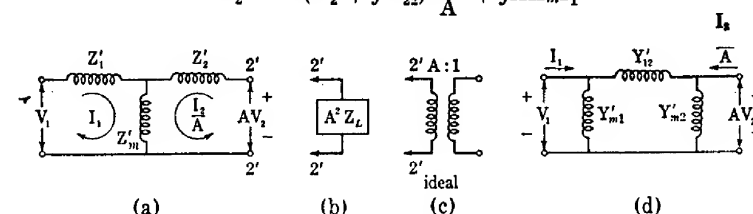


Fig. 7. Circuitos equivalentes generalizados para un transformador y su carga

Si en las ecuaciones (97) y (98) A fuera igual a la razón de transformación N_1/N_2 , entonces AV_2 , I_2/A , $A^2(R_2 + jX_{22})$ y jAX_m serían la tensión del secundario, la corriente del secundario, la autoimpedancia del secundario y la impedancia mutua referida al primario, definidas en el apartado 4 del capítulo XIII. Así, pues, las ecuaciones (97) y (98) se pueden considerar como ecuaciones para el circuito acoplado con la tensión de secundario, corriente del secundario e impedancia «referidas» al primario en un sentido más general que cuando A es la razón de transformación.

Obsérvese que las ecuaciones (97) y (98) son aplicables al circuito T de la figura 7a, en el cual la impedancia mutua Z'_m «referida» al primario es:

$$Z'_m = jAX_m, \quad (99)$$

y las impedancias de las ramas Z'_1 y Z'_2 «referidas» al primario son:

$$Z'_1 = Z_{11} - Z'_m = R_1 + j(X_{11} - AX_m) \quad (100)$$

$$\begin{aligned} Z'_2 &= A^2 Z_{22} - Z'_m \\ &= A^2 R_2 + j(A^2 X_{22} - AX_m) = A^2 R_2 + jA^2 \left(X_{22} - \frac{X_m}{A} \right), \end{aligned} \quad (101)$$

donde Z_{11} y Z_{22} son las autoimpedancias vectoriales de los devanados. Si el secundario de un transformador suministra potencia a una carga cuya impedancia es Z_L , la carga equivalente en la cual una tensión AV_2 crearía una corriente I_2/A tendría una impedancia $A^2 Z_L$, como se indica en la figura 7b, tanto si A es un número real como si es complejo. Si A es real, la tensión AV_2 y la intensidad I_2/A están relacionadas con la tensión verdadera del secundario V_2 y con la intensidad de la corriente del secundario I_2 como lo están las tensiones e intensidades de primario y secundario en un transformador ideal cuya razón de transformación sea A , como se indica en la figura 7c. Así, pues, un transformador será equivalente eléctricamente al circuito T de la figura 7a con la carga equivalente $A^2 Z_L$ de la figura 7b o bien al transformador ideal de la figura 7c conectado a los terminales 2' del circuito T.

Como A puede tener un valor arbitrario cualquiera, existe una infinidad de circuitos equivalentes de éstos, correspondiendo cada uno a un valor A . Como todo circuito T puede sustituirse por un circuito π equivalente, existirá también una infinidad de circuitos π equivalentes de la forma indicada en la figura 7d, correspondiendo cada uno de ellos a un sistema particular de valores de las impedancias de la T de la figura 7a. Las relaciones vectoriales entre las admitancias de la π Y'_{12} , Y'_{m1} e Y'_{m2} de la figura 7d y las impedancias de la T Z'_1 , Z'_2 y Z'_m de la figura 7a son:

$$Y'_{12} = \frac{Z'_m}{D_z} \quad (102)$$

$$Y'_{m1} = \frac{Z'_2}{D_z} \quad (103)$$

$$Y'_{m2} = \frac{Z'_1}{D_z}, \quad (104)$$

donde

$$D_z = Z'_1 Z'_2 + Z'_2 Z'_m + Z'_m Z'_1. \quad (105)$$

El estudio siguiente trata algunos de los circuitos equivalentes particulares que pueden deducirse del circuito equivalente general de la figura 7 mediante el uso de valores apropiados de A .

Caso I: $A = N_1/N_2$.

Si A es igual a la razón de los números de espiras N_1/N_2 , la impedancia Z'_m es, en virtud de la ecuación (99),

$$Z'_m = j \frac{N_1}{N_2} X_m \quad (106)$$

y las impedancias de las ramas Z'_1 y Z'_2 son, en virtud de las ecuaciones (100) y (101),

$$Z'_1 = R_1 + j \left(X_{11} - \frac{N_1}{N_2} X_m \right) \quad (107)$$

$$Z'_2 = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \left[R_2 + j \left(X_{22} - \frac{N_2}{N_1} X_m \right) \right] \quad (108)$$

Por las ecuaciones (91) y (92), las reactancias $X_{11} - (N_1/N_2)X_m$ y $X_{22} - (N_2/N_1)X_m$ son las reactancias de fuga X_{l1} del primario y X_{l2} del secundario, respectivamente. Luego, cuando A es igual a N_1/N_2 ,

$$Z'_1 = R_1 + jX_{l1} \quad (109)$$

$$Z'_2 = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 (R_2 + jX_{l2}). \quad (110)$$

Las impedancias Z'_1 y Z'_2 son las impedancias de fuga de primario y secundario referidas al primario, y la impedancia Z'_m es la reactancia mutua o magnetizante referida al primario. Por tanto, cuando A es igual a la razón de los números de espiras, el circuito equivalente de la figura 7 se convierte en el de la figura 6b del capítulo XIII (pérdida en el núcleo despreciable). Así, pues, los circuitos equivalentes en que intervienen inductancias de fuga pueden considerarse como casos particulares del circuito equivalente general de la figura 7.

Caso II: $A = 1$.

En estas condiciones, las ecuaciones (99), (100) y (101) se reducen a

$$Z'_m = jX_m \quad (111)$$

$$Z'_1 = R_1 + j(X_{11} - X_m) \quad (112)$$

$$Z'_2 = R_2 + j(X_{22} - X_m). \quad (113)$$

El circuito equivalente de la figura 7 se reduce entonces al de la figura 6b de este capítulo.

Caso III: $A = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$.

Para este valor de A puede demostrarse fácilmente que

$$Z'_m = jkX_{11} \quad (114)$$

$$Z'_1 = R_1 + j(1 - k)X_{11} \quad (115)$$

$$Z'_2 = \frac{L_1}{L_2} R_2 + j(1 - k)X_{11}, \quad (116)$$

donde k es el coeficiente de acoplo. Este circuito equivalente es el que se presenta en la figura 8a. Obsérvese que las reactancias de las impedancias Z'_1 y Z'_2 son iguales en este circuito equivalente. Si se supone que la pérdida en el núcleo varía como el cuadrado de la tensión entre los extremos de la rama paralelo kL_1 , la pérdida en el núcleo podrá disiparse en una resistencia conectada en paralelo con kL_1 , designada por r_c en la figura 8a.

$$\text{Caso IV: } A = \frac{L_1}{M} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}.$$

En estas condiciones, de las ecuaciones (99), (100) y (101),

$$Z'_m = jX_{11} \quad (117)$$

$$Z'_1 = R_1 + j0 \quad (118)$$

$$Z'_2 = \left(\frac{L_1}{M}\right)^2 R_2 + j \frac{\sigma X_{11}}{k^2}, \quad (119)$$

donde σ es el coeficiente de fuga y es igual a $1 - k^2$. En la figura 8b puede verse el circuito equivalente. En éste, la inductancia serie responsable de la fuga magnética se halla totalmente en el lado del secundario de la inductancia paralelo responsable de la corriente magnetizante. La reactancia σX_{11} es la reactancia en cortocircuito ideal, que es ligeramente inferior a la reactancia en cortocircuito X_{sc1} medida desde el lado del primario (véase ec. 87), y por tanto la reactancia $\sigma X_{11}/k^2$ de la ecuación (119) es muy aproximadamente igual a la reactancia en cortocircuito X_{sc1} . En paralelo con L_1 puede conectarse una resistencia r_c que disipe la pérdida en el núcleo si se considera que ésta varía como el cuadrado de la tensión entre los extremos de la inductancia paralelo. Como esta tensión es la tensión entre terminales del primario menos la caída óhmica del primario, es la tensión inducida por todo el flujo (tanto de fuga como mutuo) que atraviesa el primario.

$$\text{Caso V: } A = \frac{M}{L_2} = k \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}.$$

Para este valor de A , las impedancias son:

$$Z'_m = jk^2 X_{11} \quad (120)$$

$$Z'_1 = R_1 + j\sigma X_{11} \quad (121)$$

$$Z'_2 = \left(\frac{M}{L_2}\right)^2 R_2 + j0. \quad (122)$$

Véase la figura 8c. En este circuito la inductancia serie se halla en el lado de primario de la inductancia paralelo, y el empleo de una resistencia r_c en paralelo que disipe la pérdida en el núcleo se basa en la hipótesis de que la pérdida en el núcleo varía como el cuadrado de la tensión inducida por el flujo resultante que atraviesa el secundario.

Obsérvese que variando A entre el valor $(1/k) \sqrt{L_1/L_2}$ de la figura 8b y el $k \sqrt{L_1/L_2}$ de la figura 8c el punto de unión de la inductancia paralelo se traslada de uno a otro extremo de la inductancia serie y varía ligeramente la razón del transformador ideal y los valores de las ramas paralelo y serie del circuito equivalente. El coeficiente de acoplo de los transformadores con núcleo de hierro suele ser tan próximo a la unidad que las diferencias entre los valores de la razón de transfor-

mación y de las inductancias paralelo y serie de las figuras 8b y 8c son tan pequeñas ordinariamente que pueden considerarse por completo inapreciables.

$$\text{Caso VI: } A = \frac{Z_{11}}{jX_m} = \frac{V_1}{E_{oc2}}.$$

Una de las formas más útiles de circuito equivalente se obtiene cuando el factor A es el cociente complejo entre la autoimpedancia y la impedancia mutua. Obsérvese

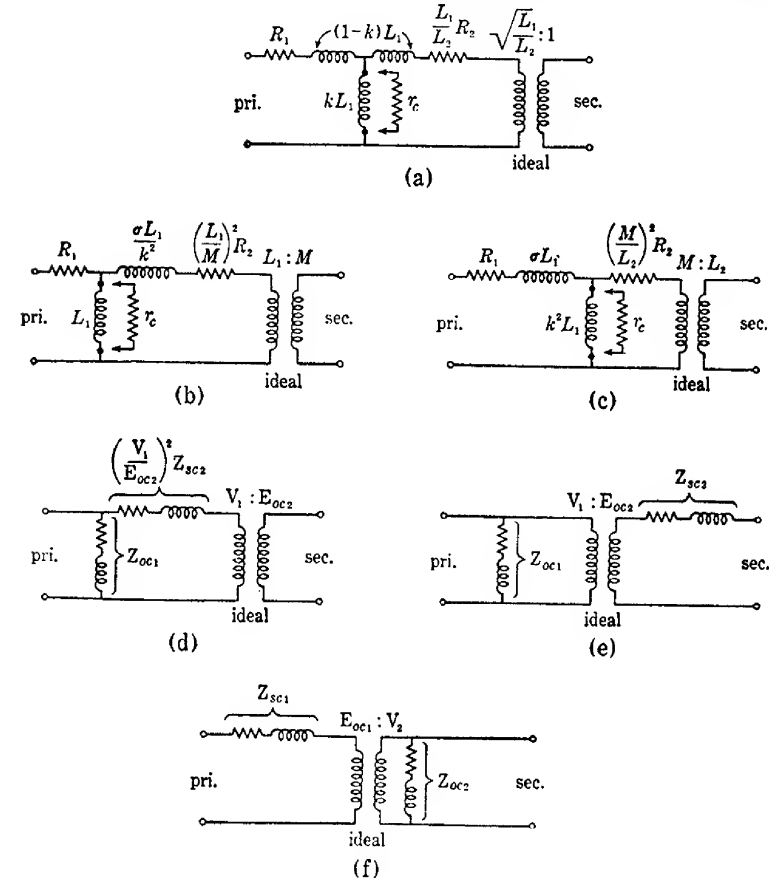


FIG. 8. Algunos de los circuitos equivalentes que pueden deducirse de la figura 7

que el cociente entre la autoimpedancia y la impedancia mutua es igual a la razón de las tensiones vectoriales en circuito abierto; así dividiendo las ecuaciones (61) y (62), se tiene,

$$\frac{Z_{11}}{jX_m} = \frac{V_1}{E_{oc2}} = A, \quad (123)$$

donde E_{oc2} es la tensión vectorial en circuito abierto inducida en el secundario cuando se aplica al primario una tensión representada por el vector V_1 . Cuando $A = Z_{11}/jX_m$ se sustituye en las ecuaciones (99), (100) y (101),

$$Z'_m = Z_{11} = Z_{oc1} \quad (124)$$

$$Z'_1 = 0 \quad (125)$$

$$Z'_2 = \left(\frac{Z_{11}}{jX_m} \right)^2 Z_{22} - Z_{11} \quad (126)$$

$$= \left(\frac{Z_{11}}{jX_m} \right)^2 \left[Z_{22} - \frac{(jX_m)^2}{Z_{11}} \right] \quad (127)$$

$$= \left(\frac{V_1}{E_{oc2}} \right)^2 \left(Z_{22} + \frac{X_m^2}{Z_{11}} \right) \quad (128)$$

Pero, en virtud de la ecuación (75),

$$Z_{22} + \frac{X_m^2}{Z_{11}} = Z_{sc2}, \quad (129)$$

donde Z_{sc2} es la impedancia en cortocircuito medida desde el lado del secundario. En consecuencia,

$$Z'_2 = \left(\frac{V_1}{E_{oc2}} \right)^2 Z_{sc2}. \quad (130)$$

Por tanto el circuito equivalente se podrá trazar como en la figura 8d. Si se «refiere» al lado del secundario del transformador ideal la impedancia en cortocircuito, el circuito equivalente se convierte en el de la figura 8e, que puede compararse con el de la figura 9a del capítulo XIII. En la figura 8e, el transformador se representa, como en el teorema de Thévenin, por su impedancia en cortocircuito Z_{sc2} en serie con su tensión del secundario en circuito abierto E_{oc2} , la razón de transformación se representa por un transformador ideal cuya razón es el cociente entre las tensiones vectoriales en circuito abierto V_1/E_{oc2} , y la corriente de excitación estará transportada por la impedancia en circuito abierto conectada entre los terminales del primario.

$$\text{Caso VII: } A = \frac{jX_m}{Z_{22}} = \frac{E_{oc1}}{V_1}.$$

Puede demostrarse fácilmente que el cociente complejo entre la impedancia mutua y la autoimpedancia del secundario es igual al cociente entre la tensión E_{oc1} (vector) en circuito abierto medida desde el lado del primario y la tensión V_2 (vector) aplicada al secundario, y que cuando A es igual a este cociente complejo el circuito equivalente se convierte en el de la figura 8f, que puede compararse con el de la figura 9b del capítulo XIII.

Los circuitos equivalentes de las figuras 8e y 8f son especialmente convenientes para representar un transformador en función de los valores medidos de sus constantes, puesto que los parámetros de estos circuitos equivalentes se pueden medir

con facilidad por los métodos descritos en el apartado 3. Corrientemente, el argumento del cociente complejo de las tensiones en circuito abierto es despreciable y por tanto puede determinarse un circuito casi equivalente al transformador midiendo la resistencia en cortocircuito y la reactancia de un lado, la resistencia en circuito abierto y la reactancia del otro y el *módulo* del cociente de tensiones en circuito abierto.

6. RESUMEN

Reviste gran interés contrastar los circuitos equivalentes en los que intervienen inductancias de fuga con el circuito equivalente general de la figura 7. Si el factor A de las ecuaciones (97) y (98) es la razón de números de espiras, las inductancias serie del circuito equivalente de la figura 7 se convierten en las inductancias de fuga, lo cual da un concepto físico de los fenómenos que intervienen. Por otra parte, si el factor A es otro número cualquiera, el análisis se reduce a un problema puramente matemático en el cual se realizan ciertas transformaciones que ayudan a obtener la solución buscada. Estas transformaciones matemáticas se eligen sin atender a su significado físico. Es suficiente que sean herramientas útiles. Ambos métodos de análisis se fundan en las mismas leyes físicas deducidas de los resultados observados de ciertos fenómenos.

El concepto físico se ha creado como ayuda para la comprensión de estos fenómenos y, aun cuando no pretende constituir una representación completa, ha demostrado ser de inestimable valor para reforzar la apreciación del significado de las leyes físicas sobre las que se asienta el análisis. Posiblemente, el más famoso de estos conceptos fue propuesto por FARADAY para ayudar a dar una imagen de los fenómenos de inducción electromagnética. Su concepto del campo magnético y su representación mediante líneas de fuerza han tenido gran influencia en el desarrollo de dispositivos eléctricos.

A pesar del gran valor que posee el concepto físico, la insistencia en que sea aplicado a la solución de ciertos problemas puede revelar ciertas desventajas. Ejemplo de ello lo tenemos en la teoría del transformador. Si se utiliza el concepto de inductancia de fuga, solamente se tendrá un circuito equivalente. Por otra parte, si se manejan las ecuaciones de los circuitos acoplados como si el problema fuera puramente matemático, el factor A de las ecuaciones (97) y (98) puede tomar un valor cualquiera y se obtiene un número infinito de circuitos equivalentes. En el análisis de ciertos problemas puede ocurrir que uno de esos circuitos equivalentes resulta preferible a cualquier otro. Es decir, puede ser mejor operar con las relaciones físicas iniciales sobre las que debe edificarse la solución, en un sentido estrictamente matemático sin intentar formar un concepto físico de las operaciones. Así, pues, podemos concluir que estos dos métodos de análisis se complementan y que sería absurdo no desarrollar la capacidad de aplicar uno u otro.

PROBLEMAS

1. Probar que en todo transformador la razón de la intensidad de la corriente del primario a la del secundario con el secundario cortocircuitado es igual a la razón de la tensión del secundario a la del primario con el primario en circuito abierto, si se desprecian los efectos de las características magnéticas no lineales del núcleo.

2. Cuando se aplica una tensión de 10 V a 600 Hz al primario de un transformador con núcleo de aire estando el secundario en circuito abierto, la corriente y potencia del primario son de 2 A y 16 W y la tensión del secundario es de 8 V. Cuando se aplica al secundario una tensión de 20 V a 600 Hz con el primario en circuito abierto, la corriente y potencia son de 1,0 A y 16 W.

- ¿Cuáles son los valores de las dos autoinducciones y de la inducción mutua?
- ¿Cuáles son los valores del coeficiente de acople k y del coeficiente de fuga σ ?
- Si entre los terminales del secundario se conecta una resistencia no inductiva de 14 ohm, ¿qué intensidad de corriente y qué potencia consumirá el primario cuando entre sus terminales se aplique una tensión de 30 V a 600 Hz?

3. Los datos siguientes se obtuvieron de un transformador con núcleo de aire, empleando un puente para corriente alterna accionado a 1 000 Hz:

Resistencia del devanado primario	=	3,0 ohm
Inductancia del primario con el secundario en circuito abierto	=	217 mH
Resistencia del devanado secundario	=	12,2 ohm
Inductancia del secundario con el primario en circuito abierto	=	867 mH
Inductancia de primario y secundario conectados en serie	=	1,84 H.

Además, se han medido a 1 000 Hz la razón de tensiones en circuito abierto y la impedancia en cortocircuito referida al primario, dando:

$$\frac{E_{oc2}}{V_1} = \frac{172 \text{ V}}{100 \text{ V}}$$

$$\frac{V_1}{I_{sc1}} = \frac{10 \text{ V}}{5,5 \text{ mA}}$$

Utilizando estos datos para calcular las constantes del transformador, se halla que al menos una de las medidas debe ser errónea. Si puede suponerse incorrecta sólo una de las medidas,

- ¿Cuál de ellas es errónea?
- ¿Cuáles son los valores correctos de L_1 , L_2 , M , k , y σ ?

4. Un transformador con núcleo de aire con igual número de espiras en primario

Fig. 9. Transformador con núcleo de aire, problema 4

que en secundario se ensaya en la forma indicada en la figura 9. Cuando se aplica al primario una tensión de 110 V a 1 000 Hz, A señala 1,00 A y V 10,0 V. Cuando se intercambian los devanados y se repite el ensayo, A señala 0,95 A y V 13,7 V. Las resistencias de primario y secundario se sabe que son 5,0 ohm y 5,2 ohm, respectivamente. La resistencia del amperímetro y la conductancia del voltímetro son despreciables.

- ¿Existe alguna incompatibilidad entre los datos?
- ¿Cuáles son los valores de L_1 , L_2 , M , k y σ ?

5. Se han realizado las siguientes medidas en un transformador de salida con núcleo de hierro para audiofrecuencia:

- Se han medido con un puente de corriente continua las resistencias de los devanados, resultando ser:

$$R_1 = 310 \text{ ohm} \quad R_2 = 2,22 \text{ ohm}$$

- Con un puente para corriente alterna accionado a 600 Hz, la resistencia en corto-circuito y la inductancia del primario han resultado ser:

$$R_{sc1} = 760 \text{ ohm} \quad L_{sc1} = 0,104 \text{ H}$$

- Con el secundario en circuito abierto y el primario conectado en la forma indicada en la figura 5 y alimentado por un generador de 600 Hz, se obtuvo el siguiente sistema de valores:

$$V_{12} = 49,7 \text{ V, c. a.}$$

$$V_{23} = 40,0 \text{ V, c. a.}$$

$$V_{13} = 65,3 \text{ V, c. a.}$$

$$R = 50\,000 \text{ ohm}$$

$$E_{oc2} = 3,98 \text{ V}$$

Hallar, a partir de estos datos:

- La resistencia aparente del primario
- Una estimación de la resistencia efectiva del primario
- Una estimación de la resistencia efectiva del secundario
- La autoinducción del primario
- La autoinducción del secundario
- La inducción mutua
- El coeficiente de fuga
- El coeficiente de acople.

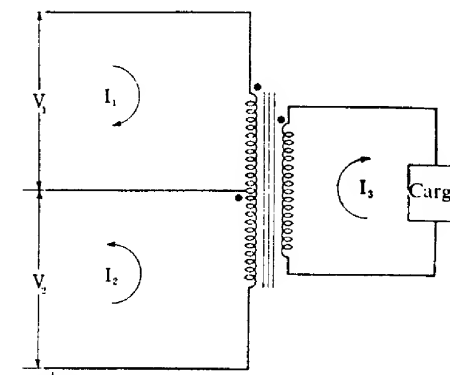


Fig. 10. Transformador con toma media, problema 7

- En un transformador ordinario de audiofrecuencia para comunicaciones la razón de la inductancia en cortocircuito ideal a la inductancia en circuito abierto es de 0,01 aproximadamente. Calcular los errores porcentuales en las relaciones aproximadas siguientes para cada una de las tres hipótesis que se especifican:

$$\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \approx \frac{N_1}{N_2}; \quad \frac{L_1}{M} \approx \frac{N_1}{N_2}; \quad \frac{M}{L_2} \approx \frac{N_1}{N_2}.$$

- Supóngase todo el flujo de fuga asociado al primario.
- Supóngase todo el flujo de fuga asociado al secundario.
- Supóngase que para ambos devanados los cocientes entre la fuga y la autoinducción son los mismos.

7. Un amplificador de potencia con dos válvulas de vacío trabajando en contrafase (push-pull) se acopla a su carga mediante un transformador con toma media en el primario, tal como se indica en la figura 10. En dicha disposición, las tensiones alternas aplicadas entre los terminales exteriores del primario y la toma media están en oposición de fase y son aproximadamente iguales. Tomando las polaridades del transformador y los sentidos de las corrientes en la forma indicada en la figura 10 y suponiendo que la carga puede representarse por una resistencia pura:

- Escribir las ecuaciones de los circuitos acoplados para esta red.
- Dibujar un circuito equivalente que no contenga transformadores.

8. Un amplificador de válvula de vacío que opera en un dominio restringido y con una entrada sinusoidal puede representarse a menudo por un generador equivalente de onda sinusoidal con una resistencia en serie. Un amplificador para el cual sean ciertas estas condiciones ha de suministrar potencia a una carga que puede representarse por

una resistencia pura de 8,0 ohm. El circuito equivalente del amplificador de válvula está constituido por un generador de onda sinusoidal de 100 V en serie con una resistencia de 800 ohm. Para acoplar el amplificador a la carga se ha de emplear un transformador de adaptación, de los cuales disponemos de dos. Los datos correspondientes se consiguen más adelante.

¿Cuál de estos transformadores hay que emplear para suministrar la potencia máxima a la carga a una frecuencia de 1 000 Hz? Despréciense la pérdida en el núcleo en ambos transformadores y supóngase que la fem y la resistencia interna equivalentes del amplificador de válvula de vacío son constantes.

DATOS DEL TRANSFORMADOR A 1000 HERTZ

	Transformador A	Transformador B
L_{oc2}	57 mH	62 mH
$\frac{E_{oc1}}{V_2}$	10	12
R_{sc1}	400 ohm	300 ohm
L_{sc1}	36 mH	45 mH

RESISTENCIAS A LA CORRIENTE CONTINUA

	Transformador A	Transformador B
R_1	182 ohm	140 ohm
R_2	1,90	1,01

9. Especificar, para el Transformador A del problema 8, los valores de los parámetros para circuitos equivalentes de los tipos indicados en las figuras 6b, 8a, 8b y 8d. Formúlense las hipótesis necesarias.

10. Para un transformador en el que se conecten los terminales de polaridad diferente, hallar:

- Un circuito equivalente que no contenga transformadores ideales.
- Un circuito equivalente que contenga un transformador ideal cuya razón de

tensiones sea $\frac{V_1}{E_{oc2}}$.

Características de frecuencia

Los transformadores de sistemas de potencia suelen funcionar a tensión y frecuencia sustancialmente constantes y las características eléctricas recomendables suelen ser gran rendimiento, poca regulación de tensión y corriente de excitación débil. Sin embargo, en muchas aplicaciones importantes de los transformadores la tensión y la frecuencia varían entre amplios límites. La más importante de estas aplicaciones es, probablemente, la transmisión de la palabra y de la música, en la cual los transformadores deben funcionar en toda la banda de frecuencias audibles. * En este capítulo se estudiarán algunas de las características importantes de los transformadores para servicios de frecuencia variable. Aun cuando hagamos hincapié en los circuitos de audiofrecuencia para comunicaciones, los transformadores para frecuencia variable tienen gran aplicación en los circuitos de medida y mando.

En un sistema de comunicación, el transformador suele ser un elemento que conecta un generador de fuerza electromotriz —por ejemplo, un micrófono— con una carga tal como un altavoz. La fuerza electromotriz del generador está creada por la palabra o la música que se trasmite y la función del circuito interconector es amplificar la potencia de salida del generador y aplicar a la carga una tensión cuya forma de onda se adapte todo lo posible a la de la fuerza electromotriz del generador. Aun cuando las formas de onda de las fuerzas electromotrices debidas a la palabra y a la música son extraordinariamente complicadas y son, en realidad, semitransitorias, del conocimiento de la respuesta del circuito a las tensiones sinusoidales aplicadas puede obtenerse mucha información. Toda función periódica mantenida del tiempo puede expresarse en serie de Fourier de componentes armónicas sinusoidales, cada una de las cuales tiene una frecuencia múltiplo de la frecuencia fundamental. ** FOURIER, descubridor de esta serie, también descubrió que toda función transitoria o no periódica del tiempo puede resolverse en un espectro continuo de componentes armónicas sinusoidales mantenidas. Esta extensión de la serie de Fourier se conoce como el método de análisis de la integral de Fourier¹. Por superposición combinada con los métodos de análisis de Fourier puede predecirse la respuesta de todo circuito lineal a tensiones permanentes o transitorias de forma cualquiera si se conoce vectorialmente su respuesta a la tensión de un generador de forma de onda sinusoidal en todo el dominio de frecuencias en cuestión. La curva que indica cómo varía con la frecuencia el valor de la razón de la tensión de la carga a la tensión del generador sinusoidal recibe el nombre de *característica de frecuencia* o *respuesta a la frecuencia* del circuito, y la curva que da el ángulo de defasaje entre dichas

* Los límites de audibilidad son, aproximadamente, 16 y 20 000 Hz, pero se obtiene una reproducción satisfactoria de la música si se suprimen de esta banda de frecuencias las octavas inferior y superior. Para una transmisión inteligible de la palabra es necesario transmitir solamente una banda de frecuencias comprendida entre 250 y 2 750 Hz. Véase D. G. FINK, *Engineering Electronics* (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1938), 272.

** Véase el apartado 9, capítulo VI.

¹ Véase REY PASTOR, PI CALLEJA y TREJO: *Análisis Matemático*, tomo III Kapelusz, Buenos Aires, 1961.

tensiones en función de la frecuencia se conoce con el nombre de *característica de fase* *. Estas características no sólo dependen de las constantes del transformador que puedan existir en el circuito sino también de las impedancias internas del generador y de la carga. Para tener una reproducción satisfactoria de la palabra y de la música, las formas de onda de la tensión de carga y de la tensión de generador han de ser lo más iguales posible, independientemente de la tensión y de la frecuencia. Es decir, la respuesta del circuito a las tensiones de generadores sinusoidales debe ser esencialmente lineal respecto a las variaciones de magnitud de la tensión del generador, la característica de frecuencia debe ser casi «plana» y el retraso de tiempo entre la tensión del generador y la tensión de la carga debe ser pequeño e independiente de la frecuencia.

Entre las aplicaciones más importantes de los transformadores a los circuitos de comunicaciones se hallan sus usos para cambiar la tensión de un generador, para cambiar la impedancia aparente de una carga, para aislar la corriente continua entre un circuito y otro, para permitir puestas a tierra independientes de los circuitos primario y secundario y para invertir la fase de una tensión. Por ejemplo, a la entrada de un amplificador suele conectarse un generador de tensión de señal por medio de un *transformador de entrada* cuya misión es elevar la tensión de señal antes de aplicarla a la reja de la primera válvula del amplificador. El transformador de entrada puede servir también para proporcionar un camino a la corriente continua que pueda haber en el generador —por ejemplo, si éste es un micrófono de carbón. En los amplificadores multietapa constituidos por varias válvulas de vacío en cascada, se utilizan a veces *transformadores interetapa* para acoplar la salida de una válvula a la reja de la etapa de amplificación siguiente. Empleando una razón de transformación elevadora, el transformador interetapa puede emplearse para aumentar la amplificación de tensión. Ejemplo de transformación de impedancia lo constituye el *transformador de salida*, utilizado frecuentemente para acoplar una carga, tal como un altavoz, a la salida de la última válvula del amplificador. El fin del transformador de salida es cambiar la impedancia aparente de la carga vista desde el lado del primario del transformador hasta un valor que permita a la válvula entregar la máxima potencia a la carga, con una distorsión tolerable. El transformador de salida evita también que la corriente continua de la salida de la válvula circule por la carga. En todas estas aplicaciones, las características de frecuencia y fase son muy importantes si el circuito debe funcionar en una banda amplia de frecuencias.

1. RELACIONES DE POTENCIA

Los transformadores se emplean a menudo en circuitos de mando, medida y comunicaciones, por su propiedad de cambiar la impedancia aparente de una carga. Si a los terminales del secundario de un transformador se conecta una carga cuya impedancia es Z_L , la impedancia aparente de esta carga vista desde el lado del primario del transformador es $a^2 Z_L$, donde a es la razón de transformación y el trans-

* Estas dos curvas dan la amplitud y fase de la razón vectorial de la tensión de carga a la tensión del generador en función de la frecuencia. Mejor sería llamar a la característica amplitud-frecuencia *característica de amplitud*, pero la terminología común llama impropriamente a la característica amplitud-frecuencia por el nombre de la variable independiente —la frecuencia— si bien a la característica fase-frecuencia se la designa con el nombre de su variable función: fase.

formador se supone ideal. Un transformador real tiene aproximadamente las características de un transformador ideal en tanto que la impedancia de carga sea grande frente a la impedancia serie equivalente del transformador y en tanto que la impedancia de excitación paralelo del transformador sea grande frente a la impedancia de carga (estando referidas todas esas impedancias a un mismo lado del transformador).

La aplicación probablemente más común de los transformadores al cambiar impedancias es su utilización para aumentar la potencia entregada a una carga por un generador de impedancia interna y fuerza electromotriz fijas. Cuando puedan ajustarse independientemente la resistencia y la reactancia de la carga, la potencia suministrada a la carga será máxima cuando su impedancia compleja sea conjugada de la impedancia compleja del generador. Si la carga es puramente resistiva, la condición de potencia máxima se tiene cuando la resistencia de carga es igual al módulo de la impedancia del generador. En los circuitos de comunicaciones se presenta frecuentemente el caso sencillo en que las impedancias del generador y de la carga sean ambas resistencias puras, en tal caso, la carga recibirá la máxima potencia cuando su resistencia y la del generador sean iguales. Se dice entonces que las resistencias de la carga y el generador están *adaptadas*. Así, interponiendo un transformador adecuado entre una carga resistiva y un generador resistivo, de resistencias fijas una y otro, se puede cambiar la resistencia aparente de la carga de manera que dé un gran incremento a la potencia suministrada a la carga.

Aun cuando la potencia suministrada a una resistencia de carga es máxima cuando su resistencia aparente es igual a la impedancia interna del generador, la potencia suministrada a la carga no será muy inferior al valor máximo posible cuando la resistencia de carga aparente difiera, incluso apreciablemente, de la impedancia del generador. Así, si es E_G el valor eficaz de la fuerza electromotriz del generador y R_G su impedancia interna (supuesta puramente resistiva), se entregará la potencia máxima $P_{L \max}$ a una carga resistiva cuando la resistencia aparente de la carga sea igual a R_G . Para estas condiciones, la intensidad I de la corriente que circula por el circuito serie es:

$$I = \frac{E_G}{2R_G}, \quad (1)$$

y la potencia máxima entregada a la carga es:

$$P_{L \max} = I^2 \times (\text{resistencia aparente de carga}) = I^2 R_G \quad (2)$$

$$= \left(\frac{E_G}{2R_G} \right)^2 R_G = \frac{E_G^2}{4R_G}. \quad (3)$$

Para cualquier otro valor R'_L de la resistencia aparente de la carga, la intensidad I' de la corriente es:

$$I' = \frac{E_G}{R_G + R'_L}, \quad (4)$$

y la potencia P_L entregada a la carga es:

$$P_L = (I')^2 R'_L = \left(\frac{E_G}{R_G + R'_L} \right)^2 R'_L. \quad (5)$$

La razón de la potencia de carga P_L a la potencia de carga máxima posible $P_{L\text{ máx}}$ es:

$$\frac{P_L}{P_{L\text{ máx}}} = \frac{\left(\frac{E_G}{R_G + R'_L}\right)^2 R'_L}{\frac{E_G^2}{4R_G}} \quad (6)$$

$$= \frac{4R_G R'_L}{(R_G + R'_L)^2} \quad (7)$$

$$= \frac{4}{\frac{R_G}{R'_L} + 2 + \frac{R'_L}{R_G}} \quad (8)$$

En la figura 1 puede verse la curva de la razón de potencias $P_L/P_{L\text{ máx}}$ en función de la razón de resistencias R'_L/R_G representada a escala logarítmica. De la ecuación (8) resulta que si R'_L/R_G es igual a 3 (ó $1/3$), la razón $P_L/P_{L\text{ máx}}$ es igual a $3/4$.

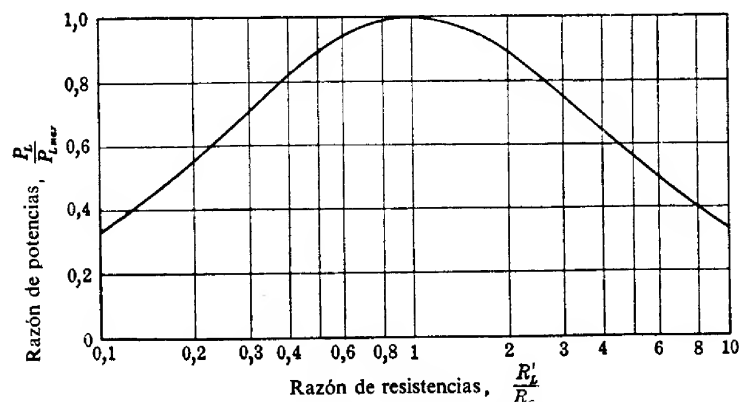


FIG. 1. Curva de razón de potencias $P_L/P_{L\text{ máx}}$ en función de la razón de resistencias R'_L/R_G .

Es decir, si la resistencia aparente de la carga R'_L difiere de la resistencia del generador R_G en la razón de 3:1, la potencia suministrada a la carga tiene todavía un valor igual a los $3/4$ del valor máximo posible. Así, pues, las condiciones del circuito para una transmisión de potencia satisfactoria no dependen críticamente de una igualdad exacta entre las resistencias de generador y carga, y el empleo de un transformador de adaptación proporcionará un incremento pequeño de la potencia entregada a la carga si las resistencias de carga y del generador se hallan en una razón inferior a la de 3:1.

En realidad, muchas aplicaciones exigen que la resistencia aparente de la carga no sea igual a la resistencia del generador. Uno de los empleos más importantes de los transformadores cambiadores de impedancia para aumentar la potencia sumi-

nistrada a una carga es el del transformador de salida utilizado para acoplar la salida de la válvula final de un amplificador a la carga, que puede ser un altavoz de impedancia baja. En estas aplicaciones, las características de la válvula pueden introducir distorsión a menos que se ajuste adecuadamente la impedancia de carga a la válvula. Así, cuando una válvula funciona linealmente (clase A), la variación de su intensidad de placa originada por la tensión variable de señal aplicada a su rejilla debe restringirse a un intervalo limitado, y por tanto la impedancia aparente de la carga debe ser tal que la válvula no se vea obligada a funcionar fuera de los límites de la intensidad de placa.² Es decir, la impedancia aparente de la carga ha de ser tal que, para una distorsión determinada, se entregue a la carga la potencia máxima. Para un triodo que funcione como amplificador lineal, esta impedancia de carga suele ser más del doble de la resistencia dinámica de placa de la válvula; para un pentodo, la impedancia de placa apropiada es solamente una fracción de la resistencia dinámica de placa. En otras aplicaciones, como en los amplificadores que trabajan en contrafase (push-pull),³ la potencia máxima de salida puede estar limitada por la potencia que pueden disipar las válvulas sin peligro; en diversos casos de válvulas, pues, el valor adecuado de la impedancia de carga aparente puede resistir casi cualquier relación con las resistencias dinámicas de placa de las válvulas.

2. CARACTERÍSTICAS DE FRECUENCIA Y FASE DE LOS TRANSFORMADORES DE SALIDA

Para conectar la bobina de baja impedancia del altavoz con el circuito de salida de la válvula amplificadora de potencia de un radioreceptor se emplean, frecuentemente, transformadores de salida cuya razón de los números de espiras es de 10 ó 20 a 1. La impedancia de la bobina móvil de un altavoz dinámico es del orden de magnitud de 10 ohm, mientras que la resistencia de carga adecuada para una válvula amplificadora de potencia suele ser de varios miles de ohm. Si la razón a del número de espiras del primario al de espiras del secundario es 20, la impedancia aparente de una carga de 10 ohm es 4 000 ohm observada desde los terminales del primario y por ello el empleo de un transformador de salida que tenga una razón de números de espiras adecuada permite ajustar adecuadamente la carga a la válvula.

En contraste con los transformadores de entrada e interetapa, estudiados en el apartado 3, los transformadores de salida deben entregar potencias considerables (hasta de 20 W en los radiorreceptores ordinarios). Las corrientes de carga, pues, serán bastante intensas, en los transformadores de salida, frente a las corrientes parásitas de audiofrecuencia debidas a las capacidades distribuidas; éstas tendrán, pues, efectos despreciables sobre las características de frecuencia y fase y suelen despreciarse en el análisis de los transformadores de salida.

En la figura 2 pueden verse los elementos esenciales de un circuito tipo que con-

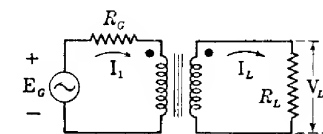


FIG. 2. Circuito que contiene un transformador de salida.

² Los amplificadores clase A se estudian en la obra de L. ALBERT *Electrónica y dispositivos electrónicos*; Ed. Reverté, Barcelona, 1961.

³ Los amplificadores contrafase se estudian en la obra citada.

tiene un transformador de salida. El generador tiene una fuerza electromotriz E_G y una resistencia interna R_G y puede representar a la salida alterna de una válvula de vacío. La carga es una resistencia R_L . La impedancia de entrada de un altavoz ni es puramente resistiva ni constante, sino que varía apreciablemente con la frecuencia y también, hasta cierto punto, con las características acústicas del recinto en que se halle el altavoz. No obstante, como resultaría muy difícil tener en cuenta las variaciones de impedancia de carga, las características de frecuencia y fase se especifican basadas en cargas resistivas constantes. Aun cuando las características para carga resistiva constante puedan diferir algo de las características reales cuando la carga sea un altavoz, el análisis que se realizará a continuación, en el cual se supone constante R_L , da resultados que se aproximan bastante a las características de un transformador de salida en servicio real.

En el análisis teórico del circuito de la figura 2, el transformador puede tratarse de dos maneras diferentes. Puede desarrollarse la teoría a partir de las ecuaciones clásicas de los circuitos acoplados, o puede representarse el transformador por su circuito equivalente. Las ecuaciones de los circuitos acoplados dan fácilmente una solución rigurosa pero complicada. En cambio, el circuito equivalente se presta fácilmente a simplificaciones que conducen a una solución aproximada sencilla suficientemente precisa desde el punto de vista técnico. Aun cuando podría alcanzarse la misma solución aproximada despreciando ciertos términos pequeños en las expresiones matemáticas resultantes de la teoría de los circuitos acoplados, el circuito equivalente da, probablemente, un concepto más claro de los significados físicos de estas aproximaciones. Como cada método tiene sus ventajas, vamos a presentar ambos.

La experiencia indica que los efectos de la pérdida en el núcleo sobre las características de frecuencia y fase son despreciables en todo el dominio normal de funcionamiento de los transformadores de salida. Cuando se desprecia la pérdida en el núcleo y las capacidades distribuidas, las ecuaciones de las tensiones (vector) para el circuito de la figura 2 son, según la teoría de los circuitos acoplados,

$$E_G = (R_{11} + jX_{11})I_1 - jX_m I_L \quad (9)$$

$$0 = -jX_m I_1 + (R_{22} + jX_{22})I_L, \quad (10)$$

donde,

E_G es el vector que representa a la fuerza electromotriz sinusoidal del generador,

I_1 e I_L son los vectores de las corrientes de primario y secundario,

X_{11} y X_{22} son las autorreactancias incrementales de primario y secundario,

X_m es la reactancia mutua incremental,

R_{11} es la resistencia serie del circuito primario y es igual a la suma de la resistencia del generador R_G y la resistencia del primario R_1 ,

R_{22} es la resistencia serie del circuito secundario y es igual a la suma de la resistencia R_2 del secundario y la resistencia de carga R_L .

Resolviendo este sistema de ecuaciones puede obtenerse una expresión de la corriente de carga I_L . Esta solución es la dada por la ecuación (50) del capítulo XVII y puede expresarse en la forma,

$$I_L = \frac{X_m E_G}{R_{11}X_{22} + R_{22}X_{11} + j(\sigma X_{11}X_{22} - R_{11}R_{22})} \quad (11)$$

donde σ es el coeficiente de fuga, definido en la ecuación (33) del capítulo XVII. Dividiendo por X_{22} numerador y denominador de la ecuación (11), se tiene:

$$I_L = \frac{\frac{X_m}{X_{22}} E_G}{R_{11} + \frac{X_{11}}{X_{22}} R_{22} + j \left(\sigma X_{11} - \frac{R_{11}R_{22}}{X_{22}} \right)} \quad (12)$$

$$= \frac{\frac{M}{L_2} E_G}{R_{11} + \frac{L_1}{L_2} R_{22} + j \left(\omega \sigma L_1 - \frac{R_{11}R_{22}}{\omega L_2} \right)}, \quad (13)$$

donde L_1 , L_2 y M son los coeficientes de autoinducción incremental y de inducción mutua incremental del transformador. El término $R_{11}R_{22}/\omega L_2$ del denominador de la ecuación (13) puede expresarse en la forma,

$$\frac{R_{11}R_{22}}{\omega L_2} = \frac{R_{11} \frac{L_1}{L_2} R_{22}}{\omega L_1}, \quad (14)$$

y por tanto, de la ecuación (13),

$$I_L = \frac{\frac{M}{L_2} E_G}{R_{11} + \frac{L_1}{L_2} R_{22} + j \left(\omega \sigma L_1 - \frac{R_{11} \frac{L_1}{L_2} R_{22}}{\omega L_1} \right)}. \quad (15)$$

Multiplicando la ecuación (15) por L_2/M se tiene,

$$\frac{L_2}{M} I_L = \frac{E_G}{R_{11} + \frac{L_1}{L_2} R_{22} + j \left(\omega \sigma L_1 - \frac{R_{11} \frac{L_1}{L_2} R_{22}}{\omega L_1} \right)}. \quad (16)$$

La tensión en la carga V_L es:

$$V_L = I_L R_L = \frac{\frac{M}{L_2} E_G R_L}{R_{11} + \frac{L_1}{L_2} R_{22} + j \left(\omega \sigma L_1 - \frac{R_{11} \frac{L_1}{L_2} R_{22}}{\omega L_1} \right)}. \quad (17)$$

Multiplicando la ecuación (17) por L_1/M se tiene,

$$\frac{L_1}{M} V_L = \frac{E_G - \frac{L_1}{L_2} R_L}{R_{11} + \frac{L_1}{L_2} R_{22} + j \left(\omega \sigma L_1 - \frac{R_{11} \frac{L_1}{L_2} R_{22}}{\omega L_1} \right)} \quad (18)$$

Del estudio de las ecuaciones anteriores surgen varios hechos interesantes. El factor L_2/M del primer miembro de la ecuación 16 es muy aproximadamente igual a la razón N_2/N_1 del número de espiras del secundario al de espiras del primario, y por tanto, el primer miembro de la ecuación (16) será aproximadamente igual a la corriente de carga referida al primario. Análogamente, L_1/M es aproximadamente igual a N_1/N_2 , y por tanto, el primer miembro de la ecuación (18) es muy aproximadamente igual a la tensión en la carga referida al primario. También el factor L_1/L_2 que aparece con la resistencia de carga R_L y con la resistencia del circuito secundario R_{22} es muy aproximadamente igual a $(N_1/N_2)^2$, y por tanto $(L_1/L_2)R_L$ y $(L_1/L_2)R_{22}$ son muy aproximadamente iguales a las resistencias de carga y de secundario referidas al primario. Para simplificar la notación, hagamos

$$\frac{L_1}{L_2} R_L \equiv R'_L \approx \text{resistencia de carga referida al primario} \quad (19)$$

$$\frac{L_1}{L_2} R_{22} \equiv R'_{22} \approx \text{resistencia del secundario referida al primario} \quad (20)$$

Obsérvese también que la inductancia σL_1 es muy aproximadamente igual a la inductancia en cortocircuito L_{sc1} medida desde el lado del primario del transformador, y que la autoinducción incremental L_1 es igual a la autoinducción en circuito abierto L_{oc1} medida con la corriente continua adecuada circulando por el primario.

Es interesante el hecho de que la ecuación (16) tiene la misma forma que la expresión de la intensidad de la corriente que circula por un circuito serie RLS cuya resistencia sea $R_{11} + R'_{22}$, cuya autoinducción sea σL_1 y cuya elastancia sea $R_{11}R'_{22}/L_1$. La ecuación (18) es la expresión de la tensión entre los extremos de la porción R'_L de la resistencia de este circuito. El circuito de la figura 3 tiene unas características de frecuencia y fase exactamente iguales a las del circuito de salida del transformador de la figura 2.

En virtud de la ecuación (18), y utilizando la notación simplificada de las ecuaciones

(19) y (20), la razón de la tensión en la carga a la fuerza electromotriz del generador es:

$$\frac{V_L}{E_G} = \frac{M}{L_1} \left[\frac{R'_L}{R_{11} + R'_{22} + j \left(\omega \sigma L_1 - \frac{R_{11}R'_{22}}{\omega L_1} \right)} \right] \quad (21)$$

$$= \frac{M}{L_1} \frac{R'_L}{R_{11} + R'_{22}} \left[\frac{1}{1 + j \left(\frac{\omega \sigma L_1}{R_{11} + R'_{22}} - \frac{1}{\omega L_1} \frac{R_{11}R'_{22}}{R_{11} + R'_{22}} \right)} \right] \quad (22)$$

En la ecuación (22), $R_{11} + R'_{22}$ es la resistencia serie total del generador, devanados del transformador y carga «referida» al primario, mientras que $R_{11}R'_{22}/(R_{11} + R'_{22})$ es la resistencia de la combinación paralelo de las resistencias de los circuitos primario y secundario «referidas» al primario. A fin de simplificar aún más la notación, sea,

$$R_{11} + R'_{22} \equiv R'_{se} \quad (23)$$

$$\frac{R_{11}R'_{22}}{R_{11} + R'_{22}} \equiv R'_{par} \quad (24)$$

Introduciendo en la ecuación (22) esta notación simplificada y expresando el segundo miembro en forma polar, se tiene,

$$\frac{V_L}{E_G} = \frac{M}{L_1} \frac{R'_L}{R'_{se}} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega \sigma L_1}{R'_{se}} - \frac{R'_{par}}{\omega L_1} \right)^2}} \angle \arctan \left(\frac{R'_{par}}{\omega L_1} - \frac{\omega \sigma L_1}{R'_{se}} \right) \quad (25)$$

Las características de frecuencia y fase son el módulo y argumento de esta expresión dados en función de la frecuencia.

La frecuencia $\omega_0/2\pi$ para la cual,

$$\frac{\omega_0 \sigma L_1}{R'_{se}} = \frac{R'_{par}}{\omega_0 L_1} \quad (26)$$

es análoga a la frecuencia de resonancia del circuito serie RLS de la figura 3. A esta frecuencia, la razón de tensiones tiene su valor máximo y el desfase es nulo. De la ecuación (26), esta frecuencia f_0 resulta ser,

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{R'_{par}R'_{se}}{L_1 \sigma L_1}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{R_{11}R'_{22}}{L_1 \sigma L_1}} \quad (27)$$

y como σL_1 es muy aproximadamente igual a la inductancia en cortocircuito L_{sc1} medida desde el lado del primario,

$$f_0 \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{R_{11}R'_{22}}{L_{oc1}L_{sc1}}} \quad (28)$$

A esta frecuencia, la razón de tensiones es:

$$\left(\frac{V_L}{E_G}\right)_{\max} = \frac{M}{L_1} \frac{R'_L}{R'_{se}} \quad \blacktriangleright (29)$$

A otra frecuencia cualquiera, la magnitud relativa de la razón de tensiones expresada como fracción de su valor a la frecuencia f_0 es:

$$\text{Razón de tensiones relativa} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega \sigma L_1}{R'_{se}} - \frac{R'_{par}}{\omega L_1}\right)^2}}, \quad \blacktriangleright (30)$$

y el ángulo de fase es:

$$\text{Angulo de fase} = \arctg \left(\frac{R'_{par}}{\omega L_1} - \frac{\omega \sigma L_1}{R'_{se}} \right). \quad \blacktriangleright (31)$$

En la figura 4 pueden verse características tipo de frecuencia y fase representadas en una escala logarítmica de frecuencias, la cual es conveniente para mostrar un amplio dominio de frecuencias y que corresponde a la naturaleza logarítmica de la

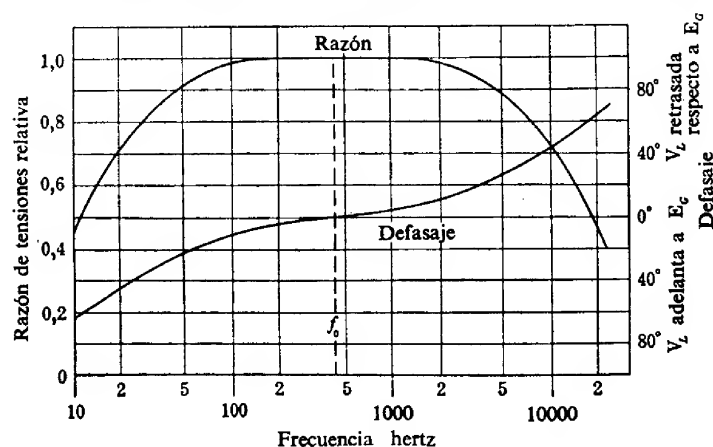


FIG. 4. Características de frecuencia y fase de un circuito que contiene un transformador de salida.

escala musical.⁴ A la frecuencia «de resonancia» f_0 , definida por la ecuación (27), la razón de tensiones relativa es igual a la unidad, la razón de tensiones real está dada en la ecuación (29), y el defasaje entre V_L y E_G es nulo. Si disminuye la frecuencia, la razón $R'_{par}/\omega L_1$ crece y se hace cada vez mayor que la razón $\omega \sigma L_1/R'_{se}$, como en el circuito *RLS* de la figura 3, en el cual la reactancia capa-

La escala de tensiones también se expresa logarítmicamente —es decir, en *decibel*. En la obra de L. ALBERT, *Electrónica y dispositivos electrónicos*, Ed. Reverté, Barcelona, 1961, puede verse la manera de emplear escalas logarítmicas para trazar las características del amplificador.

citiva predomina sobre la inductiva a frecuencias inferiores a la de resonancia. Por tanto, en virtud de las ecuaciones (30) y (31), al disminuir la frecuencia disminuye la razón de tensiones relativa y la tensión en la carga adelanta su fase respecto a la fuerza electromotriz del generador. Por otra parte, si crece la frecuencia por encima de f_0 , crece la razón $\omega \sigma L_1/R'_{se}$ y se hace cada vez más elevada que la razón $R'_{par}/\omega L_1$, como en el circuito serie *RLS* de la figura 3 a frecuencias superiores a la de resonancia, cuando predomina la reactancia inductiva. Por tanto, la razón de tensiones relativa también disminuye a frecuencias elevadas, si bien la tensión en la carga se retrasa respecto a la fuerza electromotriz del generador. No obstante, si las razones $R'_{par}/\omega_0 L_1$ y $\omega_0 \sigma L_1/R'_{se}$ son suficientemente pequeñas, la frecuencia

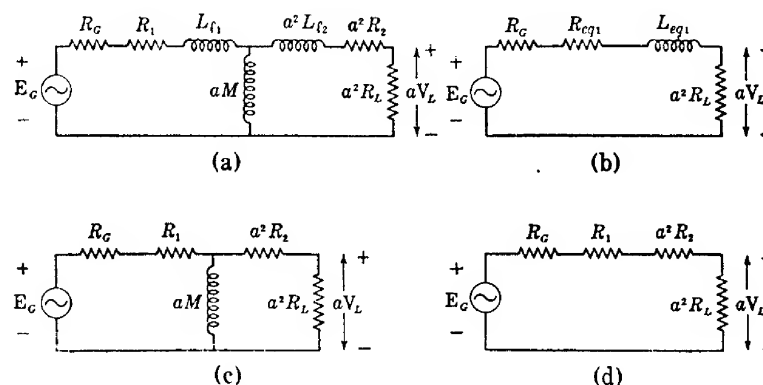


FIG. 5. Circuitos equivalentes para un transformador de salida. El circuito (a) es aplicable a todo el dominio de las audiofrecuencias. El (b) es un circuito equivalente aproximado para frecuencias elevadas. El (c) es un circuito equivalente aproximado para frecuencias bajas. El (d) es un circuito equivalente aproximado para la región central del dominio de las audiofrecuencias.

deberá variar estas octavas por encima o por debajo de la frecuencia «de resonancia» antes que se haga apreciable uno u otro de dichos términos, y por tanto la razón de tensiones se mantiene casi constante para un amplio dominio de frecuencias, según puede verse en la figura 4. El circuito *RLS* análogo de la figura 3 tiene una razón de la reactancia a frecuencia de resonancia a la resistencia, de pequeño valor. En una escala logarítmica de frecuencias, la característica de frecuencia es simétrica respecto a f_0 .

Antes de estudiar las aproximaciones simplificadoras que pueden realizarse en este análisis teórico «exacto», convendrá desarrollar una teoría aproximada partiendo del circuito equivalente del transformador. El equivalente del circuito de la figura 2 cuando se desprecian las capacidades y la pérdida en el núcleo es el indicado en la figura 5a, en el cual se ha sustituido el transformador por su circuito equivalente que comprende las resistencias de sus devanados R_1 y $a^2 R_2$, sus inductancias de fuga L_{l1} y $a^2 L_{l2}$, y su inductancia magnetizante aM , todas referidas al primario. La resistencia de carga referida al primario es $a^2 R_L$, y la tensión en la carga referida al primario es aV_L , siendo a la razón del número de espiras del primario al de espiras del secundario.

Como la inductancia de fuga de un transformador normal con núcleo de hierro es una fracción muy pequeña de la inductancia magnetizante, estas inductancias no tendrán importancia simultáneamente. Así, cuando la frecuencia es suficientemente elevada para hacer importantes las caídas de tensión en las inductancias de fuga, la reactancia magnetizante será tan grande que su efecto por estar en paralelo será despreciable y por tanto, a las audiofrecuencias elevadas podrá simplificarse el circuito equivalente suprimiendo la rama magnetizante, tal como se indica en la figura 5b donde R_{eq1} y L_{eq1} son la resistencia e inductancia equivalentes referidas al primario. Por otra parte, a frecuencias bajas la reactancia magnetizante $\omega a M$ es relativamente pequeña y su efecto por estar en paralelo se hace importante, pero las caídas de tensión en serie en las inductancias de fuga son entonces despreciables. Así, a frecuencias bajas, el circuito equivalente puede simplificarse en la forma indicada en la figura 5c. En el caso de un transformador de salida normal suele existir un intervalo de frecuencias centrales de varias octavas en el cual la reactancia magnetizante es tan elevada que su efecto por estar en paralelo es despreciable pero, al mismo tiempo, las reactancias de fuga son tan bajas que no ocasionan caídas de tensión apreciables. Para este dominio de frecuencias centrales, el circuito equivalente puede aproximarse en la forma indicada en la figura 5d.

De la figura 5d resulta que, a frecuencias centrales,

$$aV_L = \frac{E_G a^2 R_L}{R_{11} + a^2 R_{22}}, \quad (32)$$

donde,

$a^2 R_L$ es la resistencia de carga referida al primario,

R_{11} es la resistencia total del circuito primario,

$a^2 R_{22}$ es la resistencia total del circuito secundario referida al primario.

En el caso de un transformador con núcleo de hierro, la discrepancia entre los valores de a^2 y de la razón de inductancias L_1/L_2 suele ser tan pequeña que llega a ser indetectable, y por tanto las resistencias $a^2 R_L$ y $a^2 R_{22}$ son muy aproximadamente iguales a las resistencias R'_L y R'_{22} de las ecuaciones (19) y (20), y el denominador de la ecuación (32) es muy aproximadamente igual a la resistencia serie R'_{se} de la ecuación (23). Así pues, de la ecuación (32), resulta:

$$\frac{V_L}{E_G} \text{ a frecuencias centrales} = \frac{1}{a} \frac{R'_L}{R'_{se}}. \quad (33)$$

Como la discrepancia entre los valores de la razón de transformación a y del cociente de inductancias L_1/M es insignificante, la ecuación (33) es casi exactamente igual a la (29).

Del circuito equivalente de la figura 5b resulta que, a frecuencias elevadas,

$$aV_L = \frac{E_G a^2 R_L}{R_G + R_{eq1} + a^2 R_L + j\omega L_{eq1}} \quad (34)$$

$$= \frac{E_G R'_L}{R'_{se}} \frac{1}{1 + j \frac{\omega L_{eq1}}{R'_{se}}}. \quad (35)$$

Así pues, de la ecuación (35) resulta expresando en forma polar el resultado,

$$\frac{V_L}{E_G} \text{ a frecuencias elevadas} = \frac{1}{a} \frac{R'_L}{R'_{se}} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L_{eq1}}{R'_{se}}\right)^2}} \angle \text{arc tg} \left(-\frac{\omega L_{eq1}}{R'_{se}} \right). \quad (36)$$

Obsérvese que R'_L/aR'_{se} es la razón de tensiones a frecuencias centrales y que la inductancia equivalente L_{eq1} es casi igual a la inductancia en cortocircuito L_{sc1} medida desde el lado del primario. De la ecuación (36) resulta que la magnitud de la razón de tensiones relativa a frecuencias elevadas es:

$$\text{Razón de tensiones relativa a frecuencias elevadas} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L_{sc1}}{R'_{se}}\right)^2}}, \quad (37)$$

y el defasaje a frecuencias elevadas es:

$$\text{Defasaje a frecuencias elevadas} = \text{arc tg} \left(-\frac{\omega L_{sc1}}{R'_{se}} \right). \quad (38)$$

El signo menos de la ecuación (38) indica que la tensión en la carga V_L está retrasada respecto a la fuerza electromotriz del generador E_G a frecuencias elevadas.

El análisis del circuito equivalente aproximado de la figura 5c indica que a frecuencias bajas,

$$\frac{V_L}{E_G} \text{ a frecuencias bajas} = \frac{1}{a} \frac{R'_L}{R'_{se}} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R'_{par}}{\omega a M}\right)^2}} \angle \text{arc tg} \left(\frac{R'_{par}}{\omega a M} \right), \quad (39)$$

donde R'_{par} es la resistencia formada por R_{11} y $a^2 R_{22}$ en paralelo y es muy aproximadamente igual a la resistencia R'_{par} de la ecuación (24). Como la inductancia magnetizante aM es muy aproximadamente igual a la inductancia en circuito abierto L_{oc1} del primario, la razón de tensiones relativa a frecuencias bajas es:

$$\text{Razón de tensiones relativa a frecuencias bajas} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R'_{par}}{\omega L_{oc1}}\right)^2}}, \quad (40)$$

y el defasaje a frecuencias bajas es:

$$\text{Defasaje a frecuencias bajas} = \text{arc tg} \left(\frac{R'_{par}}{\omega L_{oc1}} \right). \quad (41)$$

El análisis aproximado anterior supone a la inductancia de fuga tan pequeña frente a la inductancia magnetizante, que dichas inductancias no tengan nunca simultáneamente importancia y por tanto que se pueda simplificar el circuito equivalente considerando cada vez un dominio diferente de frecuencias. Es interesante comparar los resultados de este análisis con los resultados (30) y (31), deducidas del análisis «exacto». En las ecuaciones (30) y (31), si la autoinducción L_1 es suficientemente elevada frente a R'_{par} , la frecuencia debe ser relativamente baja cuando llegue a hacerse importante la razón $R'_{par}/\omega L_1$. Pero si el coeficiente de fuga es pequeño, la razón $\omega \sigma L_1/R'_s$ será también muy pequeña a frecuencias bajas. Así, pues, con un coeficiente de fuga pequeño, las ecuaciones (30) y (31) se reducen a frecuencias elevadas a

$$\text{Razón de tensiones relativa a frecuencias elevadas} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega \sigma L_1}{R'_{se}}\right)^2}} \quad (42)$$

$$\text{Defasaje a frecuencias elevadas} \approx \arctan \left(-\frac{\omega \sigma L_1}{R'_{se}} \right), \quad (43)$$

y a frecuencias bajas

$$\text{Razón de tensiones relativa a frecuencias bajas} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R'_{par}}{\omega L_1}\right)^2}} \quad (44)$$

$$\text{Defasaje a frecuencias bajas} \approx \arctan \left(\frac{R'_{par}}{\omega L_1} \right). \quad (45)$$

Como las resistencias de las ecuaciones (30) y (31) difieren de las resistencias correspondientes de las ecuaciones (37-41) solamente en la diferencia insignificante existente entre L_1/L_2 y a^2 y como la inductancia en cortocircuito ideal σL_1 es muy aproximadamente igual a la impedancia en cortocircuito real L_{sc1} , los resultados aproximados de las ecuaciones (42-45), obtenidos simplificando las expresiones «exactas» de las ecuaciones (30) y (31), son prácticamente iguales a los resultados obtenidos a partir de los circuitos equivalentes aproximados.

Según las ecuaciones (40) y (41), a bajas frecuencias la razón de tensiones relativa y el defasaje están determinados principalmente por el valor de la razón $R'_{par}/\omega L_{oc1}$. La parte de la izquierda de la figura 6 muestra gráficamente las relaciones existentes entre estas características y la razón $\omega L_{oc1}/R'_{par}$. A las frecuencias centrales, la razón de tensiones es aproximadamente constante y el defasaje es pequeño. A frecuencias elevadas, la razón de tensiones relativa y el defasaje dependen principalmente del valor de la razón $\omega L_{sc1}/R'_{se}$, según indican las ecuaciones (37) y (38) y se ve gráficamente en la parte derecha de la figura 6.

Las curvas de la figura 6 son aplicables a cualquier transformador de salida, puesto que las variables que intervienen están expresadas en forma de razones. Con ayuda de estas curvas es fácil calcular las características de frecuencia y fase

de un transformador de salida si se conocen: las resistencias de carga, del generador y de los devanados; las inductancias en cortocircuito y en circuito abierto; y la razón de transformación. Por ejemplo, supongamos que se quieren determinar las carac-

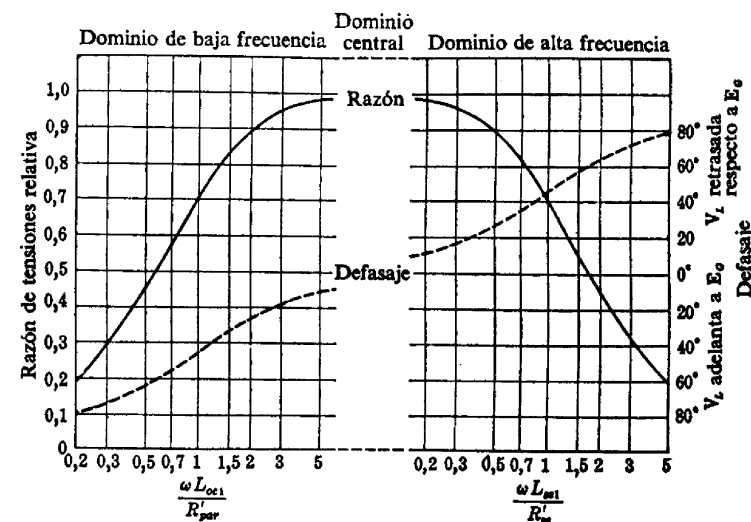


FIG. 6. Características universales de frecuencia y fase de los transformadores de salida.*

terísticas de frecuencia y fase del circuito y transformador a los que se aplican los siguientes datos:

$$\begin{aligned} R_G &= 2\,000 \text{ ohm} & R_L &= 10,0 \text{ ohm} \\ R_1 &= 200 \text{ ohm} & R_2 &= 0,5 \text{ ohm} \\ L_{oc1} &= 10,0 \text{ H} & L_{sc1} &= 0,100 \text{ H} \end{aligned}$$

$$a = N_1/N_2 = 20,0$$

A partir de estos datos,

$$R_{11} = 2\,200 \quad (46)$$

$$R_{22} = 10,5 \quad (47)$$

$$a^2 R_{22} = 4\,200 \quad (48)$$

$$R'_{se} = 6\,400 \quad (49)$$

$$R'_{par} = \frac{2\,200 \times 4\,200}{6\,400} = 1\,440. \quad (50)$$

Según F. E. TERMAN y R. E. INGEBRETSEN, «Output Transformer Response», *Electronics*, 9 (enero, 1936), 30-32.

De la ecuación (40) o de las curvas de la figura 6 resulta que la razón de tensiones a frecuencias bajas es $1/\sqrt{2}$, ó sea, el 70,7 % de su valor a las frecuencias centrales cuando la frecuencia es f_l , cuyo valor da,

$$\frac{\omega_l L_{oc1}}{R'_{par}} = 1 \quad (51)$$

o sea,

$$\omega_l = \frac{R'_{par}}{L_{oc1}} \quad (52)$$

$$= \frac{1\ 440}{10} = 144. \quad (53)$$

La frecuencia correspondiente f_l es $144/2\pi$, o sea 23,0 Hz. También de la ecuación (37) o de las curvas de la figura 6 resulta que, a frecuencias elevadas, la razón de tensiones relativa es igual al 70,7 % cuando la frecuencia es f_h , valor para el cual,

$$\frac{\omega_h L_{sc1}}{R'_{se}} = 1 \quad (54)$$

o sea,

$$\omega_h = \frac{R'_{se}}{L_{sc1}} \quad (55)$$

$$= \frac{6\ 400}{0,100} = 64\ 000. \quad (56)$$

La frecuencia correspondiente f_h es de $64\ 000/2\pi$, o sea 10 200 Hz. En forma análoga pueden determinarse otros puntos de las características de frecuencia y fase.

Cuando la razón de tensiones relativa es igual a 0,707 la potencia entregada a la carga con una fuerza electromotriz del generador es $(0,707)^2$, o sea, la mitad del valor correspondiente a las frecuencias centrales, por lo que se llama a las frecuencias a las cuales la razón de tensiones relativa vale 0,707, *puntos de potencia mitad*. La razón entre las frecuencias de los puntos de potencia mitad de alta y baja frecuencia constituye una medida del dominio de frecuencias en que puede operar el circuito sin hacer que la potencia de la carga caiga por debajo de la mitad de su valor a la frecuencia mejor de funcionamiento. La relación entre esta razón de frecuencias ω_h/ω_l y el número de octavas n existentes entre los dos puntos de potencia mitad es:

$$\frac{\omega_h}{\omega_l} = 2^n, \quad (57)$$

de donde,

$$n = \frac{\log \omega_h/\omega_l}{\log 2} = 3,32 \log \frac{\omega_h}{\omega_l}. \quad (58)$$

De las ecuaciones (52) y (55) resulta:

$$\frac{\omega_h}{\omega_l} = \frac{R'_{se}}{R'_{par}} \frac{L_{oc1}}{L_{sc1}}. \quad (59)$$

Como la razón de la inductancia en cortocircuito a la inductancia en circuito abierto es muy aproximadamente igual al coeficiente de fuga σ ,

$$\frac{\omega_h}{\omega_l} = \frac{1}{\sigma} \frac{R'_{se}}{R'_{par}}. \quad (60)$$

De las ecuaciones (37) y (40) resulta que la razón de tensiones relativa a la baja frecuencia f_l es igual a la razón de tensiones relativa a la alta frecuencia f_h si estas frecuencias tuvieran valores tales que,

$$\frac{R'_{par}}{\omega_l L_{oc1}} = \frac{\omega_h L_{sc1}}{R'_{se}}. \quad (61)$$

Es decir, la respuesta «cae» lo mismo a baja frecuencia que a alta frecuencia si dichas frecuencias son tales que satisfagan a la ecuación (61). En escala logarítmica, la frecuencia f_0 en el punto medio entre f_l y f_h es la media geométrica de f_l y f_h , o sea,

$$f_0 = \sqrt{f_l f_h} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{R'_{par} R'_{se}}{L_{oc1} L_{sc1}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{R_{11} R'_{22}}{L_{oc1} L_{sc1}}}. \quad (62)$$

Obsérvese que esta frecuencia media geométrica es igual a la frecuencia correspondiente a la máxima razón de tensiones deducida del análisis «exacto» y expresada en la ecuación (28). Como la inductancia en cortocircuito es muy aproximadamente igual a σL_{oc1} ,

$$f_0 = \frac{1}{2\pi L_{oc1}} \sqrt{\frac{R_{11} R'_{22}}{\sigma}}. \quad (63)$$

Las relaciones expresadas en las ecuaciones (59), (60) y (63) son de la máxima importancia en el diseño y aplicación de los transformadores de salida.

► La ecuación (59) indica que la razón de la frecuencia más elevada a la más baja a las que puede utilizarse satisfactoriamente el transformador es proporcional a la razón de la inductancia en circuito abierto a la inductancia en cortocircuito y es totalmente independiente de las magnitudes de estas inductancias. Así, pues, el primer requisito de un transformador que quiera utilizarse en un dominio de frecuencias amplio es que debe tener una razón elevada de la autoinducción a la inductancia de fuga o, en otras palabras, un coeficiente de fuga pequeño. ◀

La razón de la autoinducción a la inductancia de fuga se hace **grande** empleando todos los medios posibles de incrementar la autoinducción sin incrementar al mismo tiempo la inductancia de fuga, y de reducir la inductancia de fuga sin disminuir al mismo tiempo la autoinducción. Así pues, la autoinducción puede hacerse grande sin originar una gran inductancia de fuga utilizando un núcleo de gran permeabilidad con un entrehierro adecuado que reduzca al mínimo la disminución de la permeabilidad incremental a causa de la imanación debida a la corriente continua. La induc-

tancia de fuga puede disminuirse sin disminuir la autoinducción interfoliando los devanados primario y secundario y proporcionando en forma adecuada el espacio entre devanados. Obsérvese, sin embargo, que el dominio de frecuencia ω_k/ω_l no puede ampliarse aumentando los números de espiras de los devanados. Aumentando los números de espiras de ambos devanados (manteniendo la misma razón de transformación) se incrementan la autoinducción y la inductancia de fuga sin producir un aumento apreciable del coeficiente de fuga. La respuesta a las bajas frecuencias se mejora aumentando la autoinducción, pero la respuesta a las frecuencias elevadas queda afectada en forma adversa por el incremento de la inductancia de fuga. La frecuencia media geométrica disminuye, según indica la ecuación (63), pero la razón ω_k/ω_l no varía apreciablemente. Un transformador de forma fija y con un factor de espacio fijo para sus devanados tiene aproximadamente el mismo coeficiente de fuga independientemente de los números de espiras de sus devanados. La experiencia adquirida permite, pues, al diseñador, anticipar aproximadamente el dominio de frecuencias que puede esperarse para un núcleo y disposición de devanados particulares, independientemente de los números de espiras de los devanados. Sin embargo, los números de espiras determinan la frecuencia media geométrica, por lo que en las aplicaciones de audiofrecuencia se ajustan de manera que la frecuencia media geométrica (ec. 63) sea de unos 500 Hz cuando se utilice el transformador con el generador y carga para los que se ha diseñado.

Un transformador de salida no sólo debe tener buenas características de frecuencia y fase sino que también debe tener la capacidad de potencia requerida. La capacidad de transporte de corriente está limitada por el exceso de temperatura de los devanados, como en los transformadores para sistemas de potencia. El factor más importante en la determinación de la tensión nominal es la distorsión tolerable. La distorsión ocasionada por la forma de onda peculiar de la corriente de excitación depende de las características magnéticas del material del núcleo, de la longitud del entrehierro del núcleo; de la imanación debida a la corriente continua, de la amplitud de la componente alterna de la inducción magnética en el núcleo y de la impedancia interna del generador. En el diseño de un transformador de salida debe considerarse la influencia de todos esos factores sobre las formas de onda. Como la amplitud de la componente alterna de la inducción magnética en el núcleo es proporcional a la tensión inducida e inversamente proporcional a la frecuencia, el límite inferior del dominio de frecuencias de un transformador de salida lo establecerá la distorsión debida a señales intensas más que la caída de la característica de frecuencia.

3. CARACTERÍSTICAS DE FRECUENCIA Y FASE DE LOS TRANSFORMADORES DE ENTRADA E INTERETAPA

Los transformadores de entrada e interetapa se emplean para fines análogos, cuales son conectar un generador de tensión de señal a la reja de una válvula de vacío. En muchas aplicaciones de las válvulas de vacío como amplificadores lineales la potencia requerida por la reja de la válvula es muy pequeña y la corriente de reja es muy aproximadamente la que circularía por la pequeña capacidad de reja a cátodo de la válvula. Esta capacidad y las capacidades distribuidas del transformador tienen efectos importantes sobre las características de frecuencia y fase del circuito.

Consideremos el circuito de la figura 7 que comprende un transformador, un generador de resistencia interna R_G y una carga de capacidad C_L . Cuando se unen un terminal del primario y uno del secundario del transformador, sus capacidades distribuidas pueden representarse aproximadamente por las tres capacidades loca-

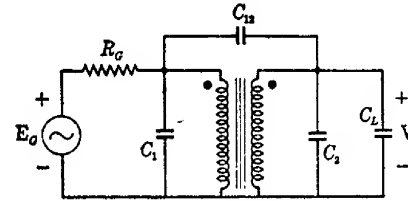


Fig. 7. Circuito que contiene un transformador de entrada o interetapa.

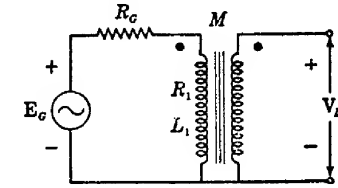


Fig. 8. Circuito equivalente a frecuencias bajas o centrales.

lizadas C_1 , C_2 y C_{12} de la figura 7. Supongámonos que la fuerza electromotriz del generador varíe sinusoidalmente y sea E_G el vector que la representa. Si generador y transformador se comportan como elementos de circuito esencialmente lineales, como debe ocurrir cuando sea importante la fidelidad de la forma de onda, la tensión en la carga también variará sinusoidalmente y podrá representarse por un vector V_L .

En un circuito diseñado para tener una respuesta a las frecuencias razonablemente «plana» en la banda de audiofrecuencias, los efectos de las capacidades de la válvula y del transformador suelen ser despreciables cuando la frecuencia es inferior al punto medio del dominio. Así, para frecuencias bajas y centrales, el circuito puede analizarse como si el secundario del transformador estuviera en circuito abierto, según se indica en el circuito equivalente aproximado de la figura 8. En consecuencia, las ecuaciones de las tensiones para los circuitos primario y secundario son:

$$E_G = (R_{11} + j\omega L_1)I_1 \quad (64)$$

$$V_L = j\omega M I_1, \quad (65)$$

donde,

R_{11} es la resistencia total del circuito primario y es igual a la resistencia R_G del generador más la resistencia R_1 del primario del transformador,

L_1 es la autoinducción incremental del primario,

M es la inducción mutua incremental,

I_1 es el vector corriente del primario, que es totalmente corriente de excitación puesto que el secundario está en circuito abierto.

La razón de la tensión en la carga a la fuerza electromotriz del generador es:

$$\frac{V_L}{E_G} = \frac{j\omega M}{R_{11} + j\omega L_1} = \frac{j\omega M}{j\omega L_1} \times \frac{1}{\frac{R_{11}}{j\omega L_1} + 1} \quad (66)$$

$$= \frac{M}{L_1} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_{11}}{\omega L_1}\right)^2}} \angle \arctg \frac{R_{11}}{\omega L_1} \quad (67)$$

A las frecuencias centrales, la resistencia R_{11} del circuito primario suele ser despreciable frente a la reactancia del primario ωL_1 , y por tanto en este dominio de las frecuencias centrales la razón de tensiones es aproximadamente igual a M/L_1 , que es muy poco diferente de la razón del número de espiras del secundario al de espiras del primario. Así pues, las tensiones están aproximadamente en concordancia de fase y la razón de sus magnitudes es casi independiente de la frecuencia e igual a la razón entre los números de espiras, como en el transformador ideal. En la figura 9 pueden verse las características de frecuencia y fase de dicho circuito. Obsérvese la horizontalidad de la característica de frecuencia en el dominio de las frecuencias centrales.

Al disminuir la frecuencia, disminuye la reactancia del primario ωL_1 y crece la razón $R_{11}/\omega L_1$. Así, según la ecuación (67), al disminuir la frecuencia, disminuye la razón de tensiones V_L/E_G y la tensión en la carga V_L adelanta a la tensión del

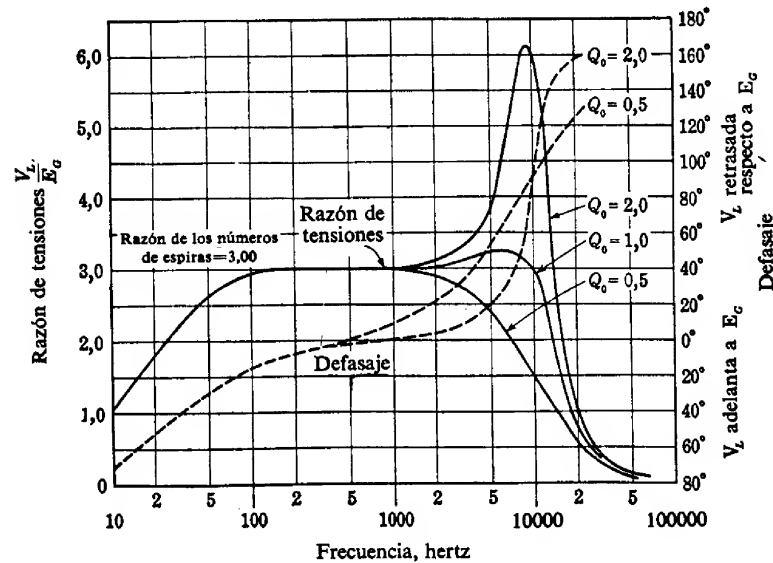


FIG. 9. Características de frecuencia y fase de un circuito que contiene un transformador de entrada o interetapa, poniéndose de manifiesto los efectos de variar la resistencia del secundario.

generador E_G , según se ve en la parte de frecuencias bajas de la figura 9. Las frecuencias bajas, pues, no se transmiten tan fácilmente como las centrales y el circuito no mantiene las relaciones correctas en magnitud y fase entre las componentes de frecuencias bajas y centrales de una tensión de señal que tuviera una forma de onda complicada.

Los efectos de las capacidades del transformador y de la carga se van haciendo más importantes al ir aumentando la frecuencia por encima de la región central. En la figura 10a puede verse un circuito equivalente aproximado que incluye estas

capacidades y en el que se ha conectado un terminal del primario con uno del secundario. En la figura 10a,

- C_{10} es la capacidad paralelo del primario,
- C_{12} es la capacidad entre devanados,
- C_{20} es la capacidad combinada de la carga y el secundario del transformador,
- R_1 y R_2 son las resistencias efectivas de los devanados,
- L_{11} y L_{12} son las inductancias de fuga
- M es la inducción mutua incremental,
- a es la razón del número de espiras del primario al de espiras del secundario.

Los efectos de las capacidades y sus efectos sobre el funcionamiento del circuito no sólo dependen de las disposiciones interiores de los devanados sino también de la

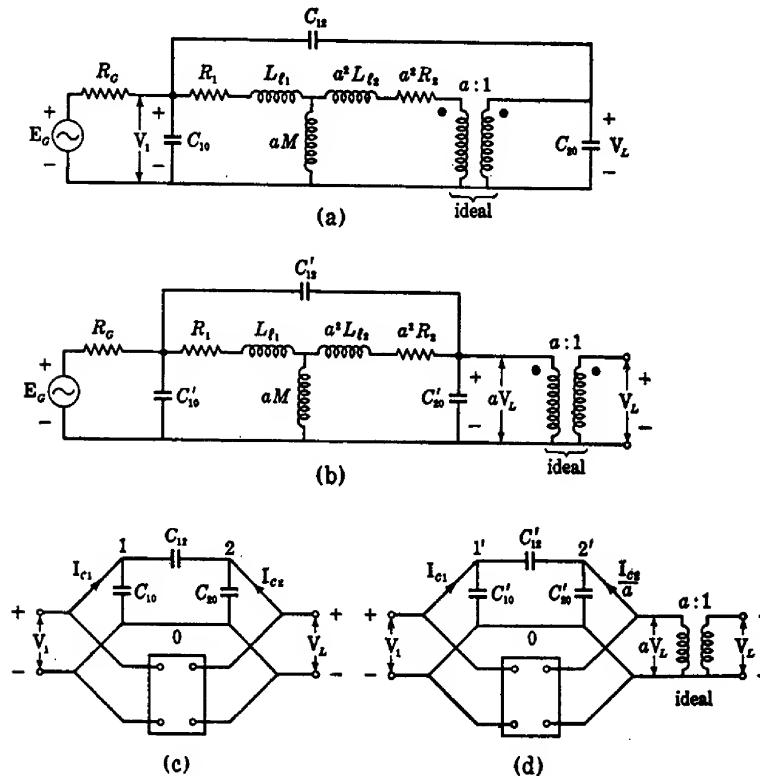


FIG. 10. Circuitos equivalentes para audiofrecuencias elevadas.

polaridad relativa de los terminales de primario y secundario que estén unidos. En el siguiente análisis se supondrán conectados los terminales de igual polaridad. También se supone que los parámetros del circuito equivalente de la figura 10a son

independientes de la frecuencia, aun cuando esta hipótesis sólo será válida para un dominio de frecuencias limitado.

En análisis, es conveniente «referir» las capacidades al primario, de manera que puedan transferirse al lado del primario del transformador ideal, como en la figura 10b, donde C'_{10} , C'_{20} y C'_{12} son capacidades que producen el mismo efecto sobre el circuito que las capacidades C_{10} , C_{20} y C_{12} de la figura 10a. Las capacidades de la figura 10a forman un circuito π , como puede verse en la figura 10c, en donde la caja representa la parte inductiva de la red de la figura 10a. Si se considera como nudo de referencia el terminal común 0, las corrientes I_{c1} e I_{c2} que penetran por los nudos 1 y 2 de la figura 10c pueden expresarse en la forma,

$$I_{c1} = j\omega(C_{10} + C_{12})V_1 - j\omega C_{12}V_L \quad (68)$$

$$I_{c2} = j\omega(C_{20} + C_{12})V_L - j\omega C_{12}V_1 \quad (69)$$

Estas ecuaciones pueden manejarse tomando como variables la intensidad y la tensión del secundario referidas al primario —es decir, I_{c2}/a y aV_L . Así, si se divide por a la ecuación (69) y se multiplica V_L por a , las ecuaciones (68) y (69) se convierten en

$$I_{c1} = j\omega(C_{10} + C_{12})V_1 - j\omega \frac{C_{12}}{a} aV_L \quad (70)$$

$$\frac{I_{c2}}{a} = j\omega \left(\frac{C_{20} + C_{12}}{a^2} \right) aV_L - j\omega \frac{C_{12}}{a} V_1 \quad (71)$$

Cuando se refieren al primario las capacidades y se conectan en el lado del primario del transformador ideal, como en las figuras 10b y 10d, la corriente que penetra por el nudo 2' de la figura 10d es I_{c2}/a y la tensión de este nudo es aV_L . Las ecuaciones de las corrientes para los nudos 1' y 2' de la figura 10d son:

$$I_{c1} = j\omega(C'_{10} + C'_{12})V_1 - j\omega C'_{12}aV_L \quad (72)$$

$$\frac{I_{c2}}{a} = j\omega(C'_{20} + C'_{12})aV_L - j\omega C'_{12}V_1 \quad (73)$$

Comparando las ecuaciones (72) y (73) con las ecuaciones (70) y (71) puede verse que las relaciones entre los valores referidos de las capacidades de las figuras 10b y 10d y sus valores reales de las figuras 10a y 10c deben ser:

$$C'_{12} = \frac{C_{12}}{a} \quad (74)$$

$$C'_{10} + C'_{12} = C_{10} + C_{12} \quad (75)$$

$$C'_{20} + C'_{12} = \frac{C_{20} + C_{12}}{a^2} \quad (76)$$

De las ecuaciones (74) y (75), resulta,

$$C'_{10} = C_{10} + C_{12} - C'_{12} \quad (77)$$

$$= C_{10} + C_{12} \left(1 - \frac{1}{a} \right) \quad (78)$$

y de las ecuaciones (74) y (76),

$$C'_{20} = \frac{C_{20} + C_{12}}{a^2} - C'_{12} \quad (79)$$

$$= \frac{C_{20}}{a^2} + \frac{C_{12}}{a} \left(\frac{1}{a} - 1 \right) \quad (80)$$

Así, pues, las ecuaciones (74), (78), y (80) dan los valores referidos de las capacidades en función de los valores reales. En un transformador elevador, la razón de transformación a es inferior a la unidad y en consecuencia la componente $C_{12} \left(1 - \frac{1}{a} \right)$ de

la ecuación (78) es negativa y la capacidad del primario C'_{10} de la figura 10b puede ser una capacidad hipotéticamente negativa.

El análisis completo del circuito equivalente de la figura 10b es demasiado complicado para ser empleado en la técnica y además no vale la pena puesto que la representación de las capacidades distribuidas del transformador por tres capacidades constantes es sólo aproximadamente correcta cuando varía la frecuencia. No obstante, puede simplificarse el circuito equivalente de manera que se ponga de manifiesto la naturaleza de los fenómenos que intervienen.

A las audiofrecuencias elevadas, la reactancia ωM de la rama magnetizante suele ser tan elevada que su conducción es despreciable y por tanto suele suprimirse. Además, la capacidad C'_{10} de la figura 10b puede ignorarse a menudo ya que sus

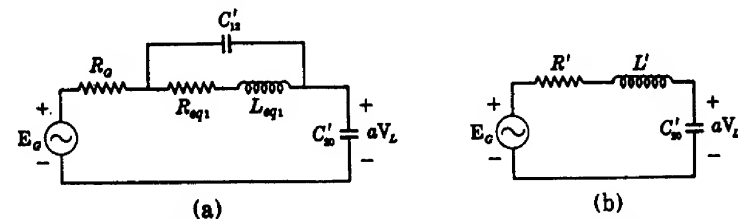


FIG. 11. Circuitos equivalentes aproximados para frecuencias elevadas.

efectos suelen carecer, relativamente, de importancia a causa de su posición en el circuito. El circuito equivalente, pues, puede simplificarse en la forma indicada en la figura 11a, donde R_{eq1} y L_{eq1} son la resistencia y reactancia equivalentes del transformador referidas al lado de su primario.

Para frecuencias inferiores a aquella en que la capacidad equivalente C'_{12} entre devanados se halla en resonancia paralelo con la inductancia equivalente L_{eq1} , la reactancia aparente de esta combinación paralelo es una reactancia inductiva y la resistencia aparente es mayor que la resistencia equivalente R_{eq1} . Aun cuando los valores de la inductancia y resistencia aparentes varían con la frecuencia, se puede lograr una buena aproximación a la forma de la característica de frecuencia suponiendo un valor constante para la inductancia aparente y prescindiendo del efecto de derivación de C'_{12} con la resistencia. En consecuencia, el circuito equivalente puede simplificarse aún más adoptando la forma indicada en la figura 11b, donde R'

es la resistencia del generador más la resistencia equivalente del transformador y L' es la inductancia aparente de la combinación paralelo de L_{eq1} y C'_{12} .

La frecuencia resonante f_0 de este circuito serie es:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L'C'_{20}}} \quad (81)$$

y en la resonancia, la razón Q_0 de la reactancia aparente a la resistencia es:

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L'}{R'}. \quad (82)$$

Para valores elevados de Q_0 , la tensión en la capacidad en condiciones de resonancia puede ser superior a la tensión del generador y por tanto, cuando Q_0 es grande, la característica de frecuencia presenta un máximo agudo a la frecuencia de resonancia, tal como el de la curva señalada con $Q_0 = 2,0$ en la figura 9. Este máximo puede no ser conveniente porque exagera las componentes de alta frecuencia de la tensión de señal. Para valores inferiores de Q_0 , desaparece el pico de resonancia; y si Q_0 se halla comprendido entre 0,7 y 1,0 la característica de frecuencia es sustancialmente plana en el intervalo de frecuencias en que las capacidades cuentan, según puede verse en la figura 9. Al ir aumentando la frecuencia por encima de la de resonancia, se hacen menores las reactancias de las capacidades y eventualmente pueden, prácticamente, anularse, reduciendo la tensión de carga a un valor muy pequeño según se indica en la figura 9.

El comportamiento del circuito a frecuencias altas y bajas está notablemente afectado por las resistencias y capacidades de generador y carga y por tanto el generador, transformador y carga de un amplificador deberán acomodarse adecuadamente unos a otros. El estudio de las características del amplificador completo puede verse en los textos de Electrónica, en los cuales se estudian las propiedades de las válvulas electrónicas. No obstante, del presente estudio pueden sacarse algunas conclusiones importantes referentes a las cualidades convenientes y limitaciones de diseño de los transformadores de entrada e interetapa para amplificadores de banda ancha.

Las características deseables para un tal amplificador son que la porción plana de su característica de frecuencia cubra el dominio de frecuencias a transmitir, que la distorsión introducida por las características de imanación del transformador no sea intolerable y que la razón del número de espiras para elevación sea lo más elevado posible a fin de incrementar la ganancia de tensión del amplificador. El diseño de un transformador de audiofrecuencia que reúna estos requisitos constituye un equilibrio entre factores contrapuestos.

A frecuencias bajas, la característica de frecuencia es casi plana, mientras la resistencia total R_{11} del circuito de primario sea pequeña frente a la autorreactancia ωL_1 del primario (véase ecuación 67). Así, la región de amplificación de tensión esencialmente constante se extiende hasta frecuencias más bajas si 1) se hace mayor la autoinducción incremental L_1 del devanado primario, 2) se hace menor la resistencia R_1 del devanado primario, o 3) se hace menor la resistencia R_G del generador. Por otra parte, la región de amplificación de tensión esencialmente constante se extiende hacia las frecuencias más elevadas si se hace mayor la frecuencia f_0 (ec. 81)

disminuyendo: 1) las inductancias de fuga, 2) la capacidad entre devanados, o 3) las capacidades del secundario y de la carga.

A fin de obtener autoinducciones incrementales de primario elevadas, los núcleos se fabrican con materiales magnéticos de gran permeabilidad y pérdidas bajas. Es corriente el empleo de láminas de acero al silicio, y los núcleos de los transformadores interetapa suelen tener un pequeño entrehierro a fin de reducir la imanación debida a la componente continua de la corriente de la placa de la válvula, y por tanto reducir al mínimo los efectos adversos de la imanación continua sobre la permeabilidad incremental. Para transformadores de audiofrecuencia de alta fidelidad se utilizan a veces núcleos de aleaciones especiales, tales como el permalloy. Como la permeabilidad incremental del permalloy queda muy perjudicada por la imanación debida a corriente continua, se dispone el circuito del amplificador de manera que se elimine del devanado primario la corriente continua cuando el transformador tenga núcleo de permalloy. Esta disposición se conoce con el nombre de «alimentación paralelo» y está descrita en casi todos los textos de Electrónica.

También se obtiene una gran autoinducción incremental de primario haciendo lo mayor posible la sección del núcleo y el número de espiras del primario, mientras sea compatible con otros requisitos. Aumentando la sección del núcleo y el número de espiras del primario se reduce la amplitud de la componente alterna de la inducción magnética y por tanto se tiene el beneficio de reducir la distorsión debida a la no linealidad de la característica magnética; sin embargo, al mismo tiempo la respuesta a frecuencias elevadas queda afectada desfavorablemente. Así pues, un aumento del número de espiras del primario exige otro aumento del número de espiras del secundario, si se mantiene la razón de transformación, y la inductancia de fuga aumenta con el número de espiras. Análogamente, aumentando la sección manteniendo fijo el número de espiras, aumentan las capacidades y las inductancias de fuga. El aumento de estas capacidades o de las inductancias de fuga presenta el inconveniente de disminuir la frecuencia de resonancia (véase ec. 81). Interfoliando los devanados primario y secundario se reducen las inductancias de fuga, pero esta ventaja queda parcialmente contrarrestada por el aumento de la capacidad entre los devanados originado por la interfoliación, por lo que ésta debe realizarse con cuidado.

El aumento de la razón de transformación elevadora con el fin de incrementar la ganancia de tensión va acompañada de una disminución de la autoinducción del primario o de aumentos de la inductancia de fuga del secundario y de la capacidad distribuida, o de las tres cosas a la vez. En consecuencia, el dominio de frecuencias en el que la razón de tensiones se mantiene esencialmente constante se estrecha al aumentar la razón de transformación, y la razón máxima práctica resulta ser aproximadamente de 1 : 4 para los transformadores interetapa de audiofrecuencia.

Otra deducción basada en las curvas de la figura 9 es que para evitar un pico no conveniente de la respuesta a frecuencias elevadas próximas a la resonancia, la Q_0 del circuito (ec. 82) no debe ser mayor que 1,0. La Q_0 puede reducirse a este valor haciendo disminuir la inductancia de fuga (lo cual también aumenta la frecuencia de resonancia) o aumentando la suma de la resistencia del generador y las resistencias de los devanados del transformador. No obstante, el aumento de la resistencia del devanado primario, o de la resistencia del generador, afecta desfavorablemente la respuesta a las frecuencias bajas. Por otra parte, la resistencia del

devanado secundario no afecta a la respuesta a las frecuencias bajas; por ello los secundarios de ciertos transformadores interetapa se devanan con hilo de gran resistividad para mejorar la respuesta a las frecuencias elevadas. La Q_0 eficaz del circuito puede también disminuirse y suprimir el pico de la resonancia conectando una resistencia elevada entre los terminales del secundario del transformador, aun cuando esto entrañe cierto sacrificio de la ganancia de tensión a todas las frecuencias.

PROBLEMAS

1. Un generador de corriente alterna de fuerza electromotriz fija E y resistencia interna R_G suministra potencia a una resistencia de carga R_L . Supóngase que para todo valor de R_L se dispone de un transformador cuya razón de los números de espiras corresponde a potencia máxima entregada a la carga. ¿Cuál deberá ser el valor del cociente R_L/R_G antes de que se garantice el empleo del transformador, si

- el rendimiento del transformador es del 85 %?
- el rendimiento del transformador es del 50 %?

2. Se conocen los datos siguientes de un transformador de audiofrecuencia con núcleo de hierro:

Resistencia efectiva del devanado primario	= 300 ohm
Resistencia efectiva del devanado secundario	= 2 ohm
Inductancia del primario en circuito abierto	= 11 H
Inductancia del primario en cortocircuito	= 0,09 H
Razón de transformación	= 20

Si el circuito primario exterior al transformador es una resistencia pura de 2 000 ohm en serie con una fuerza electromotriz de 125 V a 500 Hz:

a) ¿Qué resistencia de carga se precisa para hacer que 500 Hz sea la frecuencia a la cual la razón de tensiones es máxima?

b) ¿Cuál es la potencia suministrada a la carga a 500 Hz si la resistencia de carga tiene el valor hallado en a)?

3. Partiendo de la ecuación (25) de este capítulo y no haciendo más aproximaciones, deducir expresiones para:

- Las pulsaciones ω_h y ω_l superior inferior de potencia mitad.
- La anchura de banda $\omega_h - \omega_l$.

c) El factor de selectividad $\frac{\omega_o}{\omega_h - \omega_l}$.

d) Indicar qué términos o factores deben despreciarse en las expresiones de ω_h y ω_l deducidas en la parte a) para que dichas expresiones sean iguales a las de las ecuaciones (52) y (55).

4. Se quiere utilizar un transformador para conectar un micrófono dinámico a una línea de transmisión de 600 ohm de resistencia. Las reactancias del micrófono y de la línea son despreciables. El transformador debe tener la razón de números de espiras adecuada para que haya transmisión máxima de potencia y debe tener una razón de caídas de tensión para el máximo de no más del 5 % y un desfase de no más de 20° en el intervalo entre 50 Hz y 8 000 Hz. Suponiendo despreciables las resistencias del transformador, hallar sus inductancias de primario y secundario y el coeficiente de acoplo.

5. En el registro de un laboratorio, parte de la información que se da concerniente a los transformadores de adaptación está constituida por los valores de la resistencia exterior de los circuitos primario y secundario que daría máxima transmisión de potencia a 500 Hz para una tensión dada en el circuito primario.

Se desea utilizar un receptor telefónico de 10 000 ohm de resistencia y autoinducción

despreciable como detector que funcione a 1 500 Hz en un puente para corriente alterna que presenta una resistencia equivalente de 100 ohm entre sus terminales de salida. Si las resistencias de los devanados del transformador son suficientemente pequeñas para despreciarlas, ¿cuáles serían las resistencias exteriores nominales para el transformador más apropiado para acoplar el receptor telefónico al puente?

6. Un generador que tiene una tensión generada de

$$e_G = 15 \text{ sen } 11\,500t + 5 \text{ sen } 34\,500t \quad (83)$$

y una resistencia de 1 500 ohm, se conecta entre los terminales del primario del transformador de entrada cuyo circuito equivalente es el de la figura 12.

- Representar gráficamente la forma de onda de la tensión de entrada.
- Representar la forma de onda de la tensión de salida, empleando las mismas escalas para tensión y tiempo que en la parte a). Para determinar esta forma de onda puede hacerse cualquier aproximación justificable.

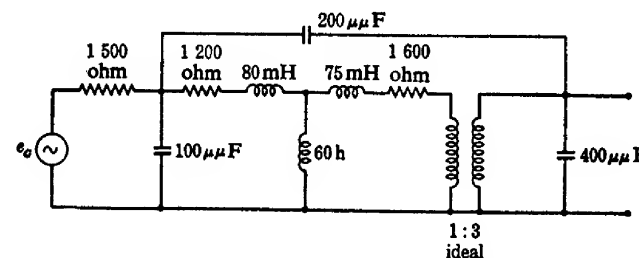


FIG. 12. Circuito equivalente para el transformador de entrada del problema 6.

7. De un transformador interetapa se han tomado los datos siguientes:

Inductancia del primario en cortocircuito	= 108 mH
Resistencia del devanado primario	= 550 ohm
Resistencia del devanado secundario	= 6 080 ohm
Razón de tensiones en circuito abierto a 200 Hz	= 1 : 2,5
Inductancia del primario en circuito abierto	= 20 H

Además, se encuentra que con los terminales del primario del transformador cortocircuitados y el secundario excitado, la resonancia paralelo se produce a 6 500 Hz.

a) Determinar la razón de tensiones a la frecuencia de resonancia si se conecta el transformador por la parte de su primario a un generador cuya impedancia interna es una resistencia de 20 000 ohm. Despréciase la capacidad entre devanados y la capacidad de la carga.

b) Determinar la frecuencia del punto de potencia mitad de menor frecuencia cuando se utiliza el transformador en las condiciones de a).

8. Un transformador de entrada con una razón de transformación de 1 : 4 y una inductancia de primario en cortocircuito de 320 mH tiene como frecuencia de resonancia 4 970 Hz. Cuando está alimentado por un generador de resistencia interna de 20 000 ohm, la razón V_L/E_G en condiciones de resonancia vale 3,2 : 1. Si pueden despreciarse la resistencia, inducción mutua y capacidad equivalente paralelo del primario del transformador, ¿cuáles son los valores de:

- La capacidad equivalente entre devanados C_{12} ?
- La capacidad equivalente del secundario C_{20} ?

Aplicaciones de los transformadores en sistemas de potencia

En los sistemas de potencia se emplean muchos transformadores para accionar instrumentos de medida y relés de mando, para obtener corriente de intensidad eficaz constante en circuitos de alumbrado público conectado en serie y para regular la tensión o la circulación de potencia reactiva en una línea de transmisión o en un alimentador. En este capítulo se estudiarán brevemente algunos de estos transformadores.

1. TRANSFORMADORES PARA INSTRUMENTOS

Los instrumentos de medida y relés para el accionamiento de dispositivos protectores y de mando suelen conectarse a los circuitos de potencia de corriente alterna a través de *transformadores para instrumentos* si la tensión del circuito es mayor que unos centenares de volt. De esta manera se evita la conexión directa entre los instrumentos y los circuitos de alta tensión, que sería peligroso para los operarios y requeriría cuadros de instrumentos caros y con un aislamiento especial. Aun en el caso en que la tensión del circuito no fuera peligrosa por lo elevada, corrientemente se emplean transformadores para instrumentos cuando se quieren medir corrientes muy intensas, evitando así el llevar cargas fuertes a los cuadros de instrumentos.

Los transformadores para instrumentos se califican en *transformadores de potencial* y *transformadores de intensidad*, según se destinen a la medida de diferencias de potencial o de intensidades de corriente. El primario se conecta convenientemente al circuito cuya tensión o intensidad de corriente quiera medirse, y el secundario se conecta a los instrumentos o relés. Cuando se instalan transformadores para instrumentos de razones de transformación apropiadas, para circuitos de tensión e intensidad nominales cualesquiera se emplean instrumentos y relés de 150 V y 5 A. Con esta normalización, aceptada plenamente en América, pueden reducirse al mínimo los costos de instrumentos y circuitos de mando.

1a. Transformador de potencial. El primario de un transformador de potencial, devanado para la frecuencia y tensión a medir, aproximadamente, se conecta a ésta; el secundario, devanado para 115 V aproximadamente, se conecta a los instrumentos de medida de 150 V. El circuito secundario debe estar conectado a tierra para proteger al operario en el caso de un fallo del aislante y evitar también la acumulación de carga electrostática que pudiera afectar a las indicaciones de los instrumentos. La tensión V entre las líneas a las que está conectado el primario del transformador de potencial viene dada por

$$V = (\text{razón de tensiones del transformador}) \times (\text{indicación del voltímetro}) \quad (1)$$

Las escalas de los voltímetros del cuadro pueden estar graduadas de manera que indique directamente la tensión de la línea.

La teoría del transformador de potencial es exactamente la misma que la de cualquier otro transformador con núcleo de hierro. Si no fuera por las caídas de tensión en las impedancias de fuga, la razón de las tensiones en terminales sería constante, independiente de la tensión y de la intensidad de la corriente que el secundario suministra para hacer funcionar los instrumentos. Esta razón constante sería igual a la razón de los números de espiras de los dos devanados. Como la razón de las tensiones en terminales debe ser lo más constante posible, los transformadores de potencial se diseñan de manera que tengan resistencias y reactancias de fuga muy pequeñas. La carga del secundario de un transformador de potencial suele consistir en instrumentos de medida de tensión, por lo que casi puede considerarse como una resistencia no inductiva.

Debido a las caídas de tensión en las impedancias de fuga, puede haber un pequeño defasaje entre las tensiones de primario y secundario de polaridad correspondiente. Este defasaje puede introducir un error, generalmente pequeño, en la indicación de un watímetro cuyo devanado de tensión esté conectado al secundario del transformador. Como la indicación del watímetro es proporcional al coseno del ángulo de defasaje entre la tensión aplicada al devanado de tensión y la corriente que circula por el devanado de intensidad, un desplazamiento angular dado en la tensión produce mayor error en la indicación del watímetro cuando el defasaje entre tensión e intensidad es próximo a 90° que cuando es próximo a cero.

Se diseñan fácilmente transformadores de potencial cuyas razones de tensiones sólo varían en una pequeña fracción por ciento, al variar las condiciones de tensión y cargas y cuyos defasajes son inferiores a $0,1^\circ$.

Aun cuando su salida es de pocos volt-ampere, las dimensiones y peso de un transformador de potencial para alta tensión pueden ser grandes, por requerirse aislamiento adecuado para alta tensión.

1b. Transformador de intensidad. El primario de un transformador de intensidad consta de pocas espiras —a veces una sola— que se conectan en serie con el circuito cuya intensidad de corriente se quiere medir y el secundario se conecta a los instrumentos de medida de la intensidad. Como en el empleo de los transformadores de potencial, deben ponerse a tierra los circuitos secundarios de los transformadores de intensidad. La intensidad I de la corriente que circula por el primario viene dada por

$$I = (\text{razón de intensidades del transformador}) \times (\text{indicación del amperímetro}) \quad (2)$$

Las escalas de los amperímetros del cuadro pueden graduarse para dar directamente la intensidad de la corriente que circula por la línea del primario.



FIG. 1. Transformador de potencial de 13 800 : 115 V para interiores, con fusibles limitadores de la intensidad, los terminales de salida están alojados en la tapa metálica situada en la parte anterior.

Los transformadores de intensidad se utilizan también para comparar dos corrientes que circulen por circuitos diferentes o por partes diferentes de un mismo circuito. Por ejemplo, en la figura 3, D representa el devanado de una fase de un

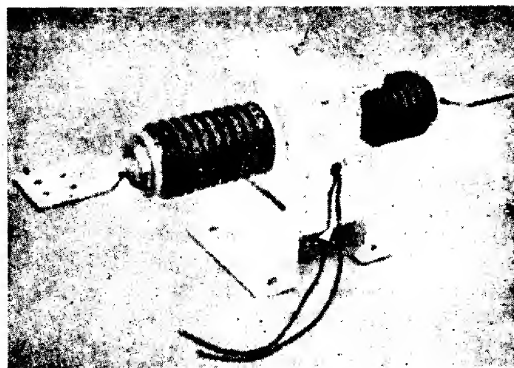


FIG. 2. Transformador de intensidad para interiores, del diseño utilizado para corrientes de 1 000 A a 5 000 A a unos 25 000 V. El primario consiste en una varilla o barra recta que constituye una espira única rodeada por el núcleo. En la figura 10 del capítulo X pueden verse transformadores de intensidad para circuitos de tensiones más elevadas

generador o motor polifásico y $T'C$, $T''C$ representan dos transformadores de intensidad iguales. La bobina del relé R se conecta en paralelo con los secundarios de ambos transformadores, cuyos terminales de secundario se conectan entre sí de manera que se unan los de polaridad tal que la corriente que circule por la bobina del relé sea la diferencia vectorial entre las corrientes del secundario de los dos transformadores de intensidad, tal como se indica en la figura 3. Si el aislante del devanado D está en buenas condiciones, las corrientes que circulan por ambos transformadores son iguales y por la bobina del relé no circula corriente. Sin embargo, si fallara el devanado, las corrientes en sus dos extremos difieren en la que se deriva por el fallo y por la bobina del relé circula una corriente proporcional que puede disponerse para accionar un disyuntor que desconecte la máquina averiada. Este circuito constituye la base del esquema diferencial de relé, empleando corrientemente para proteger máquinas, alimentadores cortos, circuitos paralelos y otras instalaciones.

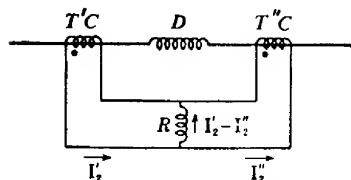


FIG. 3. Esquema elemental de circuito en el que puede verse el empleo de transformadores de intensidad en un relé de corriente diferencial.

La teoría del transformador de intensidad es la misma que la de cualquier otro transformador con núcleo de hierro. El secundario se cierra a través de la impedancia de los instrumentos conectados a él. Normalmente son instrumentos para cinco amperes. La tensión entre los terminales del secundario es la caída a través de los instrumentos, está adelantada respecto a la corriente y suele ser de pocos volt. La tensión entre terminales del primario es aproximadamente igual a la tensión del

secundario referida al primario y puede ser solamente de una fracción de volt.

Si es constante la impedancia de los instrumentos, tanto la tensión inducida como el flujo mutuo son directamente proporcionales a la intensidad de la corriente del secundario. Si no fuera por la corriente de excitación, las intensidades de las corrientes de primario y secundario serían inversamente proporcionales a los números de espiras de los devanados y estarían también en concordancia de fase al considerarlas en sentidos opuestos respecto al núcleo. Si la componente magnetizante de la corriente de excitación fuera proporcional al flujo mutuo y si la pérdida en el núcleo fuera proporcional al cuadrado del flujo mutuo, la intensidad de la corriente de excitación sería proporcional a la intensidad de la corriente del secundario y guardaría con ella una relación de fase fija. Sin embargo, a causa de la no linealidad del circuito magnético, la corriente de excitación no es proporcional a la de la corriente del secundario ni es constante su ángulo de defasaje.

Como la corriente de excitación altera la razón y el defasaje entre las corrientes de primario y secundario, se hace lo menor posible utilizando acero de permeabilidad elevada y de pérdidas reducidas en la construcción del circuito magnético. Se han desarrollado esquemas ingeniosos que compensan casi por completo los efectos de la corriente de excitación.¹ La impedancia de fuga del secundario y las impedancias de los conductores que salen del secundario y de los instrumentos, deberán también, ser lo menor posible ya que cualquier incremento de estas impedancias incrementa el flujo en el núcleo, y por tanto, la corriente de excitación.

La corriente de excitación depende del grado de saturación del núcleo. Por esta razón, no se permitirá que circule corriente continua por un transformador de intensidad a menos que después se desmagnetice por completo para eliminar el magnetismo residual. Además, el secundario no deberá nunca quedar en circuito abierto mientras el primario transporte corriente. Si se abriera el circuito secundario en estas condiciones, la corriente del primario permanecería prácticamente invariable por estar determinada casi por completo por el circuito en que está situado el primario. Al suprimir el efecto desmagnetizante de la corriente del secundario, el flujo se eleva entonces hasta un valor determinado por la corriente del primario. Como los transformadores de intensidad suelen funcionar a inducción magnética débil, el flujo puede aumentar considerablemente hasta quedar limitado por la saturación, y el valor eficaz de la tensión en los terminales del secundario en circuito abierto puede elevarse hasta unos pocos centenares de volt. A causa de la distorsión debida a la condición de saturación del núcleo entonces existente, la tensión inducida tendrá una forma de onda muy aguda y su valor de pico puede ser suficientemente elevado para ser peligroso para la duración y para el aislante del transformador.

Otra causa de sobretensiones peligrosas en los transformadores de intensidad son los picos de intensidad debidos a los rayos y a los transitorios creados en los interruptores. Para reducir los efectos de estas sobretensiones suelen conectarse en paralelo con los primarios de los transformadores de corriente *protectores derivados* análogos a los pararrayos.

1c. *Conexiones trifásicas.* * Los transformadores para instrumentos suelen co-

¹ Para una descripción de varios dispositivos compensadores véase B. HAGUE, *Instrument Transformers* (Londres: Sir Isaac Pitman & Sons, Ltd., 1936), 73-102.

* El tema general de las conexiones trifásicas de los transformadores se estudia en los capítulos XXI-XXIV.

nectarse de muy diversas formas para medir la tensión, intensidad y potencia en los circuitos trifásicos. Por ejemplo, si se conectan en triángulo-triángulo tres transformadores de potencial, podrán medirse las tensiones en la línea mediante voltímetros conectados entre cada par de terminales secundarios. Si se conectan los primarios de tres transformadores de intensidad, uno en serie con cada línea, mediante el circuito de la figura 4, podrán medirse las intensidades de las tres corrientes

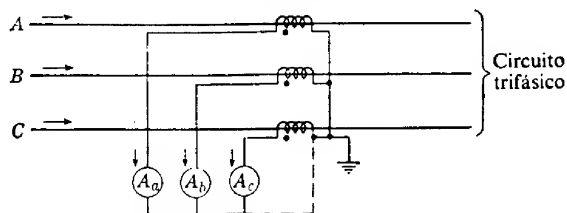


Fig. 4. Transformadores de intensidad conectados en estrella

tes de la línea; los secundarios están conectados en estrella puesta a tierra y los amperímetros también están conectados en estrella. Si el circuito de potencia es un circuito de tres hilos sin hilo neutro, la suma instantánea de las tres corrientes de línea que circulan por los primarios hacia la carga, debe ser nula, y por tanto, la suma de las corrientes de secundario también debe ser nula si los tres transformadores son iguales. En consecuencia, puede suprimirse la conexión entre el neutro de los secundarios conectados en estrella y el de los amperímetros, señalada en la figura 4 con línea de trazos. En cambio, esta conexión es necesaria cuando el circuito de potencia tiene un hilo neutro.

Las tensiones, intensidades y potencia en un circuito trifásico de tres hilos se pueden medir por medio de dos transformadores iguales de potencial y dos transformadores de intensidad iguales conectados en la forma indicada en la figura 5.

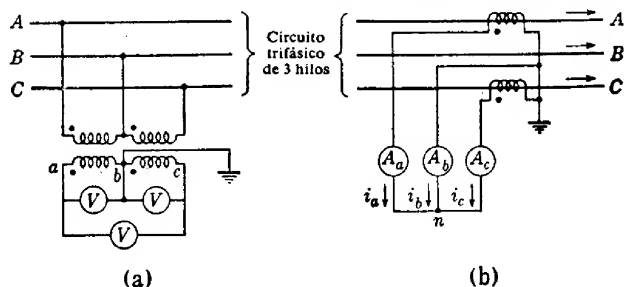


Fig. 5. Conexiones de transformadores de instrumentos para circuitos trifásicos de tres hilos; a) conexión en triángulo abierto de dos transformadores de potencial, b) dos transformadores de intensidad

La conexión de los transformadores de potencial de la figura 5a se conoce con el nombre de conexión en triángulo abierto. Se describe detalladamente en el apartado 5 del capítulo XXI. En la figura 5b, los amperímetros A_a y A_c están directamente en serie con los dos transformadores de intensidad, y por tanto, indican

las intensidades de las corrientes que circulan por las líneas A y C. La primera ley de Kirchhoff aplicada al nudo n, da como relación entre las corrientes de los secundarios.

$$i_a + i_b + i_c = 0, \quad (3)$$

y como i_a e i_c son proporcionales a las intensidades de las corrientes de línea de los primarios i_A e i_C respectivamente, la intensidad i_b que señala el amperímetro A_b es proporcional también a la intensidad i_B de la corriente del primario si es nula

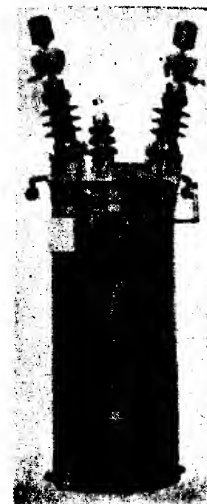


Fig. 6. Equipo de medida trifásico de tres hilos de 23 000 V 200 A aislado por aceite, para exteriores. Cada uno de los dos pasatapas delanteros contiene dos conductores que llevan la corriente a los terminales primarios de un transformador monofásico de intensidad. La tensión en cada primario de los transformadores de intensidad está limitada por el protector derivado montado en la parte superior del pasatapas. El pasatapas de atrás contiene un conductor de potencial, estando conectados dentro del tanque los conductores de potencial que llevan a las otras dos fases. Las conexiones son las indicadas en la figura 5. Los transformadores de potencial monofásicos para alta tensión tienen un aspecto parecido al de este equipo de medida, pero sólo tienen dos pasatapas y no tienen protectores derivados

la suma de intensidades de las corrientes de primario, como debe ocurrir si el circuito de potencia es un circuito de tres hilos. A menudo se montan en una misma cubierta los transformadores de potencia e intensidad, como se muestra en la figura 6, a fin de ahorrar espacio, peso y costo. A la combinación se le llama entonces *equipo de medida*. La potencia en un circuito trifásico de tres hilos puede medirse por el método de los dos watímetros si se conectan dos watímetros con sus devanados de intensidad en serie con los amperímetros A_a y A_c (Fig. 5b) y con sus devanados de tensión excitados por las tensiones V_{ab} y V_{cb} respectivamente (Fig. 5a). Obsérvese que esta disposición da la potencia trifásica y la intensidad en la fase B tan solo cuando el circuito trifásico es un sistema trifásico sin hilo neutro.

2. TRANSFORMADOR DE INTENSIDAD CONSTANTE

En el alumbrado público se conectan frecuentemente en serie lámparas de arco, de incandescencia o de descarga en gas. En un circuito serie, cada lámpara es asiente de la misma corriente y la corriente de la línea es mucho más débil que lo sería si las lámparas estuvieran alimentadas por un circuito paralelo a tensión constante.

Para la conexión en serie, las lámparas deben ser todas de igual intensidad nominal y debe regularse la corriente en el circuito de manera que se mantenga constantemente al valor nominal. Para estos circuitos serie, son corrientes intensidades nominales de 6,6 A y 7,5 A. Para dichos circuitos se utilizan casi universalmente transformadores de intensidad constante.

La figura 7 es una fotografía de un transformador de intensidad constante y la figura 8 es un esquema simplificado de una disposición ligeramente distinta. Sin

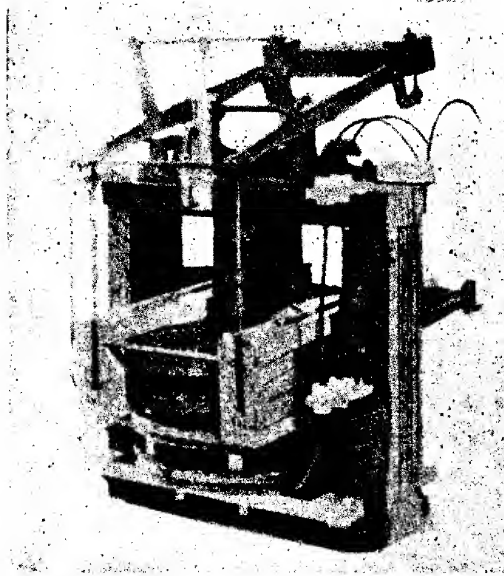


Fig. 7. Transformador de intensidad constante utilizado para suministrar potencia a un sistema serie de alumbrado urbano. Se ha quitado la envoltura de alambre protector que rodea el transformador cuando está en servicio. Los valores nominales son 2 300 V en primario, 6,6 A en secundario, 60 Hz, 60 kW de salida

embargo, ambos tipos funcionan sobre los mismos principios, cuyas características principales se indican en la figura 8. El circuito magnético está dispuesto como el de un transformador de tipo acorazado, exceptuándose que el núcleo es suficientemente largo para permitir una separación considerable de los devanados primario y secundario. El núcleo de hierro CCC de la figura 8 funciona a una inducción magnética suficientemente elevada para que el flujo de fuga en el núcleo sea mayor que en un transformador de potencia para tensión constante. Los devanados primario y secundario 1 y 2 rodean la rama central del núcleo. Un devanado está fijo; el otro es móvil y está soportado por un brazo que pivota en P. La reactancia de fuga de dicho transformador es relativamente grande y crece al separar las bobinas. El peso del devanado móvil está compensado en parte por un peso W colgado del sector S unido al brazo que pivota. El primario puede ser, tanto el devanado fijo como el móvil. En el estudio siguiente se supondrá que el primario es el devanado fijo 1.

El flujo de fuga en el núcleo debido a la corriente del primario se ha representado en la figura 8 por líneas de trazos. El sentido instantáneo de este flujo de fuga del primario está indicado para los hemicírculos en que la corriente del primario circula en el sentido indicado en la figura por los puntos y las cruces (indicativos de puntas y colas de flechas dirigidas en el sentido de la corriente). Como las corrientes de primario y secundario están casi en oposición de fase, el sentido de la corriente de secundario es opuesto al de la de primario salvo durante una parte muy pequeña de cada ciclo. Por la regla de la mano izquierda para la determinación del sentido de la fuerza que actúa sobre un conductor que transporte corriente, se ve que cuando

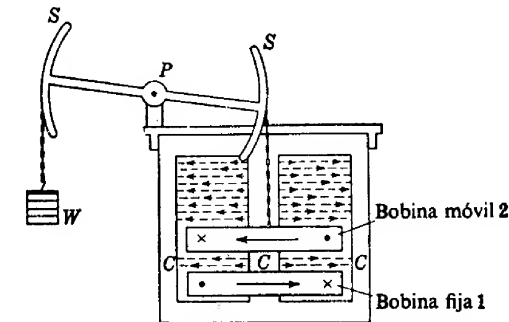


Fig. 8. Esquema de la disposición del núcleo y devanados de un transformador de intensidad constante

las corrientes tienen los sentidos indicados en la figura 8, sobre el secundario se ejerce una fuerza hacia arriba. Medio período más tarde, se han invertido los sentidos de ambas corrientes; el flujo de fuga se ha invertido también y la fuerza sigue estando dirigida hacia arriba. Durante todo el período, salvo en la pequeña parte en que ambas corrientes tienen el mismo sentido y son débiles, la fuerza que se ejerce sobre el secundario está dirigida hacia arriba. La fuerza hacia arriba, al ser proporcional al producto de las intensidades alternas de primario y secundario, es una cantidad pulsátil de frecuencia doble de la de la línea y que tiene un valor medio que tiende a separar los devanados. Habida cuenta de la masa del secundario, la variación de frecuencia doble de la fuerza no origina movimiento alguno apreciable del secundario, si bien puede contribuir apreciablemente al ruido radiado por el transformador.

Debido a la fuerza electromagnética de repulsión entre ambos devanados, el secundario móvil ajusta su posición respecto al primario fijo de manera que la fuerza equilibre exactamente al peso del brazo y la bobina. Si se disminuye la impedancia de la carga, aumenta la intensidad de la corriente y la fuerza de repulsión entre las bobinas y el devanado 2 se aleja más del 1, aumentando la reactancia de fuga y disminuyendo la intensidad de la corriente. A fin de evitar que oscile el devanado 2 alrededor de su posición de equilibrio se provee algún medio de amortiguamiento de las oscilaciones, tal como un amortiguador conectado al sistema móvil. Ajustando adecuadamente el contrapeso W, la forma de los sectores S y el ángulo al que se ha construido, el transformador puede regularse para corriente de inten-

sidad casi constante para cualquier dominio conveniente de carga, e incluso cuando el secundario esté cortocircuitado, con tal que el núcleo sea suficientemente largo para permitir una separación suficiente de los devanados. Cuando el secundario está cortocircuitado, el transformador no alimenta a ninguna carga, pues su tensión de salida es nula. Al crecer la resistencia de la carga, los devanados se aproximan a fin de desarrollar la tensión que es ahora necesaria para mantener constante la intensidad de la corriente del secundario. Al ser ésta constante, la potencia de salida crece con la resistencia de carga hasta que, por último, entran en contacto los devanados. En ese momento la potencia de salida tiene su valor máximo. Una vez en contacto los devanados, todo incremento ulterior de la resistencia de carga hace disminuir la intensidad de la corriente de secundario y la potencia de salida, como en el transformador ordinario de tensión constante.

En un transformador de intensidad constante ajustado en forma adecuada, la intensidad de la corriente de secundario es constante. Si no lo fuera para la variación de intensidad y fase de la corriente de excitación, la intensidad de la corriente del primario también sería constante. Por tanto, el primario funciona a tensión

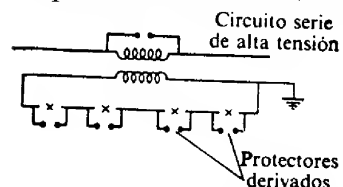


FIG. 9. Circuito que utiliza un transformador aislador de bucles

constante y a intensidad aproximadamente constante, y la variación de potencia de entrada originada por una variación de la carga se debe principalmente a una variación del factor de potencia del primario. El secundario entrega potencia a intensidad constante y tensión variable y a un factor de potencia determinado por la carga. Para una carga de lámparas de incandescencia, el factor de potencia de salida es casi igual a la unidad.

Los transformadores de intensidad constante se ponen en servicio llevando su secundario a la posición más elevada posible bien sea manualmente o por medios automáticos. Después de cerrar el interruptor de primario, se suelta el secundario dejándole que adopte la posición correspondiente a la carga del transformador.

La tensión a tierra de ciertas partes de los circuitos serie de alumbrado urbano puede alcanzar valores peligrosos —de varios miles de volt. Para evitar la existencia de esas tensiones entre la instalación del alumbrado y tierra, los circuitos de alumbrado urbano suelen estar divididos en varios bucles, alimentado cada uno de ellos por un transformador cuyo primario está en serie con el circuito principal, según se indica en la figura 9. Un transformador utilizado de esta guisa recibe el nombre de *transformador aislador de bucles*, porque proporciona aislamiento entre el circuito serie principal y el bucle, de manera que éste puede ponerse a tierra. Por medio de la razón de transformación de

FIG. 10. Transformador aislador utilizado para suministrar una corriente de 20 A a baja tensión a una o dos lámparas del alumbrado urbano, desde un circuito de corriente constante de 6,6 A a alta tensión. Este transformador está destinado a ser instalado en la base de un poste ornamental para alumbrado



intensidades apropiada, un transformador aislador de bucles puede también utilizarse para alimentar un bucle consistente en lámparas cuya intensidad nominal es diferente de la del circuito principal.

Para evitar la interrupción del circuito serie total al fundirse una de las lámparas, éstas y los primarios de los transformadores aisladores de bucles suelen ir provistos de protectores derivados conectados en paralelo con ellos. Si se fundiera una lámpara, la tensión total del circuito serie quedaría aplicada a su protector. La tensión excesiva perfora la película aislante del protector derivado que se hace así conductor y permite que el resto del circuito siga funcionando.

3. TRANSFORMADOR DE RAZÓN AJUSTABLE O CON CAMBIO DE TOMAS

Si se suministra potencia a un transformador a través de un circuito de transmisión, de impedancia relativamente elevada, la tensión entre terminales del primario podrá variar con las variaciones de carga a lo largo de un dominio demasiado

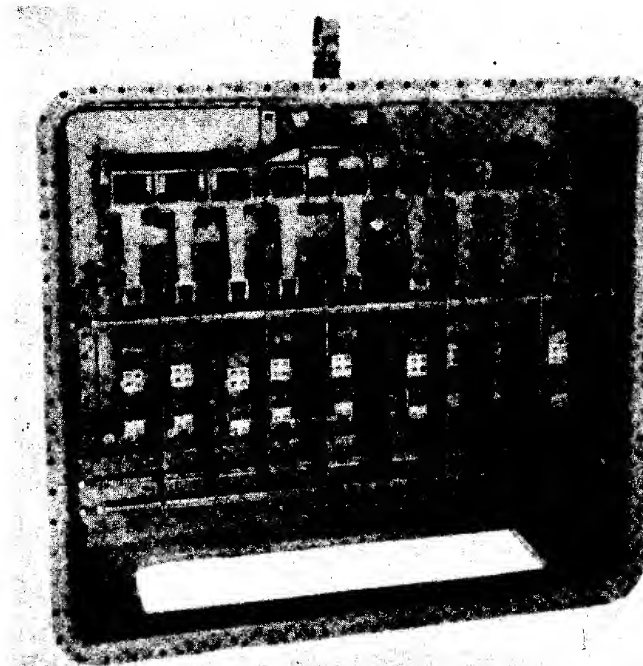


FIG. 11. Mecanismo cambiador de tomas de un transformador de potencia grande. Los contactos se accionan en un orden definido mediante levass montadas sobre un árbol giratorio. El conjunto está sumergido en aceite aislante

amplio, a causa de las variaciones de caída de tensión en la impedancia del circuito de transmisión. En tales casos, podrá convenir disponer de tomas en el devanado primario a fin de mantener la tensión del secundario a su valor nominal ante las

condiciones variables de carga y factor de potencia. El número de espiras a utilizar en el primario se elige por una disposición de los contactores tal que la tensión inducida en el primario por espira del primario se mantenga casi constante. El flujo será, pues, casi constante, así como la tensión inducida en el secundario. Los transformadores grandes de potencia con cambiador de tomas se emplean también frecuentemente para regular la circulación de potencia reactiva entre dos sistemas de potencia interconectados o entre partes componentes de un mismo sistema, permitiendo al propio tiempo mantener a los valores deseados las tensiones en puntos especificados.

Frecuentemente, los aparatos cambiadores de tomas deben diseñarse de manera que pueda ajustarse la razón de transformación en carga sin que se interrumpa la

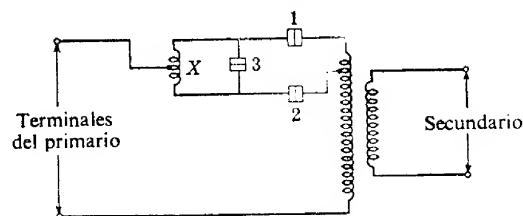


FIG. 12. Circuito elemental para cambiar tomas en carga

corriente de carga. En la figura 12 pueden verse los elementos esenciales para lograr dicho fin. La bobina X es una bobina con núcleo de hierro y toma media y 1, 2 y 3 son contactores. Supongamos que el transformador funciona sobre la toma 1 cuando un aumento de la carga reduce la tensión del primario de manera que sea conveniente pasar a la toma 2 a fin de mantener constante la tensión del secundario. Si no debe interrumpirse el circuito primario, deberá cerrarse el contactor 2 antes de que se abra el 1. El fin de la bobina es evitar que queden en cortocircuito las espiras entre 1 y 2 cuando los contactores 1 y 2 estén ambos cerrados. Aun cuando la tensión inducida por el flujo en el núcleo en las espiras situadas entre las tomas 1 y 2 sólo es una pequeña fracción de la tensión del primario, la impedancia de fuga de estas espiras es también pequeña. En consecuencia, si las tomas 1 y 2 estuvieran cortocircuitadas, la intensidad de la corriente que circula por las espiras situadas entre estas tomas podría ser 10 ó 20 veces mayor que la intensidad nominal.

La sucesión de hechos al pasar de la toma 1 a la 2 es la consignada en la tabla I. El gobierno de los contactores puede ser manual o automático. En la posición de funcionamiento normal, el contactor 3 está cerrado, cortocircuitando la bobina. La corriente del primario se divide, entonces, por igual entre las dos mitades de la bobina y como dichas corrientes tendrán sentidos opuestos, su fuerza magnetomotriz resultante es nula, así como el flujo en el núcleo de la bobina. La impedancia de ésta es, pues, igual solamente a la mitad de la impedancia de fuga de una de las secciones de su devanado respecto a la otra. En las etapas segunda y cuarta de la tabla la corriente sólo circula por una mitad de la bobina. No habiendo en la otra mitad corriente continua de sentido opuesto, la fuerza magnetomotriz que actúa sobre su circuito magnético es igual al producto de la intensidad de la corriente del primario por el número de espiras de la mitad de la bobina. A fin de evitar una caída de

siado grande en la impedancia de la bobina durante las etapas de transición 2 y 4, se diseña a veces el núcleo de la bobina de tal manera que se sature cuando la corriente que circule por una u otra mitad tenga una intensidad próxima a la de

TABLA I
CAMBIO DE TOMAS

Posición	Contactor		
	1	2	3
1. Toma 1	0		0
2. Transición	0		
3. Toma 1 1/2	0	0	
4. Transición		0	
5. Toma 2		0	0

0 = interruptor cerrado

plena carga de la corriente del primario. En la tercera etapa indicada en la tabla, la bobina está conectada en paralelo con las espiras comprendidas entre las tomas 1 y 2. La corriente que circula por las espiras del transformador situadas entre las tomas está limitada por la reactancia magnetizante de la bobina. Si esta reactancia es suficientemente grande, la corriente que circule por las espiras del transformador no será demasiado intensa. Así pues, el diseño de la bobina es un compromiso que reúna todos los requisitos de la manera más satisfactoria posible.

4. TRANSFORMADORES REGULADORES DE TENSIÓN

Cuando varios alimentadores reciben energía de un colector, suele ser necesario regular, independientemente unas de otras, las tensiones de los diferentes alimentadores. Para este fin existen dos tipos de transformadores reguladores de tensión que se emplean muy corrientemente, cuales son el regulador por etapas y el regulador por inducción.

4a. *Regulador por etapas.* El regulador por etapas suele consistir en un autotransformador cuyo devanado serie posee un cierto número de tomas que pueden cambiarse bajo carga y que son seleccionadas automáticamente por un circuito de mando sensible a la tensión. El devanado serie está conectado de tal manera que su tensión se suma o resta con la tensión del devanado común. En la figura 15 puede verse uno de los dispositivos más sencillos de regulador por etapas, en el cual se conecta la salida al punto medio del devanado serie de manera que seleccionando las tomas por encima o por debajo de este punto medio, puede hacerse que

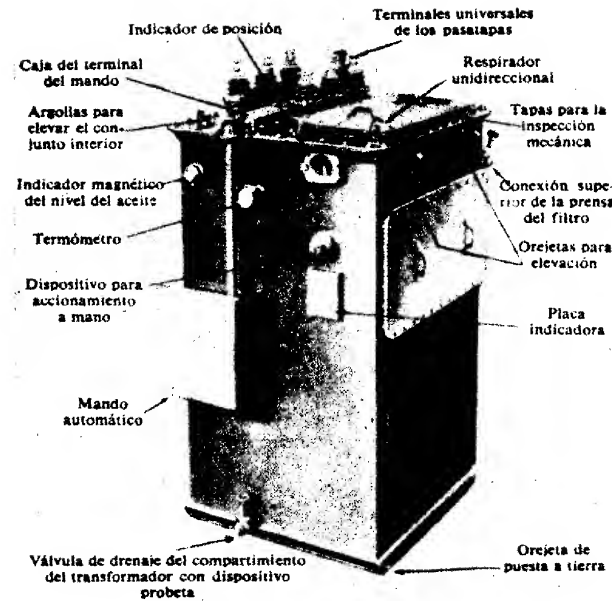


FIG. 13. Regulador de tensión por etapas de un alimentador trifásico, de diseño típico para valores nominales inferiores a 750 kVA a tensiones de menos de 15 000 V. Este regulador cubre un dominio de tensiones de $\pm 10\%$ en 32 etapas de $5/8$ por ciento cada una

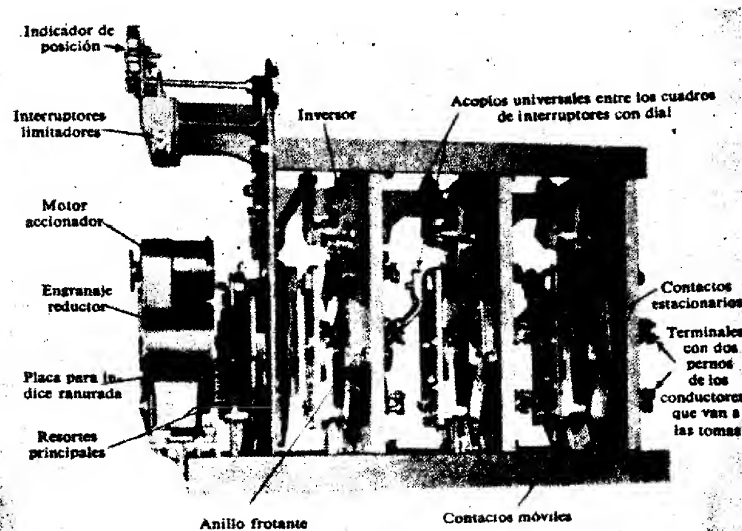


FIG. 14. Mecanismo cambiador de tomas para el regulador trifásico de la figura 13. Los contactos funcionan en un baño de aceite

la tensión del devanado serie sea superior o inferior a la tensión de entrada. Las tomas las seleccionan dos cursores que deslizan sobre un sistema de contactos fijos. La bobina de reacción X limita la intensidad de la corriente en las espiras cortocircuitadas cuando los cursores se hallan en posiciones que pondeen dos tomas sucesivas. Si la corriente fuera demasiado intensa para ser interrumpida por los cursores sin que se produzca un arco serio, se conectan en serie con ellos unos contactores auxiliares, tal como se indica en la figura 15.

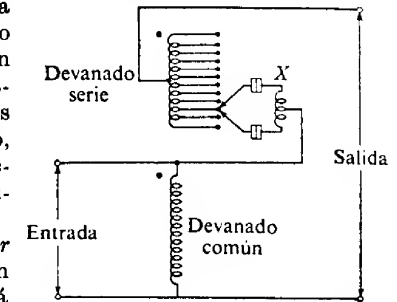


FIG. 15. Esquema de circuito para regulador por etapas

4b. *Regulador por inducción.* El regulador monofásico por inducción es, en esencia, un transformador, uno de cuyos devanados está montado de manera que pueda girarse adoptando posiciones diferentes respecto al otro.

En la figura 16 puede verse un esquema del regulador. En ella, 1 y 2 son los lados de las bobinas de los devanados primario y secundario respectivamente, y 3 indica los lados de las bobinas de un devanado cortocircuitado situado en cuadratura con el primario. Para mayor sencillez, los devanados primario y secundario se indican como si cada uno de ellos se hallara concentrado en un solo par de ranuras. Sin embargo, en la realidad estos devanados se hallan alojados en un cierto número de ranuras distribuidas sobre las periferias del estator y el rotor. En la figura 17 puede verse la disposición de los devanados del rotor 1 y 3. Cuando estén alineados los ejes de los devanados primario y secundario, la inducción mutua es máxima y la tensión inducida en el secundario también lo será. Cuando dichos ejes sean perpendiculares, la inducción mutua es nula y también lo será la tensión inducida en el secundario. Puede obtenerse cualquier valor intermedio de la tensión inducida en el secundario. El primario del regulador se conecta en paralelo con la línea cuya tensión quiere regularse. El secundario suele conectarse en serie con la línea tal como se indica en la figura 18. La tensión inducida en el secundario se suma o se resta, entonces, de la tensión de línea del primario según sean las posiciones relativas de los devanados primario y secundario.

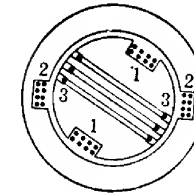


FIG. 16. Esquema de regulador monofásico por inducción

Quando estén en cuadratura primario y secundario, no habrá reacción entre ellos y la *autoimpedancia* del devanado secundario quedaría en serie con la línea de transmisión si no fuera por el devanado cortocircuitado 3, cuya misión es reducir la impedancia del secundario. Cuando los devanados primario y secundario están en cuadratura, el devanado compensador (el cortocircuitado) actúa respecto al secundario como el secundario en cortocircuito de un transformador y reduce la reactancia aparente del devanado secundario. La impedancia en cortocircuito es mucho menor que la autoimpedancia del secundario.

El regulador polifásico por inducción consiste en un devanado primario polifásico estacionario y un devanado secundario polifásico móvil que puede girarse adoptando diferentes posiciones respecto al primario. En la figura 19 pueden verse las conexiones de un regulador trifásico por inducción. Los devanados A , B y C del

primario o estator se conectan en estrella a los terminales primarios A , B y C de la línea. Los devanados del secundario o rotor a , b y c se conectan en serie con los terminales secundarios a , b y c de la línea.



FIG. 17. Rotor de un regulador de tensión monofásico por inducción refrigerado por aceite. Las bobinas de la izquierda pertenecen al circuito activo; las de la derecha son las bobinas compensadoras. Las conexiones con el circuito exterior se realizan mediante los cables flexibles de la parte superior

La teoría del regulador polifásico por inducción es igual que la del motor de inducción polifásico de rotor devanado². Según la teoría del motor de inducción polifásico, las corrientes que circulan por los devanados primarios crean un campo magnético giratorio de amplitud constante en el entrehierro, que induce en los devanados secundarios tensiones de valor eficaz constante cuyos defasajes respecto a las tensiones del primario varían cuando se hace girar el rotor adoptando diferentes posiciones respecto al estator. Si se desprecia la pequeña caída de tensión en la impedancia de fuga del secundario, la tensión en el terminal de la fase a del secundario es igual a la suma vectorial de la tensión en el terminal de la fase A del primario V_A más la tensión en el terminal de la fase a del secundario E_a inducida por el campo magnético giratorio. Para una tensión de primario fija, el lugar geométrico de la tensión V_a del terminal del secundario es aproximadamente un círculo, tal como se indica en la figura 20. Así pues, podrá obtenerse, girando el rotor, un valor cualquiera de la tensión V_a del terminal del secundario comprendido entre la suma y la diferencia aritmética de V_A y E_a . Para los valores intermedios de V_a , existirá una rotación de fase entre V_A y V_a . En este aspecto, el regulador polifásico por inducción se diferencia del monofásico. En el regulador monofásico por inducción, la tensión inducida en el secundario está casi en fase con la tensión del primario, pero varía

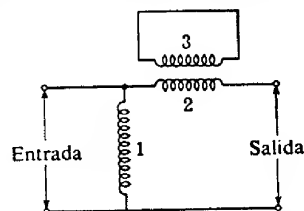


FIG. 18. Conexiones de un regulador monofásico por inducción

Véase R. R. LAWRENCE, *Principles of Alternating-Current Machinery* (3a. ed.; New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1940), 480.

en magnitud cuando se mueve el rotor adoptando posiciones diferentes. Otra diferencia entre los dos tipos es que el polifásico no requiere devanado compensador.

La elección del mejor tipo de regulador de tensión para un alimentador es un problema técnico clásico en el que la economía es el elemento principal. A título

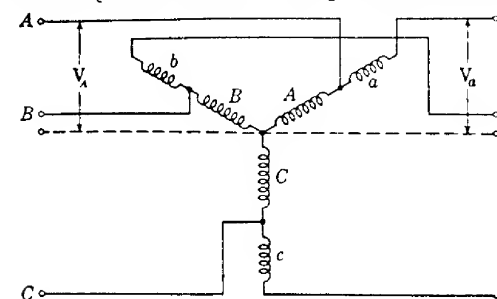


FIG. 19. Conexiones del regulador trifásico por inducción

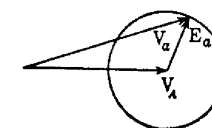


FIG. 20. Diagrama vectorial de las tensiones en un regulador polifásico por inducción

de orientación, puede decirse que los reguladores de tensión automáticos del tipo de inducción para alimentadores serán aplicables principalmente en zonas que tengan densidades de carga más bien grandes, estando el costo del regulador repartido en

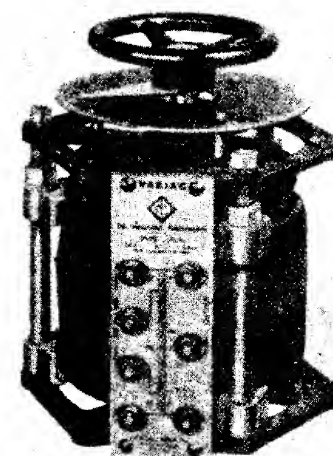


FIG. 21. Autotransformador ajustable para uso en laboratorio. La tensión de salida puede variarse suavemente en un amplio dominio de tensiones por medio de un contacto deslizante. Los valores nominales de este dispositivo son 115 V de entrada, 60 Hz, 2 kVA

un gran volumen de negocio. Los grandes reguladores de tensión por etapas suelen utilizarse para regular las cargas de circuitos de interconexión entre colectores de subcentrales, mientras que para mantener burdamente la tensión adecuada en líneas

de potencia de poca densidad de carga, tales como las líneas rurales, se emplean reguladores pequeños de tensión por etapas para alimentadores³. El elevado costo de inversión de los reguladores de tensión por inducción no suele justificar su aplicación a líneas poco cargadas, dado lo relativamente baratos que son los reguladores de tensión por etapas.

En los laboratorios, suele convenir disponer de un generador de potencia de corriente alterna de pocos kilovoltampere de capacidad y ajustable en un amplio dominio de tensiones. Dicho generador puede obtenerse adecuadamente de un transformador pequeño con razón de tensiones variable. En el mercado existen varios tipos de transformadores de tensión ajustable, uno de los cuales es el presentado en la figura 21.

PROBLEMAS

1. Un transformador de intensidad cuya razón de transformación nominal es de 8 : 1 y cuya intensidad de corriente del secundario es de 5 A tiene las siguientes constantes:

$$\begin{aligned} N_1 &= 25 \text{ espiras} & R_2 &= 0,51 \text{ ohm} \\ N_2 &= 196 \text{ espiras} & L_{l2} &= 0,00105 \text{ H} \end{aligned}$$

La longitud media del circuito magnético del transformador es de 20 pulgadas (50,8 cm) y su sección recta es de 4,0 pulgadas cuadradas (25,8 cm²). El material del núcleo pesa 0,272 libras por pulgada cúbica (7,53 g/cm³) y tiene las características magnéticas para valores bajos de saturación dadas por la siguiente tabla:

B	H	Pérdida en el núcleo por libra a 60 Hz
450 G	0,320 Oe	0,0098 W
400	0,315	0,0082
350	0,305	0,0067
300	0,290	0,0052
240	0,259	0,0036
180	0,224	0,0021
120	0,173	0,0008
60	0,105	0,00016

Para simplificar los cálculos puede suponerse sinusoidal la corriente magnetizante. Si se utiliza este transformador en un circuito de 60 Hz con un amperímetro de 5 A que tenga una resistencia de 0,178 ohm y un coeficiente de autoinducción de 0,000147 H:

a) ¿Cuál es la verdadera razón de transformación cuando el instrumento señala 5,0 A?

b) ¿Cuál es el ángulo de fase del transformador cuando el instrumento señala 5,0 A?

2. Para reducir los errores de defasaje y de razón de transformación se utiliza a veces, en lugar de un transformador de intensidad ordinaria, un transformador de intensidad llamado de dos etapas. En la figura 22 puede verse un esquema de dicho transformador. Los devanados A' y B' tienen, respectivamente, igual número de espiras

que los devanados A y B y están devanados en el mismo sentido; el devanado C' tiene el mismo número de espiras que el devanado B' . El transformador de dos etapas suele emplearse en instrumentos que tengan dos bobinas de intensidad separadas —una para conducir la corriente procedente de los devanados B y B' y la otra para conducir la corriente procedente del devanado C' . Explicar, para el caso de un transformador de dos etapas utilizado de esta manera, cómo se realiza la reducción de los errores de defasaje y de razón de transformación. Si fuera ideal el núcleo auxiliar, ¿sería total la eliminación de estos errores?

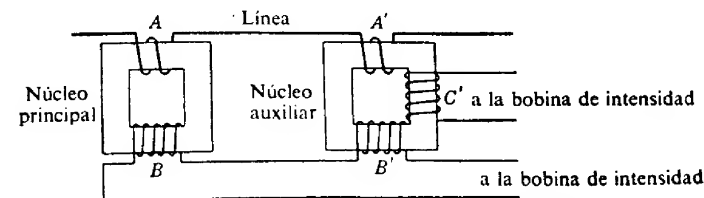


Fig. 22. Transformador de dos etapas, problema 2

3. La potencia trifásica entregada por una línea de transmisión de tres hilos a una carga equilibrada se mide con el dispositivo esquematizado en la figura 23. El watímetro 1 que tiene su devanado de intensidad en serie con la fase a y su devanado de tensión en paralelo con ab , señala 138 W; el watímetro 2, que tiene su devanado de intensidad en serie con la fase c y su devanado de tensión en paralelo con cb , señala 406 W. Las razones de defasajes de los transformadores para esta carga e instrumentos son: retraso de la tensión del secundario de los transformadores de potencial respecto a la tensión del primario, 0,167°; adelanto de la corriente de secundario de los transformadores de intensidad

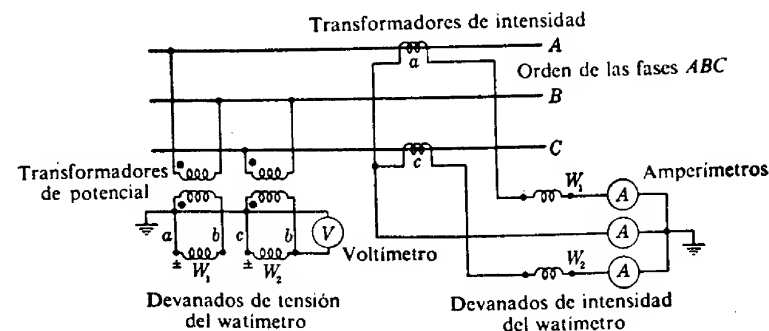


Fig. 23. Conexiones para medida en tres hilos, problema 3

respecto a la corriente del primario 0,833°; razón de la tensión del primario de los transformadores de potencial a la tensión del secundario $(20\ 800 : 100) \times 1,004$; razón de la corriente del primario de los transformadores de intensidad a la corriente del secundario $(300 : 5) \times 1,006$. Determinar la potencia total entregada a la carga y el factor de potencia de dicha carga.

4. Un transformador de intensidad constante de 4 kVA, 60 Hz con una razón del número de espiras del primario al de espiras del secundario igual a 1 : 3,2 y tensión nominal de primario de 230 V se ajusta para entregar una corriente de secundario de inten-

G. H. LANDIS, «Voltage Regulation and Control in the Development of a Rural Distribution System», *A. I. E. E. Trans.*, 57 (septiembre, 1938), 541-547.

idad constante igual a 6,6 A, para un dominio de carga comprendido entre salida cortocircuitada y potencia aparente de salida nominal. Si se mantiene el secundario móvil apretado hacia abajo contra el primario, una tensión de 63,5 V aplicada a los terminales del primario hace circular por el secundario una corriente de 6,6 A cuando se cortocircuita este último con un amperímetro de impedancia baja. La intensidad de la corriente del primario y la potencia para este ensayo son 22,0 A y 220 W.

- a) Si se suelta el secundario dejándolo flotante, ¿cuál es la reactancia de fuga en cortocircuito expresada como tanto por ciento de la reactancia de fuga a plena carga?
- b) Si se desprecian la corriente de excitación y la pérdida en el núcleo, ¿cuál es el factor de potencia de entrada cuando el transformador alimenta una carga resistiva de: (1) 50 ohm, (2) 125 ohm?

5. En el sistema de distribución de potencia de la figura 24, A y B son centrales generadoras conectadas mediante transformadores por una línea de transmisión de alta tensión. A las barras de baja tensión de cada extremo de la línea están conectadas car-

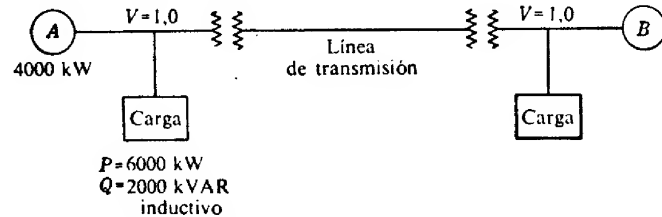


FIG. 24. Sistema elemental de potencia, problema 5

gas de potencia. En el funcionamiento normal, la potencia de salida de la central A se mantiene constante al valor indicado en el esquema y las fluctuaciones de carga las manipula la central B. Para todas las cargas, se mantienen constantes y al mismo valor las tensiones en ambas centrales generadoras por regulación de los campos de excitación de los generadores. La impedancia de la línea y de los transformadores es $0,05 + j 0,36$ por uno referida a la tensión nominal en uno u otro extremo de la línea y a una base de 5 000 kVA.

- a) Hallar, para el valor de la carga especificado en el esquema, la potencia reactiva entregada a A por la línea.
- b) Como este tipo de operación origina una circulación nociva de potencia reactiva a la línea de transmisión para ciertos dominios de carga, se decide cambiar el transformador situado en B por un transformador con cambio de tomas que regula la circulación de potencia reactiva. Supóngase que permanece invariable la impedancia de la línea de transmisión y de los transformadores y que no la afecta apreciablemente un cambio de toma en un transformador. Hallar, para la carga especificada en la figura 24, la variación en tanto por uno de la alta tensión en el extremo B de la línea que debe alimentar el transformador cambiador de tomas a fin de reducir a cero la potencia reactiva suministrada a la estación A.

6. La figura 25 representa las conexiones básicas de un regulador automático de tensión por inducción para un alimentador, y un circuito de regulación conocido con el nombre de compensador de caída de línea. La bobina K del relé gobierna al motor rotativo regulador de manera que mantenga una tensión constante entre los extremos de K para todas las cargas de funcionamiento normal. La impedancia de la bobina K es tan elevada que $I_p \ll I_c$ salvo a cargas extraordinariamente pequeñas. La impedancia $R + jX$ del compensador de caída en la línea se ajusta de manera que, para los valores

de la figura 25, la caída de tensión V_{cb} referida al lado de alta tensión del transformador de potencial es igual a la caída de tensión en la impedancia de la línea de potencia entre los terminales de salida BB' del regulador y la carga.

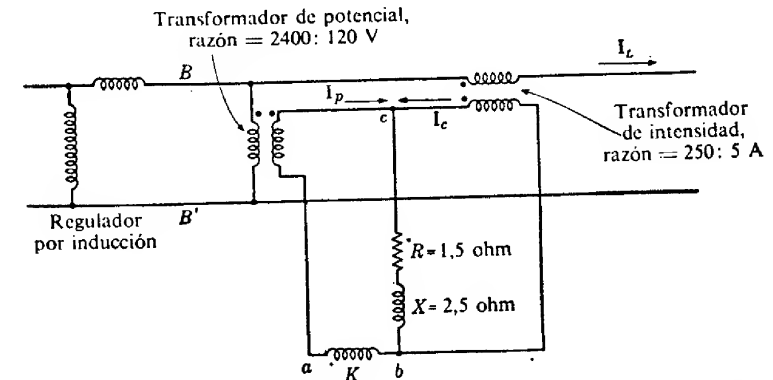


FIG. 25. Regulador por inducción y compensador de la caída en la línea, problema 6

La línea suministra a la carga una salida a plena carga normal de 150 A y 2 400 V. Cuando se suministra a tensión normal a la carga una corriente I_L del 0,75 por uno con un factor de potencia inductivo de 0,80, ¿cuál es el valor complejo por uno de la tensión de salida $V_{BB'}$ referida a la tensión de carga como base?

7. En la figura 26 pueden verse las conexiones de un regulador por inducción. El devanado 1 tiene como valores nominales 10 A y 220 V; el devanado 2, 20 A y 110 V.

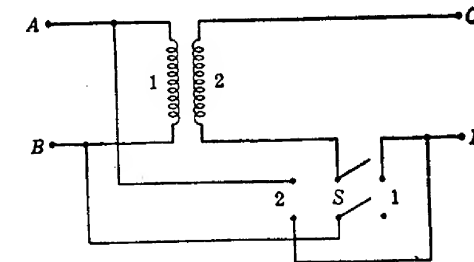


FIG. 26. Regulador por inducción, problema 7

- a) ¿De qué dominios de tensión se dispone en el regulador si se supone ideal?
- b) ¿Cuál es la intensidad nominal de la corriente de salida?
- c) Con el interruptor S en la posición 2 se gira el rotor hasta la posición que da la tensión de salida máxima cuando están abiertos los terminales CD y los terminales AB conectados al generador de 220 V. Con el rotor mantenido en esta posición, la impedancia medida entre los terminales CD con los terminales AB cortocircuitados y el interruptor S en la posición 2 es $0,160 + j 0,510$ ohm. ¿Cuál es la tensión máxima de salida que se puede obtener del regulador cuando suministre la corriente de intensidad nominal a una carga inductiva de factor de potencia 0,80 siendo 220 V la tensión de entrada?

Aplicación de los transformadores en sistemas telefónicos

En el capítulo XVIII se hizo referencia a los transformadores de entrada, inter-
etapa y salida utilizados en los amplificadores. En este capítulo veremos algunas
otras aplicaciones de los transformadores a las comunicaciones. Entre ellas se cuen-
tan utilizaciones de los transformadores en las que llevan los nombres de bobina
de inducción, bobina repetidora y bobina híbrida o transformador de tres devanados.

1. BOBINA DE INDUCCIÓN

La primera aplicación comercial del transformador a las comunicaciones fue el
empleo de la bobina de inducción en telefonía, en el año 1877, para conectar el trans-
misor (micrófono) de carbón a la línea. Para transmisión a distancias cortas, los

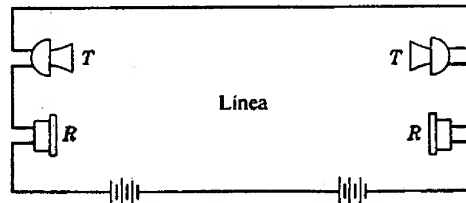


FIG. 1. Circuito telefónico serie

transmisores y receptores pueden conectarse en serie con la línea, como en la
figura 1, pero para transmisión a gran distancia este circuito no era factible a causa
de la tensión de batería que hacía falta. En consecuencia, se conectaban en serie
con el transmisor la batería y el primario de la bobina de inducción, y el receptor

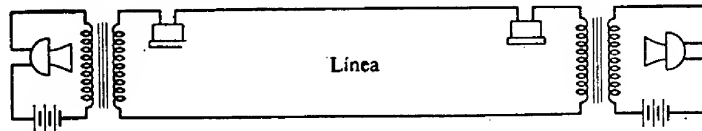


FIG. 2. Circuito telefónico de batería local que utiliza bobinas de inducción

y el secundario de la bobina se conectaban en serie con la línea, como se indica en
la figura 2. Utilizada de esta manera, la bobina de inducción puede considerarse como
filtro elemental, ya que sirve para separar la portadora de corriente continua de las
componentes alternas de la señal que transportan la inteligencia, y por tanto
reduce las pérdidas en la línea. También sirve para adaptar la impedancia baja del
transmisor (de 20 a 40 ohm) a la impedancia elevada de la línea (de 400 a 600 ohm)
utilizando una razón de transformación elevadora. Con ello se amplía el dominio

de la posible transmisión telefónica. Probablemente, la bobina de inducción consti-
tuye el tipo más común de transformador, ya que prácticamente en cada teléfono
se emplea una.

Las bobinas de inducción se acostumbraba a construirlas con un mazo de alambres
de hierro como núcleo, extremos cuadrados de carrete de madera o de fibra para
sujetar los devanados, y un devanado primario y otro secundario. Los extremos
de los devanados se llevaban al exterior a terminales montados sobre los extremos
del carrete. Dichas bobinas tenían coeficientes de acoplo suficientemente elevados
y rendimientos satisfactorios, y los campos parásitos que creaban no constituían
una desventaja seria mientras no se colocaran dos sistemas telefónicos cerca uno
de otro, o cuando el empleo de cajas de timbres metálicas evitara un acoplo mag-
nético serio entre sistemas adyacentes. En la figura 3 puede verse una de dichas bobi-
nas. Sin embargo, en 1930 el uso de los sistemas del abonado Bakelite hizo que el
problema del acoplo aumentara en importancia y se dictaron normas que exigían
que los sistemas telefónicos estuvieran separados, uno de otro, al menos doce pulga-

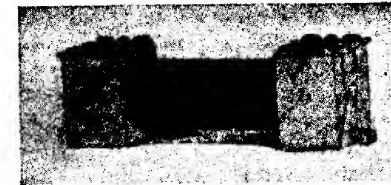


FIG. 3. Bobina de inducción para batería local

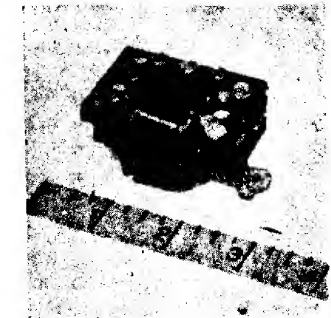


FIG. 4. Bobina de inducción moderna para evitar la autopercepción para batería local con circuito magnético cerrado. Las divisiones de la regla son pulgadas

das. Más recientemente, se han construido bobinas de inducción con circuito magné-
tico cerrado, hecho de láminas de acero al silicio, para evitar el acoplo con sistemas
adyacentes y permitiendo así colocar juntas las cajas de timbres. En la figura 4 puede
verse una de dichas bobinas.

En el circuito de la figura 2 puede verse que si el sistema de la izquierda del
esquema tiene que transmitir la palabra, el receptor local absorbe parte de la salida
de la bobina de inducción. Al hecho de que el locutor escuche su propia voz recibe
el nombre de autopercepción. Cuando ésta tiene mayor volumen que la señal reci-
bida, el locutor es menos sensible, temporalmente, a la señal que le interesa recibir,
con lo que se reduce el rendimiento efectivo del circuito. Para evitar esta dificultad
se han desarrollado sistemas antiautopercepción que reducen la escucha propia.

El primer sistema telefónico antiautopercepción de uso común se desarrolló
para telefonistas operadoras de los cuadros de conmutación. El circuito es el de la

figura 5. Utiliza dos bobinas de inducción con primarios iguales P_1 y P_2 conectados en paralelo. Los secundarios S_1 y S_2 están conectados en serie y tienen el mismo número de espiras, si bien S_2 se ha devanado con un hilo menor, con lo que su resistencia es unos 350 ohm más elevada que la de S_1 . Los secundarios, receptor y línea

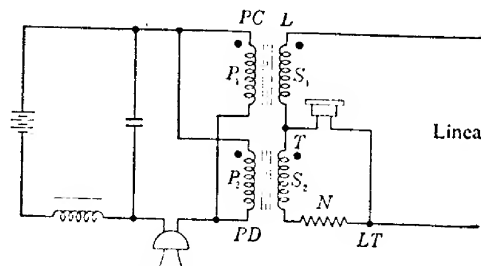


Fig. 5. Sistema telefónico antiautopercepción para telefonista

están montados en puente, según se indica en la figura 5 en la que el incremento de 350 ohm de S_2 está representado por una red aparte N , que equilibra aproximadamente la impedancia de la línea telefónica media. Cuando el usuario habla ante el transmisor, P_1 y P_2 inducen en S_1 y S_2 tensiones iguales. Si la red N equilibra exactamente a la línea, en estas condiciones de transmisión no circula corriente alguna por el receptor. En la condición normal de equilibrio aproximado, la corriente que circula por el receptor, o autopercepción, es pequeña.

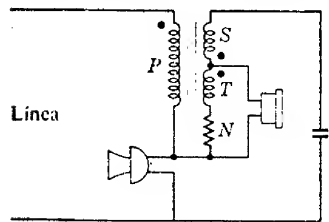


Fig. 6. Circuito de la bobina de inducción antiautopercepción para batería común

El sistema de batería común para abonados se hace antiautopercepción por medio de un tercer devanado colocado en la bobina de inducción como se indica en la figura 6. El tercer devanado y red están proporcionados de tal manera que cuando el sistema transmite, la caída de tensión en el receptor es pequeña¹.

2. BOBINA REPETIDORA

La siguiente forma de transformador telefónico que pasó a ser de uso fue la bobina repetidora, patentada en 1892. Las primeras bobinas repetidoras estaban constituidas por cuatro devanados iguales montados sobre un núcleo para asegurar un acoplo fuerte. Estas bobinas servían para transmitir energía desde una batería

¹ Para una explicación del funcionamiento de este circuito, véase C. O. GIBBON, «An Explanation of the Common Battery Anti-sidetone Subscriber Set», *B. S. T. J.*, 17 (abril, 1938), 245-257.

común de una central telefónica a las líneas, empleándose dicha energía para las señales de llamada y luego para la conversación.

El método de conexión es el de la figura 7. La corriente continua circula por cada espira para excitar los transmisores y proporcionar corriente de señalización para el funcionamiento de los relés supervisores (no indicados en el dibujo). La corriente alterna de uno y otro transmisor pasa a la otra malla a través de la bobina repe-

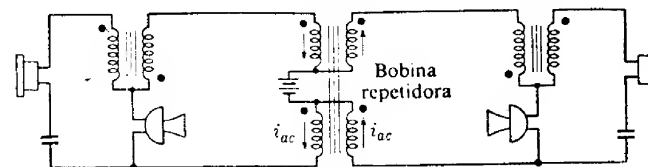


Fig. 7. Bobina repetidora que suministra corriente de la batería a dos mallas interconectadas de dos abonados

tidora. Como las bobinas tienen igual número de espiras en primario que en secundario, las corrientes alternas que circulan por primario y secundario señaladas con flechas en la figura 7 tienen intensidades casi iguales, y la única corriente alterna que puede circular por la batería es la débil corriente de excitación de la bobina repetidora. La caída de tensión alterna en la batería es la caída óhmica en ella debida a la corriente de excitación y es, por tanto, muy pequeña. En consecuencia, podrá conectarse a través de bobinas repetidoras un número cualquiera de circuitos alimentados por la misma batería sin que se interfieran las partes comunicantes.

Las bobinas repetidoras primitivas se construían como las bobinas de inducción primitivas. Sin embargo, se les dio un nombre diferente porque servían para transferir o repetir de una malla a otra la energía de la palabra en forma de corriente alterna. Las bobinas repetidoras actuales suelen estar devanadas sobre núcleos toroidales de material magnético.

Cuando se conectan líneas de características diferentes, para adaptar impedancias se utilizan bobinas repetidoras de razón de transformación distinta de la unidad. Muchas líneas tienen impedancias características del orden de 600 ohm. Muchas líneas cargadas tienen impedancias más elevadas. Es corriente utilizar bobinas repetidoras para reducir las impedancias de todos los circuitos que llegan a una central cualquiera a un nivel común, por ejemplo de 600 ohm. Hecho esto, todos los circuitos que terminan en la central se podrán interconectar sin efectos de reflexión.

Otra utilización muy importante de la bobina repetidora es proporcionar un circuito fantasma o superpuesto a dos circuitos existentes. Si están conectados dos puntos distantes por dos circuitos telefónicos, colocando bobinas repetidoras iguales en cada terminal de cada lado del circuito, como se indica en la figura 8, puede proporcionarse un tercer circuito o circuito fantasma. Estas bobinas repetidoras suelen ser de razón unidad. Los lados de las bobinas de la parte de la línea están constituidos por dos devanados iguales cuidadosamente interdevanados de manera que el punto de interconexión sea exactamente el punto medio. La corriente procedente del hilo superior del circuito fantasma llega al punto medio y se divide por igual entre los dos devanados y los dos hilos del circuito de la parte superior (si las resis-

tencias, inductancias y capacidades son iguales). Por ello, dicha corriente no crea flujo alguno en el núcleo ni acoplo con el circuito de esta parte. Las mismas condiciones existen en los otros tres transformadores y en consecuencia no hay interferencia entre el circuito fantasma y los circuitos laterales.

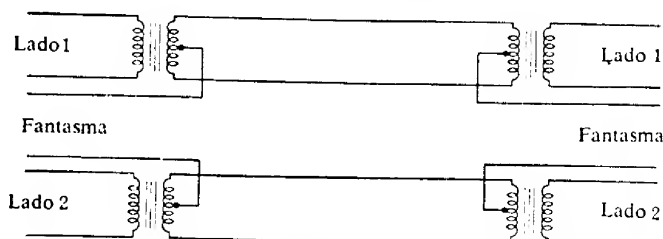


Fig. 8. Uso de bobinas de repetición para formar un circuito fantasma

Las bobinas repetidoras utilizadas para formar un circuito fantasma deben tener en sus núcleos suficiente material magnético para dejar pasar la corriente usual de 20 Hz para los timbres. Frecuentemente se practica un entrehierro en el núcleo, con lo que éste se desmagna fácilmente una vez ha pasado la corriente continua por los devanados.

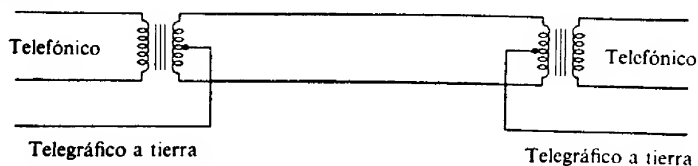


Fig. 9. Uso de bobinas repetidoras para formar un circuito simplex

Otra aplicación de la bobina repetidora es para formar lo que se llama un circuito simplex. En los dos extremos de un circuito telefónico se colocan bobinas repetidoras, tal como se indica en la figura 9. En tal caso, la toma central de la bobina repetidora sirve para hacer posible la utilización de los dos hilos de la línea telefónica en paralelo, para línea de un circuito telegráfico de retorno por tierra. Este, claro está, puede utilizarse para cualquier otro gobierno por frecuencia audible.

Las bobinas repetidoras con devanados bien aislados se utilizan frecuentemente para conectar sistemas telefónicos a una línea telefónica que se halle en paralelo con una línea de potencia a alta tensión, para reducir el riesgo de sacudidas a los operarios de la central y a los demás usuarios de dichos teléfonos.

3. BOBINA HÍBRIDA O TRANSFORMADOR DE TRES DEVANADOS

Cuando se hace tan largo un circuito telefónico que para una transmisión satisfactoria de la palabra se precisan amplificadores de válvulas de vacío, en el repetidor deberán proporcionarse ciertos medios para que cada amplificador funcione en la dirección de transmisión adecuada. Una manera corriente de introducir los dos ampli-

ficadores en una línea de dos hilos consiste en emplear dos bobinas híbridas o transformadores de tres devanados, y dos redes equilibradoras.

En la figura 10 puede verse un repetidor de dos hilos con dos amplificadores, dos bobinas híbridas y dos redes equilibradoras. Cada bobina híbrida consiste en tres devanados arrollados sobre un núcleo común. Los devanados 3-4 y 7-8 son iguales, con tomas centrales 3T y 8T situadas con precisión. La red equilibradora está diseñada para tener una característica impedancia-frecuencia lo más igual posible a

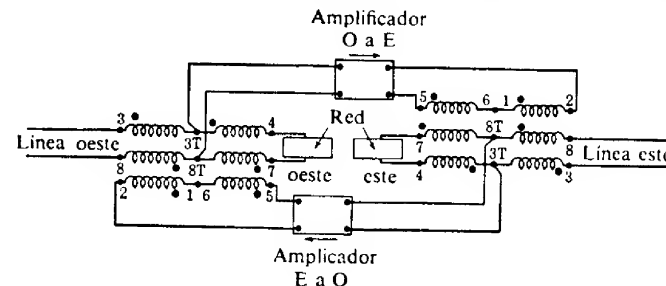


Fig. 10. Repetidor de dos hilos que emplea dos amplificadores, dos bobinas híbridas y dos redes equilibradoras

la de la línea que sea económicamente factible. La salida del amplificador E a O trabaja sobre el devanado 2-5, cuya impedancia está adaptada a la impedancia de salida de la válvula amplificadora. Si la red equilibra a la línea perfectamente, la mitad de la salida del amplificador se disipa en la red y se pierde, mientras la otra mitad se envía a la línea hacia el oeste. Entre los puntos del puente 3T-8T no existe diferencia de tensión alguna. Por tanto, al amplificador O a E no va nada de la salida del amplificador E a O. Si la red de la derecha equilibra la línea este, al amplificador E a O no irá nada de la salida del amplificador O a E. Si no fuera perfecto el equilibrio entre la línea y la red, parte de la salida del amplificador E a O irá a la entrada del amplificador O a E. La misma condición puede existir en el terminal este. La suma de las dos ampliaciones, expresada en decibel, no debe ser igual a la suma de las pérdidas desde los devanados serie 2-5 hasta los puntos del puente 3T-8T, pues se originaría oscilación y el circuito se haría inoperante.

La entrada a la bobina híbrida desde la línea oeste se divide entre la entrada al amplificador O a E y la salida del amplificador E a O. La primera se amplifica y pasa a la línea este y red este, mientras la última se disipa. Si la impedancia entre 3T-8T es la mitad de las de la línea y red, no habrá tensión en la red.

Conexiones trifásicas; consideraciones generales

Casi toda la energía eléctrica se genera en generadores trifásicos y se transmite por líneas de transmisión trifásicas. Como a menudo es necesario elevar y reducir la tensión varias veces entre los generadores y las cargas, en los sistemas trifásicos se utilizan muchísimos transformadores. Las transformaciones pueden realizarse mediante bancos de transformadores monofásicos adecuadamente conectados, o mediante transformadores trifásicos en los que se enlazan entre sí los circuitos magnéticos de las tres fases. Los transformadores trifásicos, algunas de cuyas características pueden ser diferentes de las de un banco de transformadores monofásicos conectados análogamente, se estudian en detalle en el capítulo XVI.

Aun cuando casi toda la transmisión de potencia eléctrica se realiza por medio de sistemas trifásicos, aproximadamente la mitad de la energía se utiliza eventualmente en forma de potencia monofásica para fines domésticos o de poca potencia. Las cargas monofásicas se alimentan desde los secundarios de baja tensión de transformadores de distribución cuyos primarios se conectan al sistema trifásico de transmisión, distribuyéndose las cargas monofásicas entre las fases del sistema trifásico de manera que resulte una carga trifásica aproximadamente equilibrada.

El análisis detallado de las conexiones de transformadores trifásicos responderá a preguntas como estas: ¿Cuáles son las relaciones entre las intensidades y las tensiones en los transformadores y las existentes en los circuitos trifásicos? ¿Cuáles deben ser los valores nominales de los transformadores para alimentar a una carga dada? ¿Puede utilizarse el banco para alimentar simultáneamente cargas monofásicas y trifásicas? ¿Cuáles son los efectos de desigualdades en las impedancias equivalentes, características de excitación, o razones de números de espiras? ¿Cuáles son los efectos de los armónicos sobre las corrientes de excitación? ¿Cómo afectan las impedancias equivalentes al sistema de tensiones en condiciones normales? ¿Cómo influyen las conexiones, impedancias y métodos de puesta a tierra del transformador sobre las tensiones y corrientes durante los fallos?

Estas y otras cuestiones pueden responderse analíticamente partiendo de la teoría para un transformador único junto con las relaciones existentes entre corrientes y tensiones en los circuitos trifásicos. En su forma completa, la teoría para un transformador debe tener en cuenta impedancias de fuga, corrientes de excitación, no linealidad magnética y, a veces, capacidades distribuidas de los devanados. Afortunadamente, rara vez es necesario tener que considerar simultáneamente en detalle todos esos factores. Muchas de las características importantes de las diversas conexiones se pueden deducir fácilmente de un análisis simplificado de un cierto número de conexiones trifásicas comunes de los transformadores monofásicos, junto con un estudio cualitativo de algunos de los efectos de las impedancias de fuga y de las corrientes de excitación en los transformadores reales. En los capítulos siguientes se realizarán análisis detallados de los fenómenos debidos a las impedancias y a la excitación.

Para ser empleados en circuitos trifásicos, los transformadores pueden conectarse según diversas disposiciones, unas simétricas y otras asimétricas. Si la conexión es simétrica, cada fase del primario es igual que las otras dos, y lo mismo ocurre con las fases del secundario. Por ejemplo, si se conectan tres transformadores iguales con sus primarios en triángulo o en estrella y también en triángulo o en estrella sus

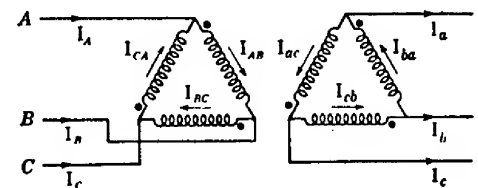


FIG. 1. Conexión triángulo-triángulo

secundarios, la disposición es simétrica. Existen cuatro de dichas conexiones simétricas de transformadores de dos devanados, cuales son:

- 1) Triángulo-triángulo
- 2) Estrella-estrella
- 3) Triángulo-estrella
- 4) Estrella-triángulo.

Ejemplo importante de disposición asimétrica es la conexión en V o triángulo abierto que emplea sólo dos transformadores. Como las conexiones simétricas no sólo son las más sencillas de analizar sino también las más frecuentemente empleadas, las estudiaremos primero.

1. CONEXIÓN TRIÁNGULO-TRIÁNGULO

La disposición triángulo-triángulo puede emplearse cuando no se precise conexión trifásica con neutro ni en primario ni en secundario. Por las razones que se verán a continuación, la conexión triángulo encuentra sus principales aplicaciones en los circuitos de tensión moderada o baja, o cuando la corriente es muy intensa. En la figura 1 puede verse el esquema elemental de conexión. Los devanados primario y secundario de un mismo transformador están dibujados paralelos. En los dos lados primario y secundario, se unen los terminales de polaridad opuesta para formar un triángulo. El esquema de conexiones puede dibujarse también en la forma indicada en la figura 2, en la que puede verse un banco de transformadores de distribución conectados en triángulo-triángulo, protegidos por fusibles y pararrayos en los lados de los primarios. El tipo de los fusibles y pararrayos depende de la intensidad de la corriente y de la tensión; de la exposición a los rayos de la línea de alta tensión; de la situación de la instalación sobre un poste, el suelo o en un túnel; y de la experiencia y preferencia de la compañía. Cuando los transformadores tienen dos devanados de 120 V en sus lados de baja tensión, a uno de los transformadores podrá conectarse un circuito monofásico de tres hilos y 120/240 V para alumbrado, mientras el banco suministra simultáneamente potencia trifásica a 240 V. La salida

monofásica desequilibra la carga del banco, por lo que, si esta salida constituye una parte apreciable de la carga total, en la fase que la suministra deberá emplearse un transformador mayor.

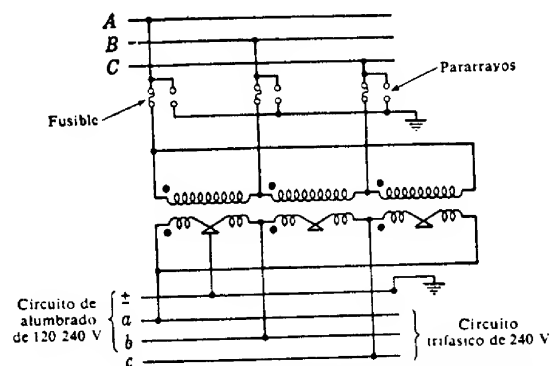


Fig. 2. Conexión triángulo-triángulo de transformadores de distribución para salidas simultáneas trifásicas de 240 V y monofásica de 120/240 V

Para tener un funcionamiento satisfactorio en una conexión triángulo-triángulo, los transformadores deben tener razones iguales de los números de espiras; de otro modo existiría a través de los transformadores una corriente circulante incluso cuando el banco no tuviera que alimentar a ninguna carga *. En el caso de una carga trifásica equilibrada, los transformadores deberán tener también impedancias equivalentes iguales si deben repartirse la carga por igual. Si no fueran iguales las impedancias equivalentes, el transformador de menor impedancia equivalente sería asiento de la corriente más intensa, comportándose en este aspecto el banco en forma parecida a como lo hacen las impedancias en paralelo. En el apartado 1b del capítulo XXIV se aplicará el estudio de esta importante propiedad de la conexión triángulo-triángulo. Por el momento basta observar que entre cada par de terminales de línea de un banco triángulo-triángulo existen caminos en paralelo y que las corrientes se dividen entre ellos de una manera determinada por las impedancias. Así, si a una carga equilibrada le suministran potencia tres transformadores de igual potencia nominal conectados en triángulo-triángulo pero cuyas impedancias equivalentes son diferentes, el banco no podrá suministrar su potencia aparente nominal correspondiente a plena carga sin que el transformador de menor impedancia equivalente quede sobrecargado. Por ello suelen utilizarse tres transformadores exactamente iguales cuando la carga es una carga equilibrada. Esta es la condición más sencilla a analizar.

1a. *Relaciones de tensiones y corrientes en circuitos triángulo equilibrados.* Cuando los transformadores son exactamente iguales y el circuito está equilibrado, no hay nada que distinga una fase de otra salvo el desfase de 120° entre las corrientes y tensiones de una fase y las de otra. Así, las corrientes y tensiones de fase pueden determinarse analizando una fase cualquiera. Cada transformador alimenta a un

* Para un estudio más detallado de las corrientes circulantes véase el apartado 1a del capítulo XXIV.

tercio de la carga trifásica. Las tensiones en terminales de primario y secundario de los transformadores son iguales a las tensiones trifásicas de línea correspondientes y por tanto, si prescindimos de la diferencia introducida por las caídas de tensión debidas a las impedancias de fuga, el cociente entre las tensiones de línea de primario y secundario es igual al cociente entre los números de espiras de los transformadores.

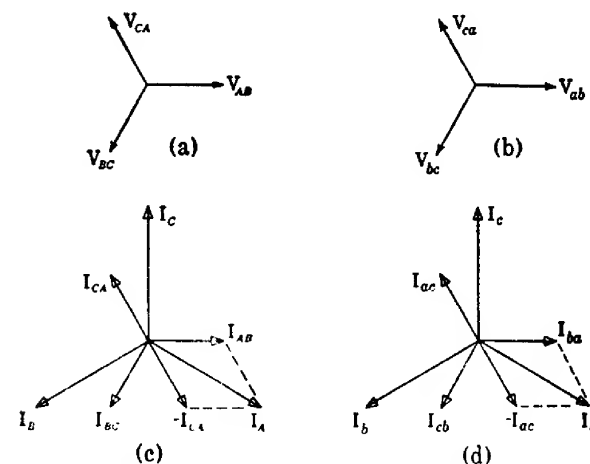


Fig. 3. Diagramas vectoriales aproximados para un banco triángulo-triángulo en condiciones de equilibrio

En las figuras 3a y 3b pueden verse vectorialmente estas relaciones para el orden ABC de las fases, suponiendo que las tensiones varían sinusoidalmente y que los vectores representan caídas de tensión en los sentidos indicados por el orden de los subíndices. Por ejemplo, V_{AB} es el vector que representa la caída de potencial de la línea A a la línea B . Los subíndices en mayúscula indican las fases primarias y los en minúscula las de secundarios. Cuando se realizan las conexiones como en la figura 1 y se definen como antes los sentidos positivos de las tensiones en terminales, las tensiones en un primario y un secundario correspondientes están casi en fase cuando son pequeñas las caídas de tensión en las impedancias de fuga.

En la figura 3c se supone que las intensidades de las corrientes de los primarios varían sinusoidalmente con el tiempo y los vectores I_{AB} , I_{BC} , I_{CA} representan las intensidades de las corrientes que circulan por los primarios en los sentidos indicados por el orden de los subíndices. Si el factor de potencia es la unidad, estas corrientes de los primarios están en concordancia de fase con las tensiones de primario correspondientes, como se indica en las figuras 3a y 3c. Las corrientes que circulan por los transformadores están relacionadas con las de las líneas de igual manera que lo están las corrientes que circulan por cualquier triángulo equilibrado con las de las líneas; es decir, vectorialmente,

$$I_A = I_{AB} - I_{CA} \quad (1)$$

$$I_B = I_{BC} - I_{AB} \quad (2)$$

$$I_C = I_{CA} - I_{BC}, \quad (3)$$

donde I_A , I_B , I_C son los vectores que representan las corrientes de las líneas que van a los primarios, cuyos sentidos positivos son los indicados por las flechas en la figura 1. La ecuación (1) está representada vectorialmente por los vectores I_{AB} , $-I_{CA}$ y su suma I_A en la figura 3c. Cuando estén equilibradas las corrientes y el orden de las fases es ABC , I_{AB} e I_{CA} tiene igual módulo e I_{AB} está retrasada respecto a I_{CA} en 120° , de donde,

$$I_A = \sqrt{3} I_{AB} / -30^\circ. \quad \blacktriangleright(4)$$

► Así, cuando las corrientes están equilibradas y varían sinusoidalmente, la intensidad eficaz de las corrientes que circulan por la línea es igual al producto de $\sqrt{3}$ por la intensidad eficaz de las corrientes que circulan por los devanados conectados en triángulo de los transformadores. Además existe un defasaje * entre las corrientes de línea y las corrientes en el triángulo. ◀

Cuando se desprecian las corrientes de excitación, las corrientes de primario y secundario crean fuerzas magnetomotrices iguales y opuestas, y por tanto las intensidades de las corrientes de primario y secundario tienen intensidades inversamente proporcionales a los números de espiras de los devanados y están en concordancia de fase cuando sus sentidos positivos se toman en los sentidos de las corrientes que crearían fuerzas magnetomotrices opuestas, como se indica en la figura 1 por los sentidos de las flechas. Estas corrientes en los secundarios I_{ba} , I_{cb} , I_{ac} están representadas vectorialmente en la figura 3d, en fase con las corrientes en los primarios correspondientes de la figura 3c. Las ecuaciones vectoriales que relacionan las corrientes en las líneas de los secundarios con las corrientes en los secundarios de los transformadores conectados en triángulo son:

$$I_a = I_{ba} - I_{ac} \quad (5)$$

$$I_b = I_{cb} - I_{ba} \quad (6)$$

$$I_c = I_{ac} - I_{cb}, \quad (7)$$

donde I_a , I_b , I_c son los vectores que representan a las corrientes en las líneas de los secundarios en los sentidos señalados por las flechas de la figura 1. Cuando las corrientes están equilibradas y el orden de las fases es abc ,

$$I_a = \sqrt{3} I_{ba} / -30^\circ, \quad \blacktriangleright(8)$$

según se indica vectorialmente en la figura 3d. Esta relación es análoga a la ecuación (4) para las corrientes de los lados de los primarios.

1b. *Resumen; conexión triángulo.* Los factores importantes referentes a la conexión triángulo pueden resumirse de la manera siguiente:

* Téngase en cuenta que el ángulo del factor de potencia es el ángulo de defasaje entre la corriente de fase y la tensión de fase. En la conexión triángulo, la tensión de una fase cualquiera es la tensión correspondiente entre línea y línea, pero las corrientes que circulan por el triángulo no están en fase con las corrientes de la línea, y por tanto el ángulo del factor de potencia no es igual al ángulo de defasaje entre una corriente de línea y la correspondiente tensión entre línea y línea.

Cuando se conectan en triángulo los devanados del transformador, las tensiones trifásicas entre línea y línea son iguales a las tensiones entre terminales de los transformadores correspondientes.

En la conexión triángulo-triángulo, las tensiones de línea correspondientes de primario y secundario se hallan casi en concordancia de fase.

Cuando el circuito está equilibrado y los transformadores son exactamente iguales, cada transformador de un banco de transformadores montados en triángulo-triángulo alimenta a una tercera parte de la carga trifásica y las intensidades eficaces de las corrientes que circulan por los devanados conectados en triángulo son iguales al producto de $1/\sqrt{3}$ por las intensidades eficaces de las corrientes de línea.

Por existir caminos derivados entre cada par de terminales de línea tanto en el lado de primario como en el de secundario, la distribución de la corriente entre los transformadores de un banco triángulo-triángulo depende de sus impedancias equivalentes, comportándose en este aspecto el banco en forma análoga a como lo hacen las impedancias en paralelo *. Así pues, aun cuando estén equilibradas las corrientes de línea, cada uno de los transformadores del banco triángulo-triángulo se halla cargado de manera distinta que los demás a menos que sean iguales sus impedancias equivalentes.

Si las razones de números de espiras de los tres transformadores de un banco triángulo-triángulo fueran desiguales, existirían corrientes circulantes por el interior del banco **, por lo que los transformadores deben tener razones iguales de sus números de espiras.

2. CONEXIÓN ESTRELLA-ESTRELLA

Se dice que los devanados de un transformador están conectados en estrella cuando se unen tres terminales de igual polaridad para formar el punto neutro de la estrella, en la forma indicada en la figura 4, en la cual N y n son los puntos neutros de primario y secundario, siendo A , B , C y a , b , c los terminales de la línea en primario y secundario respectivamente. El esquema de conexión puede dibujarse también en la forma de la figura 5, en la cual se dibujan paralelos los devanados primario y secundario de un mismo transformador. Los puntos neutros se ponen a menudo a tierra, como se indica en la figura 5.

Aun cuando las características de un banco estrella-estrella de transformadores monofásicos pueden verse marcadamente influidas por el comportamiento peculiar de los armónicos de la corriente de excitación, que en determinadas circunstancias pueden ocasionar condiciones nocivas e incluso peligrosas, ello no obsta para que puedan determinarse algunas propiedades importantes de la conexión estrella-estrella mediante un análisis sencillo en el que se desprecian los armónicos de las corrientes de excitación ***.

* Véase el apartado 1b del capítulo XXIV.

** Véase el apartado 1a del capítulo XXIV.

*** Los fenómenos de los armónicos se estudian en el capítulo XXIII.

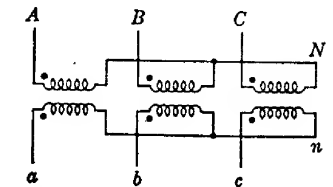


FIG. 4. Conexión estrella-estrella

2a. *Neutro de los primarios conectado al neutro del generador.* El ejemplo más sencillo es el del banco estrella-estrella de transformadores conectados a los terminales de un generador conectado en estrella, con el punto neutro N de los primarios conectado al neutro del generador, como se indica en la figura 5. Para los fines de

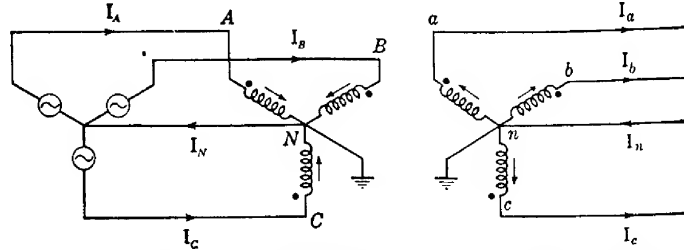


FIG. 5. Banco estrella-estrella de transformadores con el neutro primario conectado al neutro del generador

este estudio, pueden despreciarse las impedancias de los cuatro hilos que conectan los transformadores al generador. En estas condiciones, las tensiones en los primarios de los transformadores son las tensiones entre línea y neutro del generador. Si varían sinusoidalmente estas tensiones, podrán representarse por vectores V_{AN} , V_{BN} y V_{CN} . Como en todo circuito conectado en estrella, las relaciones vectoriales entre estas tensiones de línea a neutro y las tensiones de línea a línea V_{AB} , V_{BC} y V_{CA} son:

$$V_{AB} = V_{AN} + V_{NB} = V_{AN} - V_{BN} \quad (9)$$

$$V_{BC} = V_{BN} - V_{CN} \quad (10)$$

$$V_{CA} = V_{CN} - V_{AN} \quad (11)$$

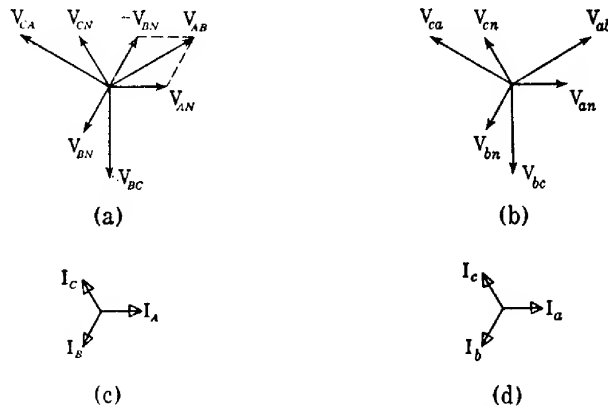


FIG. 6. Diagramas vectoriales aproximados para un banco estrella-estrella en condiciones de equilibrio

Si están equilibradas las tensiones sinusoidales respecto al neutro y es ABC el orden de las fases, el diagrama vectorial de las tensiones de primario es el indicado en la figura 6a, y la ecuación (9) se reduce a

$$V_{AB} = \sqrt{3} V_{AN} / 30^\circ. \quad \blacktriangleright (12)$$

Las otras tensiones entre línea y línea vienen dadas por expresiones análogas y también se hallan representadas vectorialmente en la figura 6a.

► Así, cuando están equilibradas las tensiones entre línea y neutro y varían sinusoidalmente con el tiempo, el valor eficaz de las tensiones entre línea y línea es $\sqrt{3}$ veces mayor que el valor eficaz de las tensiones entre línea y neutro. Debe observarse también que existe un desfase de 30° entre las tensiones de línea a neutro y de línea a línea menos defasadas. ◀

Si se desprecian las caídas de tensión en las impedancias de fuga, las tensiones de los secundarios respecto al neutro son iguales a las tensiones de los primarios correspondientes respecto al neutro divididas por la razón a del número de espiras del primario al de espiras del secundario y las tensiones de los primarios y secundarios correspondientes están en fase cuando se realizan las conexiones en la forma indicada en la figura 5. Los vectores V_{an} , V_{bn} y V_{cn} , que representan las tensiones de los secundarios respecto al neutro, son los de la figura 6b. Las tensiones entre línea y línea de los secundarios V_{ab} , V_{bc} y V_{ca} son:

$$V_{ab} = V_{an} - V_{bn} \quad (13)$$

$$V_{bc} = V_{bn} - V_{cn} \quad (14)$$

$$V_{ca} = V_{cn} - V_{an} \quad (15)$$

y cuando están equilibradas las tensiones de los secundarios respecto al neutro, siendo de forma de onda sinusoidal todas ellas y siendo abc el orden de las fases, la ecuación (13) se reduce a

$$V_{ab} = \sqrt{3} V_{an} / 30^\circ. \quad \blacktriangleright (16)$$

Las tensiones entre línea y línea de los secundarios están representadas vectorialmente en la figura 6b. Obsérvese que, prescindiendo de las pequeñas caídas de tensión en la impedancia de fuga, las tensiones entre línea y línea correspondientes de primario y secundario están en concordancia de fase cuando se realizan las conexiones como en la figura 5.

Tanto en el lado de los primarios como en el de los secundarios, las corrientes que circulan por los transformadores son iguales a la corriente en las líneas correspondientes. Si está equilibrado el circuito, las corrientes de los secundarios entregadas a la carga son de igual intensidad y están defasadas en 120° , y si el factor de potencia es igual a la unidad, la corriente de los secundarios están en fase con las tensiones

de los secundarios correspondientes respecto al neutro *, como indican los vectores I_a , I_b e I_c de la figura 6d. En condiciones de equilibrio, la suma vectorial de las intensidades de línea de los secundarios es nula y por tanto no circula corriente alguna por el hilo neutro de los secundarios, el cual podrá suprimirse sin que se produzca ningún cambio en el funcionamiento del banco en condiciones de equilibrio.

Si se desprecian las corrientes de excitación, las corrientes de primario y secundario tienen intensidades inversamente proporcionales a los números de espiras de los devanados correspondientes y dichas corrientes están en concordancia de fase cuando se toma como sentidos positivos de las mismas los de las corrientes que crearían fuerzas magnetomotrices opuestas como en la figura 5. En la figura 6c puede verse el diagrama vectorial de las corrientes de primario. Si se prescinde de las corrientes de excitación, la suma vectorial de las corrientes de los primarios equilibrados es nula y por tanto lo es la intensidad de la corriente que circula por el hilo neutro del primario. No obstante, no debe sacarse la conclusión de que puede suprimirse el hilo neutro de los primarios, ya que la conexión del neutro de los primarios ejerce efectos importantes sobre las corrientes de excitación y sobre el comportamiento del banco con ciertos tipos de cargas desequilibradas, según se indica en la sección b) de este apartado.

Cuando se conecta el neutro de los primarios al neutro del generador, como en la figura 5, cada transformador recibe su potencia de una de las fases del generador y por tanto, cada transformador puede cargarse independientemente. Si la tensión de secundario de los transformadores es de 120 V, pueden conectarse cargas monofásicas de alumbrado entre cada uno de los hilos a , b o c y el hilo neutro n , mientras pueden hacerse funcionar cargas de motores trifásicos desde los tres hilos de fase a una tensión entre línea y línea de $120\sqrt{3}$, ó sea, 208 V **. Los motores trifásicos para 220 V suelen poder funcionar a esta tensión reducida sin que queden afectadas gravemente sus características ***.

Como la suma de las corrientes de línea suministradas a las cargas debe ser igual a la corriente de retorno a los transformadores que circula por el hilo neutro de los secundarios, el vector I_n que representa a la intensidad de la corriente que circula por el hilo neutro de los secundarios en el sentido de la flecha de la figura 5 es:

$$I_n = I_a + I_b + I_c. \quad (17)$$

Análogamente, el vector I_N representativo de la corriente que circula por el hilo de los primarios en el sentido de la flecha es:

$$I_N = I_A + I_B + I_C. \quad (18)$$

* Aunque en la conexión estrella las corrientes de fase sean iguales a las correspondientes corrientes de línea, las tensiones respecto al neutro de la estrella no están en fase con las tensiones entre línea y línea y por tanto el ángulo del factor de potencia no es igual al de desfase entre una corriente de línea y la tensión correspondiente entre línea y línea. Vuélvase a leer la nota de pie de página 506 correspondiente al montaje en triángulo.

** Este sistema de distribución trifásico de 4 hilos también puede alimentarse mediante transformadores cuyos primarios se conecten en triángulo. Véase el apartado 4.

*** Algunos fabricantes suministran motores de inducción trifásicos de poca potencia, con devanados que pueden conectarse para funcionar a tensiones de circuito de 220, 208 ó 199 V. ($199 = 115\sqrt{3}$).

Prescindiendo de las caídas de tensión ocasionadas por las impedancias de la línea y del transformador, las tensiones en las cargas estarán equilibradas si lo están las tensiones respecto al neutro del generador y si se conecta el neutro de los primarios al del generador.

2b. *Neutro primario aislado.* Surge, en cambio, una situación totalmente diferente cuando el neutro de los primarios está aislado del neutro del generador. En estas condiciones, la suma instantánea de las intensidades de las corrientes suministradas a los primarios del banco debe ser nula, o sea,

$$i_A + i_B + i_C = 0, \quad \blacktriangleright(19)$$

donde i_A , i_B , i_C son las intensidades instantáneas de las corrientes que circulan por los primarios en los sentidos de las flechas de la figura 7a. Es decir, la corriente suministrada a un transformador cualquiera debe hallar su camino de retorno al generador a través de los primarios de los demás transformadores. Esta restricción de las corrientes de los primarios tiene un efecto importante sobre el comportamiento del banco con cargas monofásicas al neutro.

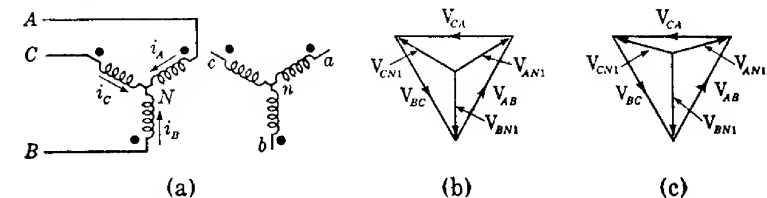


FIG. 7. Conexiones y diagramas vectoriales de las tensiones para un banco estrella-estrella de transformadores monofásicos con neutros aislados

Consideremos el banco estrella-estrella de la figura 7a, con las líneas de los secundarios en circuito abierto y los neutros aislados. En estas condiciones, las corrientes que circulan por los primarios son las corrientes de excitación. Si las tensiones entre línea y línea aplicadas a los terminales de los primarios están equilibradas y tienen formas de ondas sinusoidales, podrán representarse por los vectores V_{AB} , V_{BC} y V_{CA} de la figura 7b, que constituyen los tres lados de un triángulo equilátero. Este resultado se deduce del hecho de que en todo sistema trifásico la suma vectorial de las tensiones entre línea y línea, tomadas en orden cíclico debe ser nula. Así, en el lado de los primarios,

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CA} = 0. \quad \blacktriangleright(20)$$

Análogamente, en el lado de los secundarios,

$$V_{ab} + V_{bc} + V_{ca} = 0. \quad \blacktriangleright(21)$$

Estas ecuaciones demuestran que los vectores representativos de las tensiones entre línea y línea pueden siempre dibujarse como lados de un triángulo. Si las tensiones de línea están equilibradas, el triángulo de tensiones es equilátero, según puede verse en la figura 7b.

Si los transformadores tuvieran características de excitación iguales, las corrientes de excitación y las tensiones respecto al neutro también estarían equilibradas. Aun cuando (según se demuestra en el apartado 2d del capítulo XXIII) las formas de las ondas de las tensiones respecto al neutro pueden diferir mucho de la forma sinusoidal, los conceptos fundamentales de estas tensiones pueden representarse por los vectores V_{AN1} , V_{BN1} y V_{CN1} que unen los vértices con el baricentro del triángulo de tensiones de línea, como se indica en la figura 7b.

Cuando el neutro de los primarios está aislado del neutro del generador, las tensiones respecto al neutro pueden estar desequilibradas no sólo por las desigualdades de las características de excitación, sino también por la conexión de cargas desequilibradas entre línea y neutro del lado de los secundarios. El caso más simple a considerar es el de una carga monofásica conectada de una línea de secundario al neutro de los secundarios. Observemos en la figura 8 que, como los secundarios de los transformadores A y B están en circuito abierto, las únicas corrientes que pueden circular por los primarios son sus corrientes de excitación $i_{\varphi A}$ e $i_{\varphi B}$. Como el neutro de los primarios está aislado, la suma instantánea de las intensidades de las corrientes dirigidas hacia el neutro de los primarios debe ser nula, o sea,

$$i_{\varphi A} + i_{\varphi B} + i_C = 0; \quad (22)$$

de donde,

$$i_C = -i_{\varphi A} - i_{\varphi B}, \quad (23)$$

donde i_C es la intensidad instantánea de la corriente que circula por el primario del transformador cargado. Así pues, la intensidad de la corriente que puede circular por el primario del transformador cargado queda limitada por las corrientes de excitación de los otros dos. Cualquier corriente de carga que circule por el transformador C perturba las corrientes de excitación de los transformadores A y B y, en consecuencia, se alteran grandemente las tensiones respecto al neutro. Así, si se

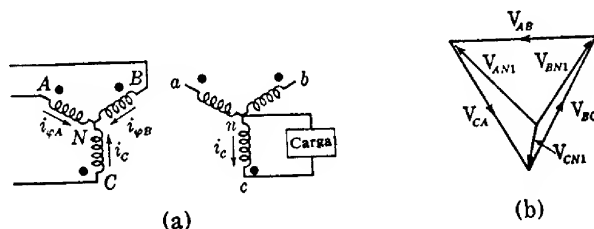


FIG. 8. Conexiones y diagrama vectorial de una carga monofásica alimentada por un banco estrella-estrella con neutro de primarios aislado

quiere cargar el transformador C con una carga resistiva o inductiva, su corriente de primario deberá aumentar y obligar a que se intensifiquen las corrientes de excitación de los transformadores A y B . Por tanto, los transformadores A y B presentan tensiones más elevadas que las que les corresponden y la tensión del transformador C puede reducirse mucho al querer cargarlo, según puede verse en el diagrama

vectorial de la figura 8b*. Una carga a neutro capacitiva aplicada a uno de los transformadores puede invertir en realidad la fase de la tensión respecto al neutro del transformador cargado y crear en los dos transformadores no cargados tensiones mayores que las existentes entre línea y línea.

2c. *Resumen; conexión estrella.* Los hechos importantes referentes a la conexión en estrella pueden resumirse de la manera siguiente:

Las corrientes en los devanados en estrella son iguales a las corrientes en la línea.

Si las tensiones entre línea y neutro están equilibradas y son sinusoidales, el valor eficaz de las tensiones respecto al neutro es igual al producto de $1/\sqrt{3}$ por el valor eficaz de las tensiones entre línea y línea y existe un desfase de 30° entre las tensiones de línea a línea y de línea a neutro más próxima.

Las tensiones entre línea y línea de los primarios y secundarios correspondientes en un banco estrella-estrella conectado como en la figura 5, están casi en concordancia de fase.

Si se conecta el neutro de los primarios al neutro del generador, podrá cargarse cada transformador independientemente y por tanto podrá utilizarse un banco estrella-estrella para alimentar cargas monofásicas conectadas entre un hilo de fase cualquiera y el neutro de los secundarios. El inconveniente de este montaje es que necesita un cuarto hilo de primario y que en determinadas circunstancias pueden inducirse tensiones nocivas en los circuitos de comunicaciones próximos, ocasionadas por las corrientes desequilibradas y por los terceros armónicos de las corrientes de excitación**.

Si se aísla el neutro de los primarios del neutro del generador, la corriente del primario de cada transformador deberá volver al generador a través de los primarios de los otros dos transformadores, por lo que las tensiones respecto al neutro pueden verse muy desequilibradas por las cargas desequilibradas conectadas al neutro de los secundarios, o por desigualdades en las características de excitación de los transformadores.

En el caso de neutros aislados, las tensiones respecto al neutro de un banco estrella-estrella de transformadores monofásicos no tienen forma de onda sinusoidal***.

3. COMPARACIÓN DE LAS CONEXIONES ESTRELLA Y TRIÁNGULO

Las conexiones estrella y triángulo tienen, en muchos aspectos, propiedades de correlación; es decir, las relaciones de tensión en una son análogas a las relaciones de intensidad en la otra. Es interesante comparar las conexiones estrella y triángulo desde este punto de vista, ya que dicha comparación pone de manifiesto algunas de las ventajas relativas de cada conexión.

La conexión en estrella es algo parecida a un circuito serie, mientras la conexión, triángulo tiene características semejantes a las de circuitos paralelo. Cada una de las fases de una conexión estrella está conectada en serie con una de las líneas,

* Las tensiones respecto al neutro no tienen forma de onda sinusoidal y por tanto los vectores V_{AN1} , V_{BN1} , V_{CN1} de la figura 8b deben interpretarse como representativos de los armónicos fundamentales de dichas tensiones.

** Véase el apartado 2b del capítulo XXIII

*** Véase el apartado 2d del capítulo XXIII.

mientras que cada fase de una conexión triángulo está conectada entre un par de líneas; así, las corrientes en las fases de la estrella son iguales a las corrientes de las líneas correspondientes, y las tensiones en las fases de un triángulo son iguales a las tensiones entre línea y línea correspondientes. En la conexión estrella, entre cada par de terminales de línea hay dos devanados en serie, mientras que en la conexión triángulo entre cada par de terminales de línea hay dos ramas en paralelo. Así, cada tensión entre línea y línea de una conexión en estrella es la combinación serie de dos tensiones de fase de la estrella, y cada corriente de línea en una conexión en triángulo es la combinación paralelo de dos corrientes de fase del triángulo; de donde las relaciones de tensión en un circuito estrella son análogas a las relaciones de corriente en un circuito triángulo.

Si están equilibradas las tensiones y son despreciables los armónicos, el valor eficaz de las tensiones respecto al neutro en la estrella es igual al producto de $1/\sqrt{3}$ por el valor eficaz de las tensiones entre línea y línea. Por tanto, la conexión en estrella será particularmente adecuada para devanados de alta tensión, en los que el aislamiento es el problema principal, ya que para una tensión de línea determinada, las tensiones de fase de la estrella sólo serían iguales al producto de $1/\sqrt{3}$ por las tensiones en el triángulo. Además, en la conexión en estrella las tensiones entre las bobinas y el núcleo pueden reducirse poniendo a tierra el punto neutro. Por otra parte, la conexión en triángulo lleva frecuentemente consigo un diseño menos caro cuando las corrientes son intensas, puesto que para condiciones de equilibrio y corrientes de línea de intensidad especificada, la intensidad eficaz de las corrientes en el triángulo es igual al producto de $1/\sqrt{3}$ por la intensidad eficaz de las corrientes en la estrella.

Cuando se conectan de igual manera los devanados primario y secundario, el banco en conjunto tiene las características distintivas de la conexión en estrella o en triángulo. Así, pues, las conexiones estrella-estrella y triángulo-triángulo tienen características que contrastan. En la conexión estrella-estrella con neutros aislados, las tensiones entre línea y neutro están determinadas por las admitancias de excitación de las unidades, mientras que en la conexión triángulo-triángulo las corrientes del triángulo están determinadas por las impedancias equivalentes. * Luego, si son desiguales las impedancias de excitación, los transformadores de una conexión estrella-estrella con neutros aislados estarán sometidos a tensiones desiguales, como ocurre en un circuito serie cuyas impedancias componentes sean desiguales; pero si son desiguales las impedancias equivalentes, las corrientes que circulan por los transformadores conectados en triángulo-triángulo serán desiguales, como sucede en el caso de circuitos derivados cuyas ramas tengan impedancias desiguales.

Debido a su sensibilidad al desequilibrio de tensiones y a los fenómenos nocivos de los armónicos, rara vez se utiliza la conexión estrella-estrella sin conexión de los neutros, o sin otro medio de igualación de las tensiones respecto al neutro y eliminación de los armónicos. **

En la conexión triángulo-triángulo, el que las corrientes de los transformadores dependan de las impedancias equivalentes puede ser una ventaja o un inconveniente, según las circunstancias.

* Para el análisis de este problema véase el apartado 1b del capítulo XXIV.

** Véanse apartados 2a y 3 del capítulo XXIII.

niente, según las circunstancias. Por ejemplo, si los tres transformadores de un banco triángulo-triángulo tienen igual potencia nominal, convendrá que se repartan la carga por igual y si la carga está equilibrada deberán tener, por tanto, impedancias equivalentes iguales. En estas circunstancias, la sensibilidad de la conexión triángulo-triángulo a las desigualdades de las impedancias equivalentes es un inconveniente. En cambio, en un banco triángulo-triángulo pueden emplearse con relativo éxito transformadores de potencias nominales diferentes (pero de iguales tensiones nominales), puesto que el transformador mayor suele tener la menor impedancia equivalente, y por tanto, conducirá automáticamente la corriente más intensa. Aun cuando este montaje asimétrico presenta el inconveniente de que la potencia aparente nominal del banco trifásico es algo inferior a la suma de las potencias nominales de las unidades componentes, ello no obsta para que existan ciertas circunstancias en las cuales esta capacidad de la conexión triángulo-triángulo de funcionar satisfactoriamente con unidades de potencias nominales diferentes constituya una clara ventaja.

Las conexiones triángulo-estrella y estrella-triángulo, que se estudian a continuación, participan de algunas de las características de las dos conexiones en triángulo y en estrella.

4. CONEXIONES TRIÁNGULO-ESTRELLA Y ESTRELLA-TRIÁNGULO

A menudo conviene conectar en estrella los devanados de un lado del transformador; por ejemplo, cuando la tensión del circuito es elevada, o cuando se precise una conexión simétrica de neutro para poner a tierra o alimentar cargas monofásicas. Las conexiones triángulo-estrella o estrella-triángulo suelen ser adecuadas para estas aplicaciones por no tener las características, frecuentemente nocivas, de la conexión estrella-estrella.

Debido a lo elevado de la tensión del circuito, la conexión triángulo-estrella es la usual para transformadores de potencia elevados del extremo emisor de una línea de transmisión de alta tensión, y por la misma razón, los transformadores reductores del extremo receptor suelen estar conectados en estrella-triángulo. El neutro de la estrella de devanados de alta tensión suele ponerse a tierra a fin de asegurar una distribución equilibrada de tensiones entre las líneas y tierra y reducir las tensiones existentes entre las bobinas de los transformadores y los núcleos. A veces, la conexión a tierra se realiza a través de una impedancia conveniente, cuyo fin es limitar la intensidad de la corriente resultante de un cortocircuito entre línea y tierra.

La conexión triángulo-estrella se emplea frecuentemente en transformadores reductores, cuando se desea una conexión de baja tensión al neutro. Por ejemplo, los transformadores reductores instalados en subcentrales que alimentan redes de distribución de tensión intermedia para primarios, se conectan frecuentemente en triángulo-estrella. Estas redes suelen ser sistemas trifásicos de cuatro hilos con el hilo neutro puesto a tierra sólidamente, siendo de pocos miles de volt la tensión respecto al neutro.

El sistema de distribución 120/208 V de cuatro hilos conectado en estrella descrito en el apartado 2a se alimenta a menudo de los secundarios a 120 V conectados en estrella de un banco triángulo-estrella de transformadores de distribución.

El hilo neutro secundario está puesto a tierra y las cargas de alumbrado a 120 V pueden alimentarse conectadas entre las líneas de los secundarios y el hilo neutro, mientras los motores trifásicos son accionados por los tres hilos de línea a una tensión de $120\sqrt{3}$, o sea, 208 V.

La conexión estrella-triángulo puede emplearse para transformadores reductores de distribución que alimenten cargas monofásicas y trifásicas, cuando no se precise un neutro en la carga trifásica del lado de baja tensión. Si los secundarios conectados en triángulo son devanados divididos para 120/240 V, pueden conectarse como los secundarios del banco triángulo-triángulo de la figura 2 y puede suministrarse simultáneamente potencia a las cargas trifásicas de 240 V y a un circuito monofásico de tres hilos de 120/240 V con el neutro del circuito monofásico puesto a tierra. La ventaja de este sistema de distribución conectado en triángulo es que se obtienen las tensiones standard de 120 y 240 V, mientras que el sistema conectado en estrella descrito en el párrafo anterior da la tensión trifásica

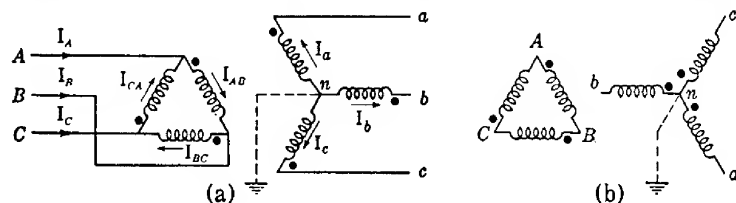


FIG. 9. Conexión triángulo-estrella

de 208 V que es menos común. Además, del sistema conectado en triángulo puede obtenerse potencia eléctrica a 240 V para cocinas eléctricas, pero no del sistema conectado en estrella. Los inconvenientes del sistema conectado en triángulo son su falta de simetría respecto a corrientes y tensiones. Así, las cargas monofásicas del sistema conectado en triángulo dan origen a corrientes desequilibradas, mientras que en el sistema conectado en estrella las corrientes están aproximadamente equilibradas si se distribuyen adecuadamente las cargas entre las fases. Además, la conexión a tierra del sistema conectado en triángulo es asimétrica. En el sistema conectado en triángulo de la figura 2, la tensión entre la línea c y tierra es de 208 V, pero las tensiones respecto a tierra están limitadas a 120 V en el sistema conectado en estrella. El peligro de sacudida es, pues, algo mayor en el sistema conectado en triángulo, requiriéndose a veces un cableado más caro.

El análisis de las conexiones triángulo-estrella y estrella-triángulo se basa en las relaciones fundamentales para circuitos conectados en triángulo y en estrella, junto con las relaciones entre las tensiones y corrientes de primario y secundario en los transformadores. En la figura 9a pueden verse las conexiones de un banco triángulo-estrella, en la cual se han dibujado paralelos los devanados primario y secundario de un mismo transformador.

En el lado conectado en triángulo, las tensiones en terminales de los transformadores son iguales a las correspondientes tensiones entre línea y línea, y en condiciones de equilibrio y orden ABC de las fases, el diagrama vectorial es el indicado en la figura 10a. En el lado conectado en estrella, las tensiones en terminales de los transformadores son iguales a las tensiones entre línea y neutro, y en la figura 10b

puede verse el diagrama vectorial de las tensiones de la estrella, el cual debe compararse con el de la figura 6b. En condiciones de equilibrio y para un orden de fases abc, la tensión V_{ab} entre línea y línea de la estrella es:

$$V_{ab} = \sqrt{3} V_{an} / 30^\circ, \quad (24)$$

según puede verse en la figura 10b. Cuando sean pequeñas las caídas de tensión en las impedancias de fuga, las tensiones en terminales de primario y secundario de los transformadores están casi en concordancia de fase, cuando se toman sus sentidos positivos con la misma polaridad relativa. Así, cuando las polaridades de

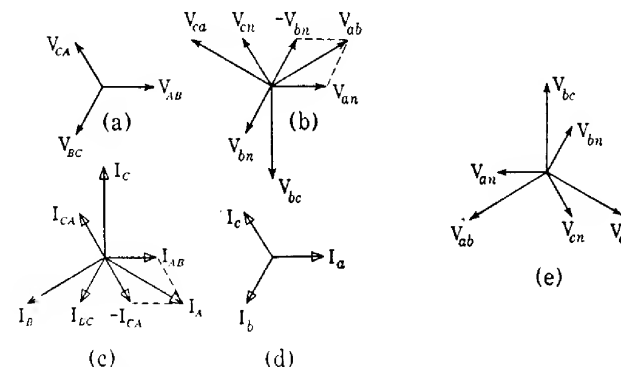


FIG. 10. Diagramas vectoriales aproximados para un banco triángulo-estrella

las conexiones son como las de la figura 9a, la tensión V_{an} entre línea y neutro de la estrella se halla muy aproximadamente en fase con la tensión V_{AB} entre línea y línea del triángulo, como en la figura 10b, y por tanto, la tensión V_{ab} entre línea y línea en el lado de la estrella está adelantada aproximadamente en 30° respecto a la tensión V_{AB} del triángulo.

También puede obtenerse la conexión en estrella como en la figura 9b, en la cual la polaridad del neutro es la contraria a la de las conexiones de la figura 9a. Las tensiones correspondientes en la estrella, indicadas en la figura 10e, están, pues, en oposición de fase con las tensiones de la figura 10b; así, la tensión V_{ab} en la línea del lado de la estrella está retrasada respecto a la tensión V_{AB} en la línea del lado del triángulo en 150° , y la tensión V_{ca} en la línea del lado de la estrella está retrasada respecto a la tensión V_{AB} en la línea del lado del triángulo en 30° .

► Por tanto, entre las tensiones de línea de primario y secundario que presentan menor diferencia de fase, existe un defasaje de 30° que puede ser de adelanto o de retraso, según sean las polaridades relativas de las conexiones de primario y secundario. Esta condición contrasta con la de un banco triángulo-triángulo o estrella-estrella, en donde las tensiones de línea de los primarios y secundarios correspondientes están casi en concordancia de fase cuando se realizan las conexiones de primario y secundario con las mismas polaridades relativas. A consecuencia de esta diferencia de fase, nunca deberá ponerse en paralelo un banco triángulo-estrella o

estrella-triángulo con uno triángulo-triángulo o estrella-estrella en ambos lados de primario y secundario. *◀

En el lado conectado en estrella, las corrientes de los transformadores son iguales a las corrientes de la línea correspondientes. En la figura 10d puede verse el diagrama vectorial correspondiente a condiciones de equilibrio y factor de potencia unidad. Cuando las corrientes de la estrella están equilibradas y varían sinusoidalmente con el tiempo, su suma vectorial es nula, y por tanto, no circula corriente alguna por la conexión a tierra del neutro (línea de trazos de la figura 9), que solo sirve para mantener el neutro al potencial de tierra. En la figura 10c puede verse el diagrama vectorial de las corrientes en el triángulo, el cual puede compararse con la figura 3c. Si se desprecian las corrientes de excitación, las corrientes de primario y secundario crean fuerzas magnetomotrices iguales y opuestas, y por tanto, las corrientes del triángulo están en fase con las corrientes de la estrella correspondientes directamente opuestas.

Cuando los tres transformadores tienen la misma razón de números de espiras y están equilibradas las tensiones de línea del triángulo, las tensiones respecto al neutro de la estrella deberán también estar muy aproximadamente equilibradas cuando sean pequeñas las caídas de tensión en las impedancias de fuga. Esta situación contrasta con el comportamiento de un banco estrella-estrella en el cual las tensiones respecto al neutro dependen de las características de excitación de las unidades cuando están aislados los neutros. Además, si en el lado de la estrella están equilibradas las corrientes de línea, las corrientes del triángulo deberán estar muy aproximadamente equilibradas y cualquier desequilibrio entre las corrientes del triángulo se deberá solamente a diferencias entre las relativamente débiles corrientes de excitación. Esta condición contrasta con el comportamiento de un banco triángulo-triángulo cuyas corrientes dependen de las impedancias equivalentes de las unidades.

Así, para tensiones de línea equilibradas y corrientes de línea equilibradas, la conexión en triángulo equilibra las tensiones respecto al neutro de la estrella, mientras que la conexión en estrella equilibra las corrientes del triángulo. Esta acción equilibrante constituye a veces una ventaja de las conexiones triángulo-estrella y estrella-triángulo, puesto que tres transformadores de tensiones e intensidades nominales iguales tomarán automáticamente partes iguales de una carga trifásica equilibrada, aun cuando sean diferentes sus impedancias equivalentes y sus características de excitación.

5. CONEXIÓN EN V O TRIÁNGULO ABIERTO

Cuando tres transformadores iguales tienen sus devanados conectados en estrella o en triángulo, la disposición es simétrica. Aun cuando la mayoría de las transformaciones trifásicas se realizan por medio de estas disposiciones simétricas, un ejemplo importante de dispositivo asimétrico es la conexión en V o triángulo abierto que sólo emplea dos transformadores. En la figura 11 pueden verse las conexiones elementales de un banco en triángulo abierto y en la 12 el esquema de conexiones

* El funcionamiento en paralelo de bancos polifásicos se estudia en el apartado 2 del capítulo XXIX.

de una instalación que alimenta simultáneamente una carga trifásica de 240 V y una carga monofásica de tres hilos para 120/240 V.

Obsérvese que la conexión en triángulo abierto es la equivalente de la conexión triángulo-triángulo suprimiendo un transformador. Así, si por un defecto hay que quitar un transformador de un grupo conectado en triángulo-triángulo, los dos transformadores restantes podrán seguirse utilizando para transmitir potencia trifásica, aun cuando con capacidad de carga reducida.

La conexión en triángulo abierto no sólo se utiliza como medida de emergencia, sino que también se instala frecuentemente en zonas en las que se espera que la carga crezca, ya que cuando dicha carga haya aumentado hasta un valor que supere a la capacidad del banco en triángulo abierto, podrá añadirse un nuevo transformador, convirtiendo el banco en triángulo abierto en un banco en triángulo.

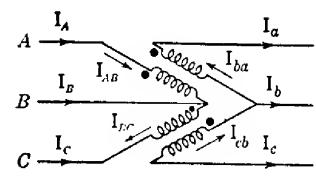


FIG. 11. Conexión en V o triángulo abierto

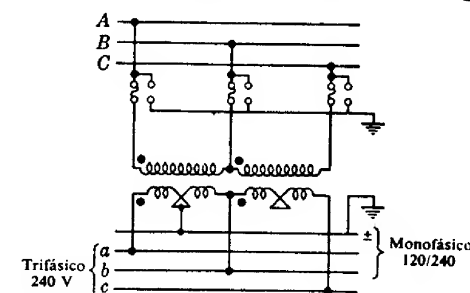


FIG. 12. Conexión en triángulo abierto de transformadores de distribución para alimentar simultáneamente cargas trifásicas a 240 V y monofásicas a 120/240 V

triángulo aumentando, en consecuencia, la capacidad de carga trifásica del banco. Como sólo intervienen dos transformadores, la conexión en triángulo abierto resulta relativamente sencilla de instalación y cuando se instala sobre postes presenta una apariencia pulida.

Aun cuando en la conexión en triángulo abierto no figure el transformador que va de las fases CA a las ca en la conexión triángulo-triángulo y por tanto el banco es asimétrico respecto a las tres líneas, cuando se aplican a los terminales de los primarios tensiones trifásicas equilibradas, en las líneas de los secundarios se obtienen tensiones casi equilibradas. Esto se debe al hecho de que en todo sistema trifásico la suma vectorial de las tensiones entre línea y línea, tomadas en orden cíclico, deber ser nula *, y por tanto los vectores que representan tensiones entre línea y línea pueden dibujarse como lados de un triángulo. Si las tensiones de los primarios están equilibradas, el triángulo de tensiones primarias es equilátero, como puede verse en la figura 13a. Las tensiones de línea de los secundarios V_{ab} y V_{bc} se obtienen directamente de los terminales de los secundarios de los dos transformadores, y en vacío estas tensiones de los secundarios están casi en fase y son iguales a las tensiones de los primarios correspondientes divididas por la razón de transfor-

* Véanse las ecuaciones (20) y (21).

mación α (supuesta la misma para ambos transformadores). En la figura 13b se han representado estas tensiones de los secundarios mediante vectores de trazo continuo. La tensión V_{ca} entre línea y línea de los secundarios está representada por el lado de cierre del triángulo de tensiones de línea de los secundarios y se ha dibujado en la figura 13b con línea de trazos. Por la semejanza de los triángulos de tensiones de los primarios y los secundarios, si están equilibradas las tensiones de línea de los

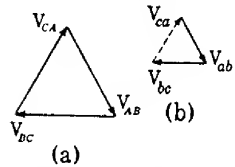


FIG. 13. Diagrama vectorial de tensiones de un banco en triángulo abierto

primarios, también lo estarán muy aproximadamente las tensiones de línea de los secundarios en vacío. No obstante, como el banco es asimétrico respecto a las tres líneas, las caídas de tensión en las impedancias equivalentes de los transformadores originan un ligero desequilibrio en las tensiones de los secundarios bajo carga, si bien dicho desequilibrio suele tener poca importancia.

El examen de la figura 11 indica que las corrientes que circulan por los primarios de los transformadores son iguales a las corrientes que circulan por las líneas A y C , y que las corrientes que circulan por los secundarios son iguales a las que circulan por las líneas a y c . Así, si son V_2 e I_2 la tensión e intensidad de secundario nominales de cada uno de los transformadores en un banco en triángulo abierto, también serán los valores nominales a plena carga de las tensiones de línea e intensidades de línea trifásicas para una carga trifásica equilibrada, y por tanto la potencia aparente nominal trifásica del banco es $\sqrt{3} V_2 I_2$ volt-ampere *. No obstante, el banco

* La expresión de los volt-ampere suministrados a una carga trifásica equilibrada es $\sqrt{3} V_{línea} I_{línea}$, donde $V_{línea}$ e $I_{línea}$ son los valores eficaces de la tensión entre línea y línea y de la intensidad de la corriente de línea. Aun cuando esta deducción puede hallarse en casi todos los textos que tratan de circuitos trifásicos, es tan importante que la repetimos a continuación.

Sean V_{fase} e I_{fase} los valores eficaces de la tensión en cada fase y de la intensidad de la corriente que circula por cada fase de una carga trifásica equilibrada. La expresión de la potencia aparente entregada a la carga trifásica es $3 V_{fase} I_{fase}$. Si la carga está conectada en triángulo,

$$V_{fase} = V_{línea} \quad (25)$$

$$I_{fase} = \frac{I_{línea}}{\sqrt{3}}, \quad (26)$$

y por tanto,

$$3 V_{fase} I_{fase} = 3 V_{línea} \frac{I_{línea}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} V_{línea} I_{línea}. \quad (27)$$

Si la carga está conectada en estrella,

$$V_{fase} = \frac{V_{línea}}{\sqrt{3}} \quad (28)$$

$$I_{fase} = I_{línea} \quad (29)$$

y por tanto,

$$3 V_{fase} I_{fase} = 3 \frac{V_{línea}}{\sqrt{3}} I_{línea} = \sqrt{3} V_{línea} I_{línea}. \quad (30)$$

Así, pues, independientemente de que la carga esté conectada en triángulo o en estrella, la expresión de la potencia aparente entregada a la carga es:

$$3 V_{fase} I_{fase} = \sqrt{3} V_{línea} I_{línea}. \quad (31)$$

consta de dos transformadores con un valor nominal total monofásico de $2 V_2 I_2$. Así pues, el valor nominal trifásico del banco ($\sqrt{3} V_2 I_2$) es menor que los valores monofásico combinados ($2 V_2 I_2$) de las unidades instaladas en el banco. La razón

potencia aparente nominal trifásica del banco

suma de las potencias aparentes nominales de las unidades instaladas $\triangleright (32)$

recibe el nombre de *economía del aparato* o de *factor de utilización* del banco y constituye una medida de la efectividad con que se utiliza la capacidad del transformador instalado para alimentar una carga. Así, para un banco en triángulo abierto de transformadores iguales que alimenten una carga trifásica equilibrada,

$$\text{Factor de utilización} = \frac{\sqrt{3} V_2 I_2}{2 V_2 I_2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866. \quad (33)$$

Es decir, un banco en triángulo abierto de transformadores exactamente iguales se encuentra a plena carga cuando alimenta a una carga trifásica equilibrada con el 86,6 % de la potencia aparente nominal total de los transformadores instalados. Será, pues, necesario instalar una capacidad total de transformadores mayor en un banco en triángulo abierto que en un triángulo-triángulo capaz de alimentar la misma carga trifásica equilibrada. Este es el principal inconveniente del triángulo abierto frente a cualquiera de las conexiones simétricas.

Por ser menor el factor de utilización del banco en triángulo abierto que el del banco triángulo-triángulo, al quitar un transformador averiado de un banco triángulo-triángulo se reduce la capacidad de carga trifásica del banco en mayor cantidad que la potencia aparente nominal del transformador suprimido. En un banco triángulo-triángulo con carga trifásica equilibrada, la intensidad eficaz de las corrientes de línea es igual al producto de $\sqrt{3}$ por la intensidad eficaz de las corrientes que circulan por los transformadores, mientras que en la conexión en triángulo abierto las corrientes de línea son iguales a las corrientes del transformador.

Por tanto, un banco de dos transformadores conectados en triángulo abierto tiene una potencia aparente nominal igual al producto de $1/\sqrt{3}$, ó sea 0,577 por la potencia aparente nominal de un banco triángulo-triángulo de tres transformadores iguales.

6. FUNCIONAMIENTO DE EMERGENCIA DE BANCOS TRIÁNGULO-ESTRELLA Y ESTRELLA-TRIÁNGULO

Por medio de una disposición algo parecida a la conexión en triángulo abierto, puede hacerse funcionar a carga máxima reducida una línea de transmisión con un banco elevador de transformadores conectados en triángulo-estrella en su extremo emisor y otro banco reductor en estrella-triángulo en su extremo receptor, a la que falla una fase y se ha desconectado ésta. Los neutros de los extremos emisor y receptor

En el lado del secundario de la conexión en triángulo abierto, $V_{línea}$ es igual a la tensión V_2 del transformador e $I_{línea}$ es igual a la intensidad I_2 de la corriente que circula por el transformador, mientras que la salida trifásica del banco es $\sqrt{3} V_2 I_2$ volt-ampere.

deben estar conectados, bien a través de tierra o mejor con un hilo neutro, como se indica en la figura 14a.

El sistema es asimétrico y por tanto las caídas en las impedancias están desequilibradas; pero, como estas caídas suelen ser pequeñas, las tensiones en los terminales de los secundarios del banco reductor no podrán quedar desequilibradas seriamente. En cambio, las corrientes de la línea de transmisión quedan muy desequilibradas. Si a la carga del lado de los secundarios del banco reductor se entregan corrientes equilibradas, el diagrama vectorial de las corrientes del secundario será el indicado en la figura 14b. Si se prescinde de las corrientes de excitación, las corrientes de los primarios y secundarios de los transformadores crean fuerzas magnetomotrices iguales y opuestas. Así, para los sentidos positivos de las corrientes indicados por flechas en la figura 14a, la corriente I_A que circula por el primario del transformador A está en concordancia de fase con la corriente I_a'' del secundario, y la corriente I_C del primario del transformador C está en oposición de fase con la corriente I_c'' del

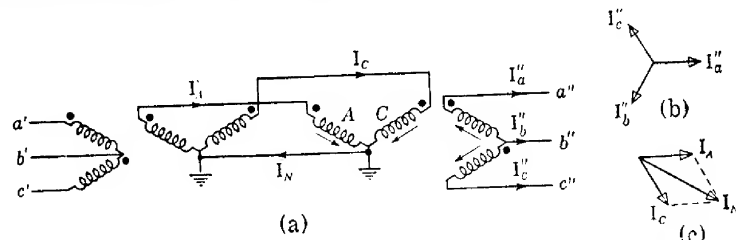


FIG. 14. Funcionamiento de emergencia de bancos triángulo-estrella y estrella-triángulo, mostrando a) conexiones, b) diagrama vectorial de corrientes equilibradas en la carga de los secundarios, y c) diagrama vectorial de corrientes en la línea de alta tensión

secundario, como puede verse en la figura 14c. La corriente I_N que circula por el neutro de retorno a los transformadores del extremo emisor es la suma vectorial de las corrientes de las líneas de los primarios, como puede verse en la figura 14c, y por tanto, cuando están equilibradas las corrientes de los secundarios, la intensidad eficaz de la corriente del neutro es igual al producto de $\sqrt{3}$ por la intensidad eficaz de las corrientes de fase en la línea de transmisión. Estas corrientes desequilibradas en la línea de transmisión pueden inducir tensiones nocivas en los circuitos adyacentes de comunicaciones.

Los transformadores se conectan en triángulo abierto en sus lados de baja tensión y por tanto, como en el apartado 5, la capacidad del sistema a plena carga con una fase averiada es igual al producto de 0,577 por la capacidad a plena carga del sistema sin avería, y el factor de utilización es 0,866.

PROBLEMAS

1. Se quiere utilizar un banco trifásico de transformadores para reducir la tensión de 6 600 V de una línea de distribución de manera que alimente un grupo de lámparas de incandescencia de 115 V mediante un sistema trifásico de cuatro hilos. Los transformadores se hallan conectados normalmente en triángulo-estrella con el neutro de la estrella

puesto a tierra; pero, a fin de proporcionar un medio de oscurecer las lámparas reduciendo su brillo a una fracción pequeña de su valor normal, se coloca un conmutador de manera que los secundarios puedan quedar conectados en triángulo no puesto a tierra. La potencia total requerida por las lámparas es de 300 kW con factor de potencia unidad.

- ¿Cuáles deben ser la tensión e intensidad nominales en los primarios de los transformadores?
- ¿Cuáles deben ser la tensión e intensidad nominales en los secundarios de los transformadores?
- Si se ha accionado el conmutador y uno de los bancos de lámparas se cortocircuita, ¿qué tensión quedará aplicada a los otros dos bancos? ¿Podría esto fundir algún fusible?
- Si se ha accionado el conmutador y se funde el fusible de una línea, ¿qué tensiones quedarán aplicadas a los tres bancos de lámparas?

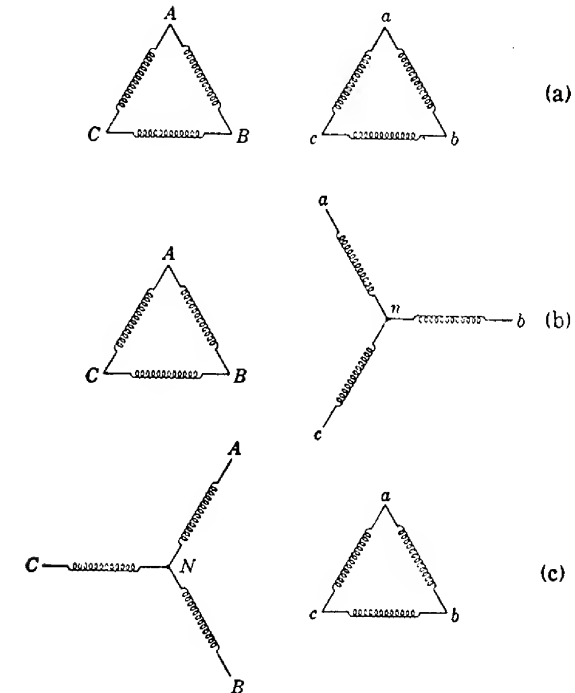


FIG. 15. Conexiones de los transformadores, problema 2

2. A una línea trifásica de tensión conveniente se quieren conectar tres transformadores monofásicos de 2 400 : 240 V de manera que formen un banco simétrico. En los transformadores no hay marcas de polaridad. Describir, para cada una de las conexiones de la figura 15, un procedimiento de ensayo paso a paso para determinar las conexiones correctas con empleo, solamente, de un voltímetro. Dígase, en cada caso, qué valores debe indicar el voltímetro.

3. Se necesita reducir la tensión de una línea de 7 200 V trifásica de tres hilos para obtener una distribución trifásica de cuatro hilos a 120 V respecto al neutro. La carga consta de motores de inducción trifásicos y lámparas de incandescencia. La carga del motor de inducción es de 100 kVA con factor de potencia 0,70; la carga del alumbrado es de 200 kVA con factor de potencia unidad y está conectada entre los hilos de línea y el hilo neutro de tal manera que la carga total del alumbrado esté equilibrada. Si se emplean transformadores monofásicos,

- ¿Cómo deben conectarse y por qué?
- ¿Cuáles deberán ser sus tensiones nominales de primario y secundario?
- ¿Cuáles son las intensidades a plena carga de las corrientes que circulan por primario y secundario?

4. Cada uno de los transformadores de la figura 3 tiene una impedancia en cortocircuito de $5 + j 20$ ohm referida al lado de alta tensión. Los transformadores se conectan en la forma indicada en la figura 15 c, con el neutro de primarios aislado y se aplica a los primarios conectados en estrella tensiones trifásicas equilibradas de $7\,200\sqrt{3}$ V.

- ¿Cuál será la intensidad de la corriente en el triángulo cerrado de secundarios si uno de ellos se conecta accidentalmente con su polaridad invertida y se desprecia la corriente de excitación?

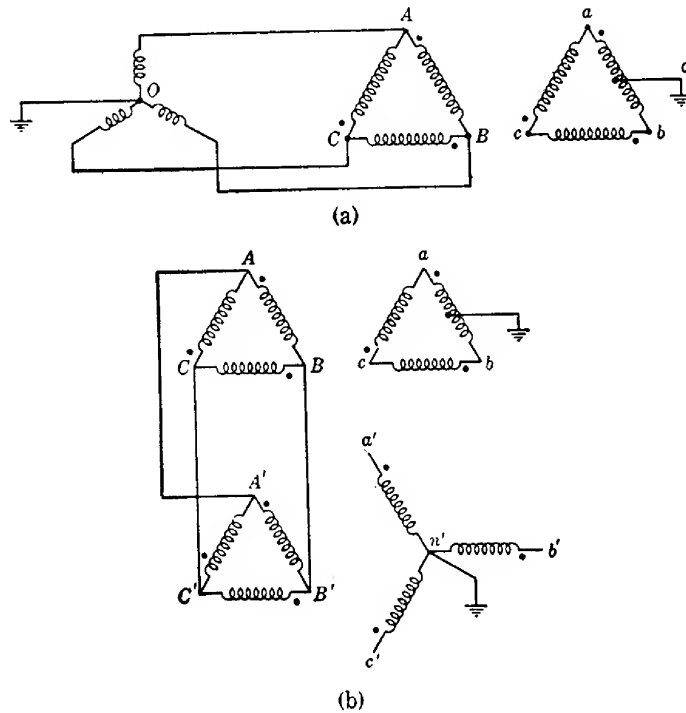


FIG. 16. Conexiones de los transformadores, problema 5

- ¿Cuáles serían las tensiones de las fases de los primarios V_{AN} , V_{BN} , V_{CN} si es el devanado ac el que está conectado al revés? ¿Se pueden despreciar las corrientes de excitación en este problema?

5. Las figuras 16a y 16b muestran partes de dos sistemas de distribución. La figura 16a representa una conexión triángulo-triángulo de transformadores monofásicos alimentados por un generador montado en estrella con el neutro a tierra. La figura 16b representa una conexión trifásica en paralelo de un banco triángulo-triángulo y un banco triángulo-estrella de transformadores monofásicos. Todos los transformadores son iguales y tienen el mismo número de espiras en primario que en secundario. Los primarios están alimentados por tensiones trifásicas equilibradas de 440 V entre línea y línea. Determinar las tensiones entre los siguientes pares de puntos.

- En la figura 16 a: co , Aa y Cc .
- En la figura 16 b: aa' y cc' .

Efectos de las impedancias de los transformadores en los circuitos trifásicos

En el capítulo XXI se han estudiado las disposiciones trifásicas de transformadores ideales y se han mencionado cualitativamente los principales efectos de las imperfecciones de los transformadores reales. Este análisis simplificado, suficientemente preciso para muchos fines, permite comparar las características más sobresalientes de las distintas disposiciones trifásicas. Sin embargo, en muchos problemas las imperfecciones de los transformadores tienen efectos importantes y hay que tenerlas en cuenta cuantitativamente. Por ejemplo, las impedancias de fuga de los transformadores son importantes en los problemas en que interviene la regulación de tensión, la división de las corrientes entre circuitos derivados y el cálculo de las intensidades de las corrientes en cortocircuito, y en otros problemas que abarcan las impedancias de transmisión y los sistemas de distribución. En este capítulo nos proponemos desarrollar una base cuantitativa para el análisis de dichas cuestiones, haciendo hincapié en las condiciones de equilibrio. En el capítulo XXIV se estudiarán las condiciones en que no hay equilibrio

1. CIRCUITOS EQUIVALENTES

En el análisis siguiente, conviene representar cada uno de los transformadores monofásicos que componen el banco trifásico por un circuito equivalente. Como los efectos de las capacidades de los devanados y de los armónicos de las corrientes

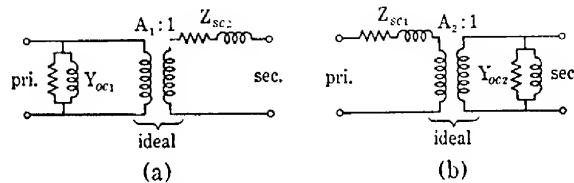


FIG. 1. Circuitos equivalentes para un transformador sólo.

de excitación suelen ser despreciables, podrá utilizarse cualquiera de los circuitos equivalentes deducidos en los capítulos anteriores; los más útiles para el presente estudio son los de la figura 1. * En ellos, el transformador está representado, como en el teorema de Thévenin, por su impedancia en cortocircuito en serie con su tensión en circuito abierto; la razón de las tensiones en circuito abierto está representada

* Estos circuitos equivalentes están descritos en los apartados 6 y 8c del capítulo XIII y en el apartado 5 del capítulo XVII.

por un transformador ideal; y las características de excitación están representadas por la admitancia en circuito abierto; es decir, en la figura 1a,

Z_{sc2} es la impedancia en cortocircuito medida desde el lado del secundario,
 Y_{oc1} es la admitancia en circuito abierto medida desde el lado del primario,
 A_1 es el cociente complejo V_1/E_{oc2} entre las tensiones de primario y secundario medidas con el secundario abierto;

y en la figura 1b,

Z_{sc1} es la impedancia en cortocircuito medida desde el lado del primario,
 Y_{oc2} es la admitancia en circuito abierto medida desde el lado del secundario,
 A_2 es el cociente complejo E_{oc1}/V_2 entre las tensiones de primario y secundario medidas con el primario abierto.

Si se prescinde de los efectos de las capacidades y de los armónicos de la corriente de excitación, estos circuitos equivalentes son representaciones «exactas» del transformador. No obstante, como se vio en el apartado 8 del capítulo XIII, la razón de tensiones en circuito abierto es muy aproximadamente igual a la razón de los números de espiras; es decir,

$$A_1 \approx a \approx A_2, \quad \blacktriangleright(1)$$

donde a es la razón N_1/N_2 . Las impedancias en cortocircuito también son muy aproximadamente iguales a las impedancias equivalentes referidas al mismo lado; así,

$$Z_{sc1} \approx Z_{eq1} \quad \blacktriangleright(2)$$

$$Z_{sc2} \approx Z_{eq2}, \quad \blacktriangleright(3)$$

donde Z_{eq1} y Z_{eq2} son las impedancias equivalentes. Las admitancias en circuito abierto son prácticamente iguales a las admitancias de excitación referidas al mismo lado; es decir,

$$Y_{oc1} \approx Y'_\phi \quad \blacktriangleright(4)$$

$$Y_{oc2} \approx Y''_\phi, \quad \blacktriangleright(5)$$

donde Y'_ϕ e Y''_ϕ son las admitancias de excitación. Las relaciones aproximadas expresadas en las ecuaciones (1-5) son tan aproximadamente correctas que en el análisis que sigue no se hace distinción alguna entre los valores «exactos» de los parámetros de la figura 1 y sus valores aproximados dados por estas ecuaciones. Es decir, los valores de los parámetros pueden obtenerse a partir de los datos de diseño o de ensayos en circuito abierto o en cortocircuito tomados a uno u otro lado del transformador, y estos valores se pueden emplear, sin modificación, o en el circuito equivalente de la figura 1a (en el cual se coloca la admitancia de excitación en el lado del primario) o en el circuito equivalente de la figura 1b (en el cual la admitancia de excitación se coloca en el lado del secundario). En muchos problemas, los efectos de la corriente de excitación son tan pequeños que puede despreciarse por completo la corriente de excitación y representarse el transformador por su impedancia equivalente en serie con un transformador ideal. Si se quiere, las impedancias equivalentes y admitancias de excitación de la figura 1 se pueden referir al otro lado

del transformador multiplicando o dividiendo, según sea el caso, por el cuadrado de la razón de transformación.

El circuito equivalente de un banco trifásico de transformadores puede trazarse conectando los circuitos equivalentes de las unidades de acuerdo con las conexiones del banco. Por ejemplo, en la figura 2a puede verse un circuito equivalente de un banco estrella-estrella y en la figura 2b un circuito equivalente de un

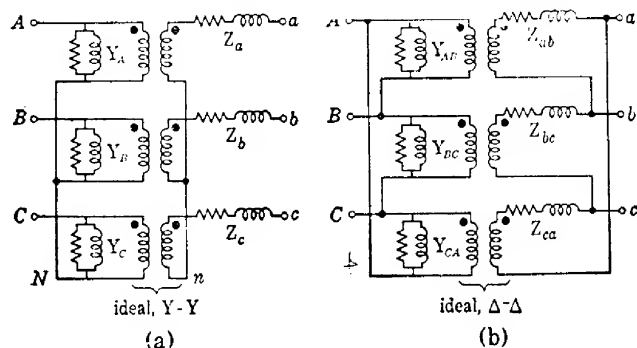


FIG. 2. Circuitos equivalentes trifásicos; a) Conexión estrella-estrella, y b) conexión triángulo-triángulo. La conexión estrella-estrella se simboliza por Y-Y y la del triángulo-triángulo por Δ-Δ.

banco triángulo-triángulo. En la figura 2, las Y representan admitancias en circuito abierto o de excitación y las Z las impedancias en cortocircuito o equivalentes.

En el análisis de sistemas de potencia es frecuentemente necesario combinar las impedancias de los transformadores con las impedancias de las líneas de transmisión a las que están conectados. Luego, resulta a menudo conveniente representar un grupo de devanados conectados en triángulo por un circuito equivalente conectado en estrella, ya que en la conexión en estrella las impedancias equivalentes que representan a los transformadores están en serie con los tres terminales de línea y por tanto pueden sumarse directamente a las impedancias de las fases de los circuitos de transmisión. Ya se sabe que, visto desde sus tres terminales, un triángulo de elementos de circuito puede sustituirse por una estrella equivalente. Así, las admitancias de excitación \$Y_{AB}, Y_{BC}, Y_{CA}\$ conectadas en triángulo de la figura 2b son equivalentes a las admitancias \$Y_A, Y_B, Y_C\$ conectadas en estrella cuyos valores vienen dados por las conocidas relaciones:

$$Y_A = \frac{Y_{AB}Y_{BC} + Y_{BC}Y_{CA} + Y_{CA}Y_{AB}}{Y_{BC}} \quad (6)$$

$$Y_B = \frac{Y_{AB}Y_{BC} + Y_{BC}Y_{CA} + Y_{CA}Y_{AB}}{Y_{CA}} \quad (7)$$

$$Y_C = \frac{Y_{AB}Y_{BC} + Y_{BC}Y_{CA} + Y_{CA}Y_{AB}}{Y_{AB}} \quad (8)$$

Además, las impedancias \$Z_{ab}, Z_{bc}, Z_{ca}\$ de la figura 2b que forman parte de un sistema conectado en triángulo, pueden sustituirse por impedancias conectadas en estrella. Así, por el teorema de Thévenin, el banco triángulo-triángulo de la figura 2b es equivalente en su lado de secundarios a un generador conectado en estrella que cree las mismas tensiones de secundario entre línea y línea en circuito abierto y conectado en serie con impedancias cuyos valores sean las equivalentes en estrella de las impedancias en cortocircuito de los transformadores medidas desde los terminales de sus secundarios. Luego, los transformadores ideales conectados en triángulo-triángulo de la figura 2b pueden sustituirse por un banco estrella-estrella que dé las mismas tensiones en circuito abierto, y las impedancias en cortocircuito de los transformadores pueden representarse por impedancias en estrella conectadas en serie con cada terminal de línea. Las relaciones entre las impedancias en cortocircuito \$Z_{ab}, Z_{bc}, Z_{ca}\$ de los transformadores conectados en triángulo y sus equivalentes conectadas en estrella \$Z_a, Z_b, Z_c\$ vienen dadas por las conocidas relaciones,

$$Z_a = \frac{Z_{ca}Z_{ab}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \quad (9)$$

$$Z_b = \frac{Z_{ab}Z_{bc}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \quad (10)$$

$$Z_c = \frac{Z_{bc}Z_{ca}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \quad (11)$$

Por tanto, por lo que concierne a sus efectos sobre los circuitos exteriores, un grupo de devanados conectados en triángulo puede representarse por un circuito equivalente conectado en estrella, como en la figura 2a, con tal que los parámetros de la estrella equivalente estén relacionados con los parámetros reales de los transformadores conectados en triángulo en la forma indicada por las ecuaciones (6-11) y con tal que las tensiones en circuito abierto entre línea y línea del circuito equivalente conectado en estrella sean las mismas que las de los devanados conectados en triángulo *. Es decir, en el caso de un banco triángulo-triángulo los transformadores ideales pueden sustituirse por un banco estrella-estrella que dé las mismas tensiones de funcionamiento. Análogamente, a menudo se representa un banco triángulo-estrella (o estrella-triángulo) por un circuito equivalente estrella-estrella, como en la figura 2a, que dé las mismas magnitudes de las tensiones en circuito abierto entre línea y línea. Sin embargo, a causa del desfase introducido por la conexión triángulo-estrella **, el circuito equivalente estrella-estrella de un banco triángulo-estrella no presenta las relaciones correctas de fase entre las corrientes de primario y secundario, o entre las tensiones de primario y secundario, aun cuando presente correctamente las relaciones entre las corrientes y tensiones de cada lado.

2. CIRCUITOS EQUIVALENTES MONOFÁSICOS PARA CONDICIONES DE EQUILIBRIO

Cuando los transformadores son exactamente iguales y las corrientes y tensiones están equilibradas, sólo podrá distinguirse una fase de otra por los desfases de 120° entre sus corrientes y entre sus tensiones. Por tanto, las corrientes y tensiones de

* Obsérvese que el circuito equivalente estrella no presenta las corrientes reales que circulan por los devanados conectados en triángulo.

** Véase el apartado 4 del capítulo XXI.

cada fase pueden determinarse analizando una fase cualquiera. Para estos fines suele ser conveniente considerar todos los generadores, devanados de transformadores y cargas, como si estuvieran conectados en estrella. Así, las admitancias de excitación e impedancia equivalentes de un transformador conectado en triángulo, pueden

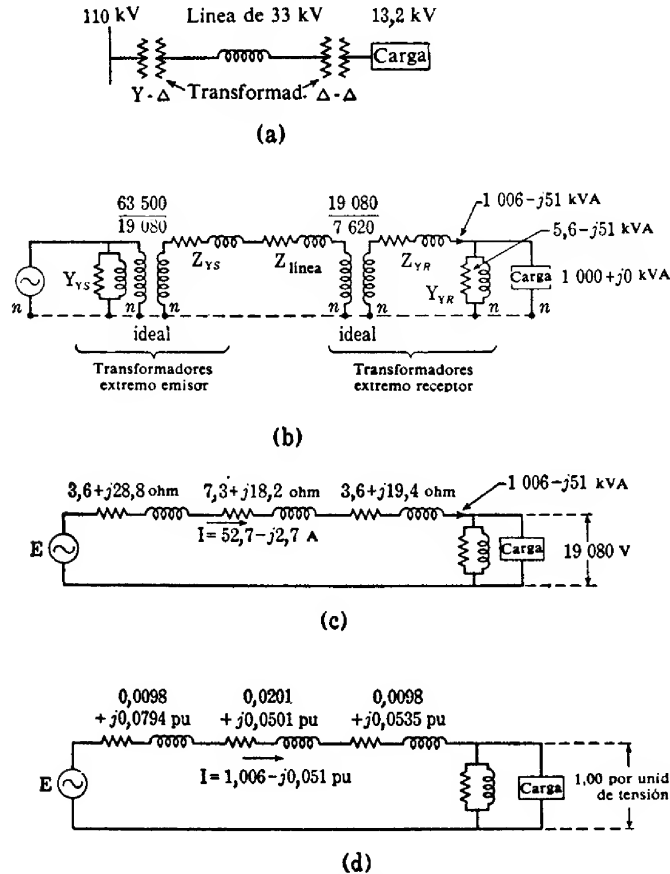


FIG. 3. Esquema monofásico del circuito estudiado en el apartado 2 y etapas de la simplificación del circuito.

sustituirse por sus equivalentes conectados en estrella, dados por las ecuaciones (6-11), las cuales, para transformadores exactamente iguales, se reducen a

$$Y_Y = 3Y_{\Delta} \quad \rightarrow (12)$$

$$Z_Y = \frac{1}{3}Z_{\Delta} \quad \rightarrow (13)$$

en donde el subíndice Δ indica la admitancia o impedancia de la fase del triángulo

y el subíndice Y el valor equivalente en la fase de la estrella. Para condiciones de equilibrio, los puntos neutros de todos los circuitos equivalentes conectados en estrella pueden considerarse conectados directamente. *

2a. Ejemplo de circuito equilibrado. Como ejemplo de análisis de un sistema equilibrado, consideremos el circuito indicado en el esquema de la figura 3a, que comprende un banco estrella-triángulo de tres transformadores monofásicos de 1 000 kVA, 63 500 : 33 000 V conectados por la parte de sus primarios a un generador trifásico equilibrado (las barras de 110 000 V de una subcentral). Los secundarios de este banco entregan potencia a un banco triángulo-triángulo de tres transformadores de 1 000 kVA, 33 000 : 13 200 V a través de una línea de transmisión.

El problema es determinar qué tensión se necesita en las barras de la subcentral para mantener la tensión nominal entre línea y línea de 13 200 V en los terminales de los secundarios del banco triángulo-triángulo cuando dicho banco alimenta una carga trifásica equilibrada de 3 000 kVA a un factor de potencia unidad.

Datos: La impedancia de la línea de transmisión de 33 000 V es:

$$Z_{línea} = 7,3 + j18,2 \text{ ohm por fase.} \quad (14)$$

La impedancia equivalente Z_R de cada uno de los transformadores en triángulo-triángulo del extremo receptor de la línea, es:

$$Z_R = 1,71 + j9,33 \text{ ohm} \quad (15)$$

referida al lado de baja tensión. Su pérdida en el núcleo es:

$$P_c = 5,6 \text{ kW cada transformador,} \quad (16)$$

y su potencia reactiva magnetizante es:

$$(VI)_{mag} = 51 \text{ kVAR, cada transformador.} \quad (17)$$

Los resultados medios de ensayos monofásicos en circuito abierto y cortocircuito realizados en los transformadores del extremo emisor son:

Ensayo en circuito abierto	Ensayo en cortocircuito
$V = 33\,000 \text{ V}$	$V = 2\,640 \text{ V}$
$I = 1,24 \text{ A}$	$I = 30,3 \text{ A}$
$P = 5,30 \text{ kW}$	$P = 9,81 \text{ kW}$

En ambos ensayos se realizaron las medidas en los lados de baja tensión (33 000 V) a la frecuencia nominal (60 Hz).

Solución: El primer paso es reducir el circuito a uno equivalente conectado en estrella, como se indica en la figura 3b, en el cual carga y generador se consideran cada uno como una fase de un circuito conectado en estrella, y cada banco de transformadores está representado por una fase de un circuito equivalente estrella-estrella, que comprende un transformador ideal en combinación con una impedancia en serie y una admitancia en paralelo. Pueden considerarse conectados entre sí todos los puntos neutros n de las estrellas, como indica la línea de trazos de la figura 3b.

Aun cuando ordinariamente pueden despreciarse las corrientes de excitación de los

transformadores en la resolución de un problema de esta clase, a fin de dar una visión más completa las incluiremos en la resolución que sigue, doquiera tengan algún efecto.

Las corrientes de excitación vienen representadas por las admitancias paralelo conectadas a uno y otro lado de los transformadores. Conviene conectar las admitancias de excitación de los transformadores del extremo de la carga en paralelo con los terminales de los secundarios, ya que la excitación, dada por

$$P_c - j(VI)_{mag} = 5,6 - j51 \text{ kVA por fase} \quad (18)$$

pueden entonces combinarse directamente en paralelo con la carga, dada como 1 000 + j0 kVA por fase. Así, pues, la carga y los transformadores del extremo de carga absorben una potencia aparente combinada de

$$1\,006 - j51 \text{ kVA por fase} \quad (19)$$

En cambio, si se conectaran entre los terminales de los primarios de los transformadores del extremo emisor sus admitancias de excitación, como en la figura 3b, sus corrientes de excitación no tendrían ningún efecto sobre la tensión del generador que se requiere para mantener en la carga la tensión nominal, aun cuando afectarán a la corriente tomada del generador. Cuando se trata el problema de esta manera, las admitancias de excitación de los transformadores del extremo emisor no intervienen en su solución ya que no se precisa conocer la corriente del generador.

Las razones de transformación de los transformadores ideales conectados en estrella-estrella en la figura 3b son tales que crean las mismas tensiones en circuito abierto que el banco que representan. Las tensiones respecto al neutro de la estrella equivalente para el banco en triángulo-triángulo de 33 000 : 13 200 V en el extremo de carga son:

$$\frac{33\,000}{\sqrt{3}} = 19\,080 \text{ V} \quad (20)$$

$$\frac{13\,200}{\sqrt{3}} = 7\,620 \text{ V} \quad (21)$$

y las tensiones respecto al neutro en la estrella equivalente para el banco estrella-triángulo del extremo emisor son:

$$\frac{110\,000}{\sqrt{3}} = 63\,500 \text{ V} \quad (22)$$

$$Y \quad 19\,080 \text{ V.} \quad (23)$$

Así, pues, las razones de transformación de los transformadores ideales son las marcadas en la figura 3b.

La impedancia equivalente de cada uno de los transformadores conectados en triángulo-triángulo del extremo receptor viene dada por

$$Z_{\Delta R} = 1,71 + j9,33 \text{ ohm} \quad (24)$$

referida al lado de baja tensión. En virtud de la ecuación (13), la impedancia equivalente en estrella es:

$$Z_{YR} = \frac{1}{3}(1,71 + j9,33) = 0,57 + j3,11 \text{ ohm} \quad (25)$$

Esta impedancia, referida al lado del primario del transformador ideal del extremo receptor, es:

$$\begin{aligned} a^2 Z_{YR} &= \left(\frac{19\,080}{7\,620} \right)^2 (0,57 + j3,11) \\ &= 3,6 + j19,4 \text{ ohm.} \end{aligned} \quad (26)$$

De los datos en cortocircuito, la impedancia en cortocircuito de cada transformador del extremo emisor referida al lado de los secundarios conectados en triángulo, resulta ser:

$$Z_{\Delta S} = \frac{V}{I} = \frac{2\,640}{30,3} = 87,1 \text{ ohm} \quad (27)$$

$$R_{\Delta S} = \frac{P}{I^2} = \frac{9\,810}{(30,3)^2} = 10,7 \text{ ohm} \quad (28)$$

$$X_{\Delta S} = \sqrt{Z_{\Delta S}^2 - R_{\Delta S}^2} = 86,4 \text{ ohm.} \quad (29)$$

En virtud de la ecuación (13), la impedancia equivalente en estrella es:

$$Z_{YS} = \frac{1}{3}(10,7 + j86,4) = 3,6 + j28,8 \text{ ohm.} \quad (30)$$

Si las impedancias de carga y equivalente y la corriente de excitación del transformador del extremo receptor se refieren todas al lado del primario y se refiere al secundario del transformador del extremo emisor la tensión del generador, podrán suprimirse los transformadores ideales y el circuito de la figura 3b se reduce al de la figura 3c, en el cual se suministra una carga de 1 006 - j51 kVA por fase a una tensión de 19 080 V, por fase a través de una impedancia en serie cuyo valor total es la suma de sus tres componentes, o sea,

$$Z = Z_{YS} + Z_{linea} + a^2 Z_{YR} = 14,5 + j66,4 \text{ ohm} \quad (31)$$

Si se toma como vector de referencia el representativo de la tensión en la carga, el vector representativo de la corriente que circula por la línea de transmisión es:

$$I = \frac{\text{kVA por fase}}{\text{kV por fase de la estrella}} = \frac{1\,006 - j51}{19,08} \quad (32)$$

$$= 52,7 - j2,7 \text{ A por fase de la estrella} \quad (33)$$

Puede ahora determinarse la tensión requerida en el extremo emisor sumando la caída en la impedancia del sistema a la tensión en la carga; así,

$$\begin{aligned} IZ &= (52,7 - j2,7)(14,5 + j66,4) \\ &= 940 + j3\,460 \text{ V, en la estrella} \end{aligned} \quad (34)$$

$$V = \frac{19\,080 + j}{0} \quad (35)$$

$$E = \text{suma} = 20\,020 + j3\,460 \quad (36)$$

$$E = 20\,300 \text{ V, en la estrella.} \quad (37)$$

La tensión E es la tensión respecto al neutro en la subcentral, referida a los lados de los secundarios de los transformadores del extremo emisor. La tensión real de la subcentral es:

$$\frac{63\,500}{19\,080} \times 20\,300 = 67\,500 \text{ V, respecto al neutro} \quad (38)$$

o sea,

$$\sqrt{3} \times 67\,500 = 117\,000 \text{ V, entre línea y línea} \quad (39)$$

que es la tensión del extremo emisor necesaria para mantener la tensión nominal en el extremo de la carga.

2b. *Ejemplo resuelto con cantidades expresadas en tanto por uno.* El empleo de cantidades expresadas en tanto por ciento o por uno * suele llevar consigo un gran ahorro de tiempo en los cálculos de circuitos de potencia y es particularmente útil cuando intervienen bancos trifásicos de transformadores, ya que los factores de reducción para las razones de transformación y de conversión para triángulo a estrella quedan automáticamente tenidos en cuenta en los valores normales o de base en función de los cuales se expresan las corrientes, tensiones y parámetros del circuito. Además, es probable que nos demos cuenta de errores tales como la mala colocación de una coma decimal, a causa de lo evidentemente absurdo de un resultado incorrecto, por lo que los cálculos a tanto por uno quedan, hasta cierto punto, auto-comprobados.

Como ejemplo del empleo de la expresión de cantidades a tanto por uno en un problema trifásico, vamos a resolver a continuación de nuevo el problema del ejemplo de la parte a) de este apartado.

Solución: El primer paso de la resolución es elegir valores base convenientes respecto a los cuales se expresen las cargas, intensidades, tensiones e impedancias. En este problema, la carga trifásica y las potencias trifásicas nominales de ambos bancos de transformadores son 3 000 kVA, por lo que constituirá una base conveniente.

$$\text{kVA de base} \equiv 3\,000 \text{ kVA, trifásica} \quad (40)$$

$$\equiv 1\,000 \text{ kVA, por fase.} \quad (41)$$

Para base de las tensiones conviene elegir las tensiones nominales. Así,

$$\text{Tensión de base} \equiv 13,2 \text{ kV triángulo, para extremo de carga} \quad (42)$$

$$\equiv 33,0 \text{ kV triángulo, o } 19,08 \text{ kV estrella,} \quad (43)$$

$$\text{para la línea de transmisión} \quad (44)$$

$$\equiv 110 \text{ kV triángulo, o } 63,5 \text{ kV estrella para el generador.}$$

Las intensidades de base se determinan a partir de los kVA de base divididos por las tensiones de base en kilovolt. Así, para los devanados del transformador conectados en triángulo,

Intensidad de base para secundarios transformador extremo carga

$$= \frac{1\,000}{13,2} = 75,8 \text{ A, por fase del triángulo.} \quad (45)$$

Intensidad de base para secundarios transformador extremo emisor

$$= \frac{1\,000}{33,0} = 30,3 \text{ A, por fase del triángulo} \quad (46)$$

* La expresión a tanto por ciento o por uno de intensidades, tensiones y parámetros de circuitos se estudió en el apartado 6 del capítulo XIV.

y para la línea de transmisión de 33 kV,

$$\text{Intensidad de base} = \frac{1\,000}{19,08} = 52,5 \text{ A, por fase de la estrella} \quad (47)$$

Los valores base de las impedancias se determinan a partir de las tensiones de base divididas por las intensidades de base. Así,

Impedancia de base en los lados de secundario de los transformadores del extremo de carga

$$= \frac{13\,200}{75,8} = 174 \text{ ohm por fase del triángulo.} \quad (48)$$

Impedancia de base en los lados de secundario de los transformadores del extremo emisor

$$= \frac{33\,000}{30,3} = 1\,090 \text{ ohm por fase del triángulo.} \quad (49)$$

Impedancia de base para la línea de transmisión de 33 kV

$$= \frac{19\,080}{52,5} = 363 \text{ ohm por fase de la estrella} \quad (50)$$

Pueden determinarse ahora los valores en tanto por uno de la potencia absorbida por la carga y de las impedancias del transformador y la línea. Así, la potencia trifásica se da como 3 000 kVA a un factor de potencia unidad y por tanto es igual a los kVA de base, de donde

$$\text{Carga} = 1,00 + j0 \text{ por unidad de potencia.} \quad (51)$$

La excitación de cada transformador del extremo de carga a tensión normal viene dada por la ecuación 18 como $5,6 - j51$ kVA por fase (corriente retrasada) y por tanto, como fracción de los kVA de base por fase (ec. 41), la excitación es:

$$\frac{5,6 - j51}{1\,000} = 0,006 - j0,051, \text{ por unidad de potencia.} \quad (52)$$

Así, pues, la carga y la excitación de los transformadores del extremo receptor absorben en conjunto

$$1,006 - j0,051, \text{ por unidad de potencia.} \quad (53)$$

De acuerdo con las condiciones del problema, la tensión entre línea y línea es 13 200 V, o sea, 1,00 por uno, y por tanto, si se toma como vector de referencia el representativo de la tensión de carga, el vector corriente I en los transformadores y línea de transmisión es:

$$I = \frac{\text{potencia compleja}}{\text{tensión}} = 1,006 - j0,051 \text{ por unidad de intensidad.} \quad (54)$$

La impedancia equivalente de los transformadores del extremo receptor referida a sus lados de los secundarios conectados en triángulo viene dada por la ecuación (15) por

$$Z_R = 1,71 + j9,33 \text{ ohm}$$

de donde, como fracción de la impedancia de base de las fases del triángulo (ec. 48),

$$Z_R = \frac{1,71 + j9,33}{174} = 0,0098 + j0,0535, \text{ por unidad de impedancia.} \quad (55)$$

Obsérvese que, aun cuando los transformadores del extremo receptor están conectados en triángulo, el valor en tanto por uno de la impedancia triángulo dado por la ecuación (55), es también el valor en tanto por uno de la impedancia estrella equivalente, y el factor $1/3$ que convierte las impedancias triángulo en estrellas equivalentes según la ecuación (13) ya queda explicado por la diferencia entre los valores de base correspondientes a las impedancias conectadas en triángulo y en estrella. Es decir, en función de los valores, en ohm, la ecuación (13) da

$$Z_Y(\text{ohm}) = 1/3 Z_{\Delta}(\text{ohm})$$

Pero,

$$\begin{aligned} Z_Y \text{ de base} &= \frac{V_Y \text{ de base}}{I_Y \text{ de base}} = \frac{(V_{\Delta} \text{ de base})/\sqrt{3}}{\sqrt{3}(I_{\Delta} \text{ de base})} \\ &= \frac{V_{\Delta} \text{ de base}}{3(I_{\Delta} \text{ de base})} = 1/3(Z_{\Delta} \text{ de base}). \end{aligned} \quad (56)$$

Luego,

$$\begin{aligned} Z_Y (\text{por uno}) &= \frac{Z_Y(\text{ohm})}{Z_Y \text{ de base}} = \frac{1/3 Z_{\Delta}(\text{ohm})}{1/3(Z_{\Delta} \text{ de base})} \\ &= \frac{Z_{\Delta}(\text{ohm})}{Z_{\Delta} \text{ de base}} = Z_{\Delta}(\text{por uno}). \end{aligned} \quad (57)$$

► Así pues, el valor en tanto por uno de la impedancia de una fase del triángulo de los transformadores del extremo receptor (ec. 55), es también el valor en tanto por uno de la impedancia de una fase de la estrella equivalente. Además, el factor de conversión a^2 que transforma los valores óhmicos de la impedancia del lado del secundario en sus valores óhmicos referidos al primario, se pueden suprimir cuando se expresan las impedancias en tanto por uno, ya que la razón de la impedancia de base del primario a la del secundario es también igual a a^2 , y por tanto, los valores en tanto por uno de la impedancia son los mismos al referirlos a uno u otro lado *.

Por tanto, la ecuación 55, da también el valor en tanto por uno de la impedancia de la estrella equivalente de los transformadores del extremo receptor referida a los lados de primario. Las conversiones de las ecuaciones (25) y (26) que deben hacerse cuando se utilizan valores en ohm resultan, pues, innecesarias cuando se expresan las impedancias en tanto por uno.

Las impedancias equivalentes de los transformadores del extremo receptor se pueden calcular a partir de los datos en cortocircuito dados en el apartado 2 a, los cuales pueden convertirse a valores en tanto por uno de la siguiente manera:

$$V = \frac{\text{tensión en cortocircuito}}{\text{tensión de base en el } \Delta} = \frac{2\,640}{33\,000} = 0,0800, \text{ por unidad de tensión} \quad (58)$$

$$I = \frac{\text{intensidad en cortocircuito}}{\text{intensidad de base en el } \Delta} = \frac{30,3}{30,3} = 1,00, \text{ por unidad de intensidad} \quad (59)$$

$$P = \frac{\text{kW en cortocircuito}}{\text{kVA de base por fase}} = \frac{9,81}{1\,000} = 0,0098, \text{ por unidad de potencia.} \quad (60)$$

* Véase el apartado 6 del capítulo XIV.

De donde la impedancia equivalente Z_E de los transformadores del extremo emisor es:

$$Z_E = \frac{V}{I} = 0,0800 \text{ por unidad} \quad (61)$$

$$R_E = \frac{P}{I^2} = 0,0098 \text{ por unidad} \quad (62)$$

o sea,

$$X_E = \sqrt{Z_E^2 - R_E^2} = 0,0794 \text{ por unidad} \quad (63)$$

$$Z_E = 0,0098 + j0,0794 \text{ por unidad de impedancia.} \quad (64)$$

Aun cuando los transformadores del extremo emisor estén conectados en triángulo en el lado de sus secundarios, el valor de Z_E dado en la ecuación (64), es también igual al valor en tanto por uno de la impedancia de la estrella equivalente.

La impedancia de la línea de transmisión viene dada por

$$Z_{\text{línea}} = 7,3 + j\,18,2 \text{ ohm}$$

o como fracción de la impedancia de base de una fase de la estrella (ec. 50),

$$\begin{aligned} Z_{\text{línea}} &= \frac{7,3 + j\,18,2}{363} \\ &= 0,0201 + j\,0,0501, \text{ por unidad de impedancia.} \end{aligned} \quad (65)$$

Por tanto, el sistema se reduce al presentado en la figura 3 d, que comprende una impedancia en serie cuyo valor en tanto por uno es

$$Z_E + Z_{\text{línea}} + Z_R = 0,040 + j\,0,183, \text{ por unidad de impedancia.} \quad (66)$$

Puede ahora determinarse la tensión del generador en tanto por uno sumando la caída de tensión en tanto por uno en la impedancia del sistema con la tensión en tanto por uno en la carga; así,

$$\begin{aligned} IZ &= (1,006 - j\,0,051)(0,040 + j\,0,183) \\ &= 0,049 + j\,0,182, \text{ por unidad de tensión} \end{aligned} \quad (67)$$

$$V = 1,000 + j\,0 \quad (68)$$

$$E = \text{suma} = 1,049 + j\,0,182 \quad (69)$$

$$E = 1,065, \text{ por unidad de tensión} \quad (70)$$

Por tanto, la tensión en barras de la subcentral deberá ser 1,065 multiplicado por su valor de base, o sea,

$$1,065 \times 110\,000 = 117\,000 \text{ V, entre línea y línea.} \quad (71)$$

Este valor concuerda con la solución dada en la ecuación (39).

PROBLEMAS

1. Una central suministra potencia mediante transformadores elevadores a través de una línea de transmisión y de transformadores reductores situados al final de la línea, a una subcentral. La tensión nominal de la línea en la central generadora es de 6 600 V; en la línea de transmisión, 110 000 V; y en la subcentral, 11 000 V. En la estación genera-

dora hay dos bancos de transformadores en triángulo-estrella conectados en paralelo, teniendo cada transformador una potencia nominal de 5 000 kVA. En la subcentral hay tres bancos de transformadores iguales en estrella triángulo conectados en paralelo, teniendo cada uno de los transformadores una potencia nominal de 3 333 kVA. Los datos en cortocircuito de uno de los transformadores de 5 000 kVA son:

Potencia de entrada = 35,0 kW
Tensión = 790 V
Intensidad = 758 A

Los datos en cortocircuito de uno de los transformadores de 3 333 kVA son:

Potencia de entrada = 18,6 kW
Tensión = 4 850 V
Intensidad = 52,4 A

Las corrientes de excitación de los transformadores son despreciables. La línea de transmisión puede representarse por el circuito equivalente de la figura 4.

Considérese el funcionamiento para una carga de 30 000 kVA a un factor de potencia inductivo de 0,92 y 11 000 V.

a) Indicar el circuito equivalente de una fase del sistema total (línea a neutro) referido a la línea de 110 000 V.

b) ¿Cuál es la tensión de la línea en la central generadora?

c) ¿Cuál es la intensidad de la corriente de la línea en la central generadora?

d) ¿Cuál es el factor de potencia en la central generadora?

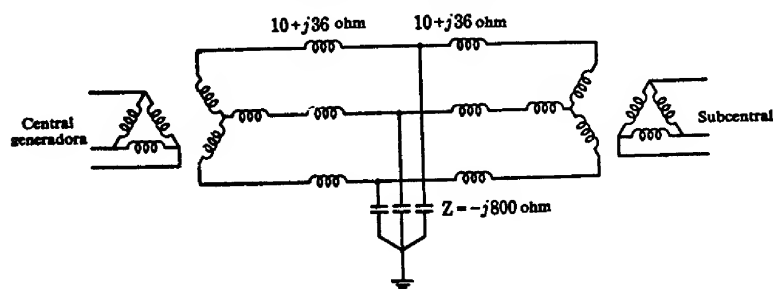


FIG. 4. Circuito de transmisión de potencia, problema 1

2. Ocho bancos triángulo-estrella, cada uno de ellos constituido por tres transformadores monofásicos de 11 500 kVA, están conectados en paralelo entre las barras de 13,8 kV y 230 kV de una central hidroeléctrica. Estos transformadores tienen una resistencia del 0,50 %, una reactancia del 10,0 %, una pérdida en el núcleo de 0,36 %, y una corriente de excitación del 5,0 %. Determinar, en las condiciones de plena carga, el rendimiento y la regulación de estos transformadores para

- Factor de potencia 0,80 carga inductiva.
- Factor de potencia 0,80 carga capacitiva.
- Factor de potencia unidad.

3. Una carga trifásica equilibrada que funciona a 2 400 V debe alimentarse a través de transformadores por un sistema trifásico equilibrado de tensión nominal entre línea

y línea de 13 800 V. Los transformadores deben conectarse en estrella-triángulo, siendo el lado de alta tensión el conectado en estrella. La carga tiene un trabajo de régimen diario dado aproximadamente por los siguientes datos:

Horas	Carga	Factor de potencia
5	1 200 kVA	0,88 inductivo
3	900 kVA	0,91 inductivo
2	300 kVA	0,65 inductivo
14	0

a) Determinar la mínima potencia nominal de los transformadores monofásicos standard que sean satisfactorios para esta aplicación.

b) Hallar el rendimiento energético del banco si los transformadores tienen una impedancia equivalente en tanto por uno de $0,0082 + j 0,040$ y una pérdida en el núcleo en tanto por uno de 0,012. Supóngase que la tensión en la carga se mantiene constante e igual a 2 400 V.

4. Una fábrica consume potencia trifásica suministrada por una subcentral situada a una cierta distancia como se indica en la figura 5. Los transformadores monofásicos conectados en estrella-triángulo en la carga tienen cada uno de ellos una potencia nominal de 333 kVA e impedancias equivalentes de $0,145 + j 0,780$ ohm, referidas al lado de alta tensión. La línea de distribución tiene una impedancia por hilo de $0,140 + j 0,510$ ohm.

Suponiendo puramente reactivas las impedancias de los transformadores de la subcentral, ¿cuál sería el valor límite de la impedancia equivalente de estos transformadores si la regulación de tensión de la línea y los transformadores debe mantenerse al 10% para plena carga a un factor de potencia 0,9?

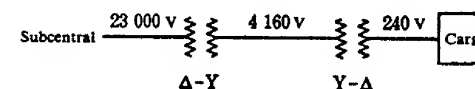


FIG. 5. Sistema de distribución, problemas 4 y 5

5. Considérese en el sistema de distribución del problema 4 que los transformadores de la subcentral tienen, cada uno de ellos, una potencia nominal de 500 kVA y una impedancia equivalente de $0,081 + j 0,710$ ohm referida a sus lados de baja tensión. Dibujar el circuito monofásico equivalente (línea a neutro) y convertir todos los valores en tantos por uno sobre una base trifásica de 1 500 kVA.

Fenómenos de armónicos en los circuitos trifásicos

En los transformadores monofásicos suelen despreciarse los armónicos de la corriente de excitación a causa de su pequeñez. En muchos problemas en los que intervienen bancos trifásicos de transformadores pueden, también, despreciarse como se hizo en el capítulo XXI, donde las corrientes de excitación se representan por ondas sinusoidales. Sin embargo, las peculiaridades de los fenómenos de armónicos en sistemas trifásicos pueden, en algunas ocasiones, ejercer efectos importantes sobre las características del sistema, particularmente en el comportamiento de los bancos estrella-estrella de transformadores monofásicos. Además, a pesar de su tamaño relativamente pequeño, los armónicos de la corriente de excitación en un banco trifásico de transformadores pueden, en ciertas condiciones, inducir en los circuitos de comunicaciones próximas tensiones que interfieran seriamente con el funcionamiento adecuado de dichos circuitos. Los técnicos encargados de sistemas de potencia y de circuitos de comunicaciones deberán estar preparados para impedir situaciones de ese tipo. A continuación se estudiarán estos fenómenos de armónicos.

1. PRIMARIOS CONECTADOS EN TRIÁNGULO

De momento, consideremos tres transformadores con sus primarios conectados en triángulo, estando sus secundarios en circuito abierto y no conectados entre sí.

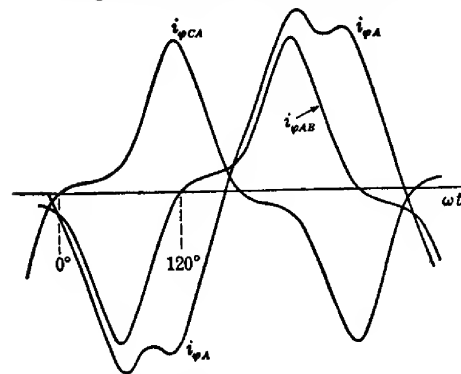


Fig. 1. Formas de onda de las corrientes de excitación en dos fases del triángulo y en una de las líneas que alimenta un grupo de primarios conectados en triángulo

Si los transformadores son exactamente iguales y están equilibradas las tensiones de la línea, las formas de onda de las corrientes de excitación de los transformadores son iguales, pero están defasadas en 120°. Si las tensiones de línea varían sinusoidalmente, las formas de onda de las corrientes de excitación tienen la forma general indicada en la figura 9 del capítulo VI. Así pues, las formas de onda de las corrientes de excitación $i_{\varphi_{CA}}$ e $i_{\varphi_{AB}}$ en dos de los transformadores son de la forma indicada en la figura 1 por las ondas picudas.

La corriente de excitación suministrada por la línea A es:

$$i_{\varphi_A} = i_{\varphi_{AB}} - i_{\varphi_{CA}} \quad (1)$$

y está representada por la onda con doble cumbre. Obsérvese que la forma de onda de las corrientes de excitación en las líneas es muy diferente de la forma de onda de las corrientes de excitación en los transformadores conectados en triángulo.

En las dos próximas secciones de este apartado se estudian las dos razones de esta diferencia.

1a. *Terceros armónicos.* Consideremos en primer lugar los terceros armónicos de las corrientes en el triángulo. En la figura 2a pueden verse tres corrientes i_{CA} , i_{AB} , i_{BC} , que tienen formas de onda exactamente iguales y defasadas en un tercio de período, o sea 120°. Estas corrientes contienen terceros armónicos que dan lugar

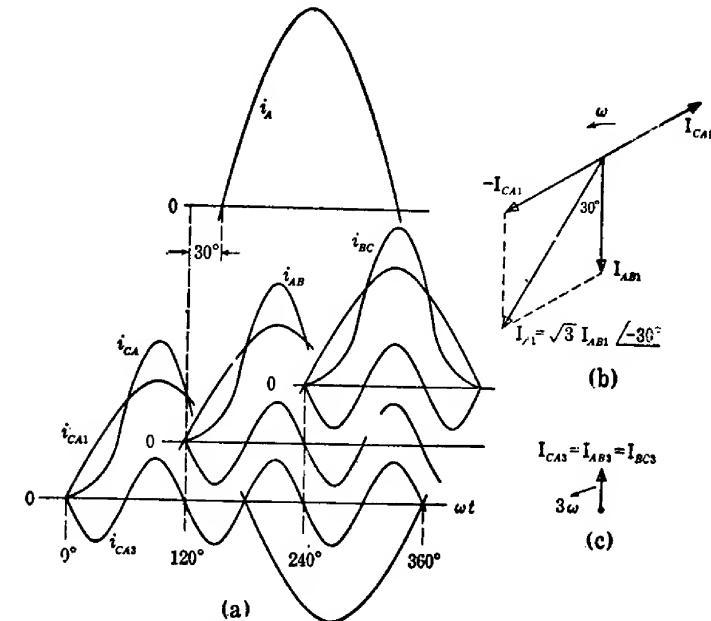


Fig. 2. Corrientes del triángulo equilibradas y sus terceros armónicos; a) formas de onda b) diagrama vectorial de los armónicos fundamentales y c) diagrama vectorial de los terceros armónicos

a una forma de onda picuda, análoga a la de las corrientes de excitación. Como i_{AB} está retrasada respecto a i_{CA} en un tercio de período, el tercer armónico de i_{AB} está retrasado respecto al tercer armónico de i_{CA} en tres tercios de período, o sea un período completo del tercer armónico, según se ve en la figura 2a. Los terceros armónicos de las corrientes se hallan, pues, en concordancia de fase *, según puede verse también en el diagrama vectorial de la figura 2c. Si i_{AB} e i_{CA} son las corrientes que circulan por las fases AB y CA del triángulo, la corriente i_A en la línea es su diferencia, según indica la ecuación (1). La diferencia entre las componentes fundamentales está representada vectorialmente en la figura 2b. En cambio, la diferencia entre los terceros armónicos instantáneamente iguales es cero.

* En la terminología de las componentes simétricas se llama a los terceros armónicos componentes de secuencia cero. En el apartado 4 del capítulo XXIV se realiza un breve estudio de las aplicaciones de la teoría de las componentes simétricas a los transformadores.

► Por tanto, cuando los transformadores son iguales y las tensiones están equilibradas, no podrán circular por las líneas terceros armónicos de las corrientes.◀

No obstante, si las tensiones de línea varían sinusoidalmente, las corrientes de excitación de los transformadores conectados en triángulo deberán tener terceros armónicos a causa de la no linealidad de las características magnéticas de los núcleos*. Estos terceros armónicos, por ser iguales en cada instante y de igual sentido a lo largo del triángulo, no hacen más que circular por los primarios del triángulo, pero no aparecen en las líneas. Con el mismo razonamiento puede demostrarse que todos los armónicos de orden múltiplo del tercero —sexto, noveno, etc.— se comportan en los circuitos trifásicos de igual forma que el tercero. Por ejemplo, el defasaje entre los armónicos novenos es de nueve tercios, o sea tres períodos enteros, por lo que dichos armónicos novenos se hallan en concordancia de fase y se comportan como los terceros armónicos.

► Así pues, cuando el circuito está perfectamente equilibrado, por un triángulo podrán circular los armónicos tercero, sexto, noveno, etc. de las corrientes, sin que circulen por las líneas que alimentan al triángulo.◀

Aun cuando tres transformadores de igual diseño pueden tener características casi iguales, es imposible alcanzar una identidad exacta en los materiales y conjuntos, y en consecuencia, por las líneas podrán circular corrientes que tengan un tercer armónico débil y múltiplos del tercer armónico también pequeños, originados por las desigualdades en las características de excitación de los tres transformadores. Corrientemente, sólo aparecen armónicos impares.

1b. *Quintos armónicos.* Las formas de onda de las corrientes que circulan por el triángulo y por la línea no sólo difieren en que las primeras tienen tercer armónico y las segundas no (para transformadores exactamente iguales), sino también por una segunda razón que concierne a los efectos del quinto armónico de las corrientes de excitación. En el ejemplo del apartado 10 del capítulo VI, la intensidad eficaz del quinto armónico es aproximadamente igual al 10 % de la intensidad eficaz de la corriente de excitación y el quinto armónico se suma al valor de pico. En la figura 3a pueden verse dos corrientes picudas iguales, i_{CA} e i_{AB} que contienen quintos armónicos. Como i_{AB} está retrasada respecto a i_{CA} en un tercio de período, el quinto armónico de i_{AB} está retrasado respecto al quinto armónico de i_{CA} en cinco tercios de período de los quintos armónicos, como se indica en la figura 3a. Esto equivale a un retraso de dos tercios, o a un adelanto de un tercio de período del quinto armónico.

► Así pues, el orden de fases para los quintos armónicos es el *inverso* del orden de fases para los armónicos fundamentales**. Es decir, cuando el armónico fundamental i_{AB1} está *retrasado* respecto al armónico fundamental i_{CA1} en un tercio de su período, el quinto armónico i_{AB5} está *adelantado* respecto al quinto armónico i_{CA5} en un tercio de su período de quinto armónico. En las figuras 3b y 3c pueden verse estas relaciones de fase representadas vectorialmente.◀

* En el apartado 10 del capítulo VI se vio que la corriente de excitación de un transformador normal para sistema de potencia debe tener un tercer armónico cuya intensidad es alrededor del 40 % de la del armónico fundamental, cuando el flujo varía sinusoidalmente.

** En la terminología de las componentes simétricas, los quintos armónicos son corrientes de secuencia negativa.

Si las corrientes i_{AB} e i_{CA} están constituidas por los armónicos fundamental y quinto de las corrientes de excitación de dos de los transformadores conectados en triángulo, la corriente i_A que circula por la línea es su diferencia, según indica la

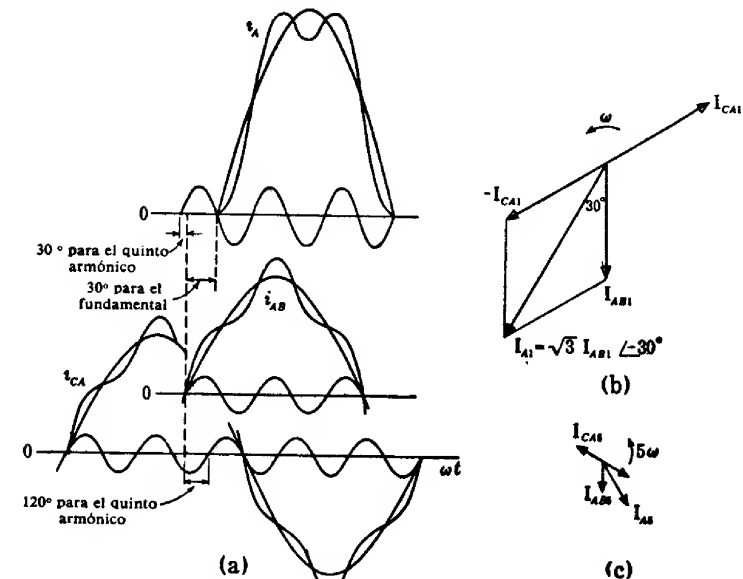


FIG. 3. Corrientes en la línea y en el triángulo que contienen quintos armónicos; a) formas de onda, b) diagrama vectorial de los armónicos fundamentales, c) diagrama vectorial de los quintos armónicos

ecuación (1). En los diagramas vectoriales puede verse que el armónico fundamental de la corriente de línea i_A tiene una intensidad $\sqrt{3}$ veces mayor que el armónico fundamental de las corrientes en el triángulo y está *retrasado* respecto al armónico fundamental de i_{AB} en 30° , o sea, un doceavo de período, mientras el quinto armónico de i_A es $\sqrt{3}$ veces mayor que el quinto armónico de las corrientes del triángulo, pero está *adelantado* respecto al quinto armónico de i_{AB} en 30° del quinto armónico, es decir, en un doceavo del período del quinto armónico. Así pues, el defasaje entre armónicos fundamental y quinto de las corrientes de línea es diferente del defasaje entre dichas componentes de las corrientes del triángulo y, aun cuando las corrientes de la línea y del triángulo contengan los armónicos fundamental y quinto en la misma proporción, sus formas de onda son diferentes a causa de la rotación de fase. Las corrientes en el triángulo son ondas picudas mientras que las corrientes en la línea son ondas con cumbre doble, según se indica en las figuras 1 y 3a.

1c. *Resumen de los defasajes entre armónicos.* Puede verse fácilmente que el orden de fases de los armónicos fundamental, cuarto, séptimo, etc., en un circuito trifásico es el mismo; que el orden de fases de los armónicos segundo, quinto, octavo, undécimo, etc., es el inverso del orden de fases de los armónicos fundamentales; y

que los armónicos tercero, sexto, noveno, etc., están en concordancia de fase. Si es *ABC* el orden de las fases de los armónicos fundamentales, estos hechos se resumen en la tabla siguiente, la cual no sólo es aplicable a los armónicos de las ondas de corriente, sino también a los armónicos de las tensiones. Corrientemente sólo existen armónicos impares.

DEFASAJES ENTRE LOS ARMÓNICOS EN CIRCUITOS TRIFÁSICOS

Armónicos	Orden de las fases
1, 4, 7, 10, 13, etc.	<i>ABC</i> (secuencia positiva)
2, 5, 8, 11, 14, etc.	<i>CBA</i> (secuencia negativa)
3, 6, 9, 12, 15, etc.	en fase (secuencia cero)

Id. *Intensidades eficaces de las corrientes en el triángulo y en la línea.* Debido a la ausencia de terceros armónicos en las corrientes de línea, la intensidad eficaz de las corrientes de línea en vacío no es $\sqrt{3}$ por la intensidad eficaz de la corriente de excitación de los transformadores conectados en triángulo, sino que es menor. Así pues, si $I_{\varphi 1}$, $I_{\varphi 3}$, etc., son las intensidades eficaces de los armónicos en los tres transformadores exactamente iguales, la intensidad eficaz $I_{\varphi \Delta}$ de las corrientes de excitación de los transformadores es:

$$I_{\varphi \Delta} = \sqrt{I_{\varphi 1}^2 + I_{\varphi 3}^2 + I_{\varphi 5}^2 + \dots} \quad (2)$$

Como las intensidades eficaces de los armónicos de la corriente de línea son $\sqrt{3}$ veces mayores que las intensidades de los armónicos correspondientes en las corrientes del triángulo, pero en la corriente de línea no existen ni el tercer armónico ni armónicos de orden múltiplo del tercero, la intensidad eficaz $I_{\varphi \text{ línea}}$ de las corrientes de línea es:

$$I_{\varphi \text{ línea}} = \sqrt{3} \sqrt{I_{\varphi 1}^2 + 0 + I_{\varphi 5}^2 + \dots} \quad (3)$$

Si se desprecian los armónicos de orden múltiplo del tercero,

$$I_{\varphi \text{ línea}} = \sqrt{3} \sqrt{I_{\varphi \Delta}^2 - I_{\varphi 3}^2} \quad (4)$$

En el ejemplo del apartado 10 del capítulo VI, la intensidad eficaz del tercer armónico era el 41,5 % de la de la corriente de excitación del transformador. Así pues, si se conectan en triángulo tres de dichos transformadores, la corriente en la línea sería:

$$\begin{aligned} I_{\varphi \text{ línea}} &= \sqrt{3} \sqrt{I_{\varphi \Delta}^2 - (0,415 I_{\varphi \Delta})^2} \\ &= I_{\varphi \Delta} \sqrt{3} \sqrt{1 - 0,415^2} \\ &= 0,91 \sqrt{3} I_{\varphi \Delta} \end{aligned} \quad (5)$$

Es decir, como en el triángulo hay terceros armónicos pero no en las líneas, la razón de las intensidades de las corrientes de línea a las de las corrientes de las fases en triángulo es menor que el valor $\sqrt{3}$ aplicable a corrientes sinusoidales. Aun cuando

este efecto de los terceros armónicos de las corrientes rara vez tiene mucha importancia práctica y a menudo se desprecia, explica ciertos fenómenos que a primera vista pudieran parecer enigmáticos. Por ejemplo, cuando tres transformadores iguales se conectan en triángulo a una línea trifásica equilibrada y se miden las tensiones e intensidades de la línea, la potencia trifásica de excitación $\sqrt{3} V_{\text{línea}} I_{\text{línea}}$ es menor que el triple de los volt-ampere de excitación de un sólo transformador que se obtendrían en un ensayo monofásico a la misma tensión. Sin embargo, la potencia trifásica de entrada total debe ser la suma de las pérdidas en los núcleos de los tres transformadores. Así pues, el factor de potencia trifásico en vacío de un banco conectado en triángulo es superior en un pequeño tanto por ciento al factor de potencia monofásico en vacío de las unidades.

1e. *Conexiones triángulo-estrella y triángulo-triángulo.* Los terceros armónicos de las corrientes de excitación de los primarios conectados en triángulo originan caídas de tensión de la frecuencia del tercer armónico en la impedancia de fuga de cada transformador. Como la tensión sinusoidal aplicada es igual a la caída de tensión debida a la impedancia de fuga del primario más la fuerza contraelectromotriz generada por el flujo mutuo, esta fuerza electromotriz debe contener un tercer armónico igual y opuesto al tercer armónico de la caída de tensión en la impedancia de fuga y, en consecuencia, el flujo mutuo debe ajustarse por sí mismo de manera que genere esta pequeña tensión del tercer armónico, la cual suele ser solamente de un 0,1 % de la tensión nominal. Por tanto, en los secundarios se generará también una pequeña fuerza electromotriz de la frecuencia del tercer armónico. Como las formas de onda de las fuerzas electromotrices generadas en los tres transformadores iguales son iguales pero defasadas un tercio de período, los terceros armónicos de las fuerzas electromotrices de los secundarios de los tres transformadores serán iguales y defasadas tres tercios de período del tercer armónico, y por tanto están en concordancia de fase.

Si se conectan los secundarios en estrella con el neutro aislado, los terceros armónicos de la corriente de excitación necesarios para permitir que las variaciones casi sinusoidales de los flujos mutuos queden confinadas a los primarios en triángulo y las caídas de tensión en la impedancia de fuga de los primarios, aparecen como pequeñas componentes de las tensiones de los secundarios respecto al neutro pero, según se ve en el apartado 2d, estos terceros armónicos no se hallan presentes en las tensiones entre línea y línea.

Sin embargo, si se conectan en triángulo los secundarios, los terceros armónicos de las tres tensiones de secundario están en fase en el mismo sentido a lo largo del triángulo y por tanto producen una débil corriente de la frecuencia del tercer armónico en el triángulo de secundarios. Así pues, los terceros armónicos de las corrientes de excitación se encuentran tanto en los primarios como en los secundarios en triángulo, y las fuerzas magnetomotrices de la frecuencia del tercer armónico necesarias para permitir las variaciones casi sinusoidales de los flujos mutuos las crean los efectos combinados de estas corrientes de excitación de los primarios y de los secundarios. Puede demostrarse que las intensidades de los terceros armónicos de las corrientes de excitación en los triángulos de primarios y de secundarios son inversamente proporcionales a las impedancias de fuga de primario y secundario a la frecuencia del tercer armónico, estando referidas a un mismo lado las intensidades y las impedancias.

2. PRIMARIOS CONECTADOS EN ESTRELLA

Puesto que, según se vio en el apartado 2 del capítulo XXI, las características de la conexión en estrella se hallan muy influidas por el aislamiento del neutro de los primarios, el estudio que sigue se subdivide según que el neutro del primario está aislado o conectado al neutro del generador y según que los secundarios estén conectados en estrella o en triángulo.

En determinadas circunstancias, las corrientes que circulan por una línea trifásica de potencia pueden inducir tensiones nocivas en circuitos paralelos de comunicaciones. En este apartado se incluye un estudio breve de dicha interferencia inductiva porque las corrientes perjudiciales que circulan por las líneas de potencia suelen ser los terceros armónicos de las corrientes de excitación, generados en los devanados en estrella de transformadores cuyo neutro está conectado al neutro de algún otro sistema.

2a. *Conexión estrella-estrella: Neutro de primarios conectado al neutro del generador.* Consideremos, en primer lugar, el ejemplo sencillo de un banco estrella-estrella de tres transformadores monofásicos exactamente iguales cuyos secundarios estén en circuito abierto. El neutro de los primarios está conectado al neutro de un generador trifásico conectado en estrella cuyas tensiones son sinusoidales y está equilibradas, como se indica en la figura 4a. En la figura 4b pueden verse los oscilogramas

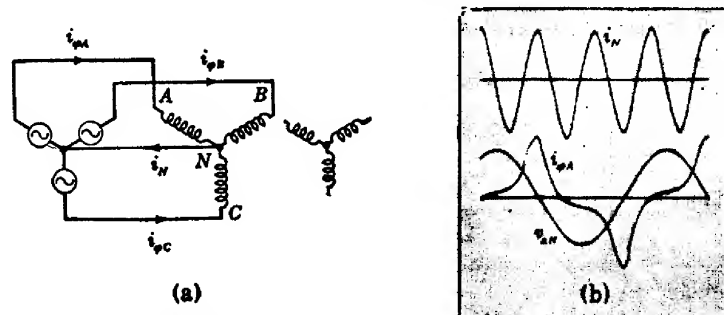


FIG. 4. Banco estrella-estrella de transformadores; a) conexiones, y b) oscilogramas de la tensión V_{AN} del primario respecto al neutro, de la corriente de excitación $i_{\phi A}$ y de la corriente i_N que circula por el neutro de los primarios

gramas de la tensión v_{AN} aplicada a uno de los transformadores, de la corriente $i_{\phi A}$ de excitación de este transformador y de la corriente i_N que circula por el hilo neutro. Cuando la tensión aplicada es sinusoidal, la corriente de excitación sólo contiene armónicos impares, siendo el tercero el más importante de los superiores. Si son iguales los tres transformadores y están equilibradas las tensiones, las corrientes de excitación $i_{\phi A}$, $i_{\phi B}$ e $i_{\phi C}$ son iguales salvo en la fase, pues están defasadas en 120° .

La corriente que circula por el hilo neutro N es la suma de las corrientes $i_{\phi A}$, $i_{\phi B}$ e $i_{\phi C}$. Cuando los transformadores son iguales y las tensiones están equilibradas, los armónicos fundamentales de las tres corrientes de excitación son tres ondas sinusoidales de igual amplitud defasadas 120° ; su suma es, pues, nula y por tanto, por el hilo neutro no circula ninguna corriente de frecuencia igual a la fundamental. En cambio, los terceros armónicos de las tres corrientes de excitación están en con-

cordancia de fase (según se vio en el apartado 1a), por lo que el tercer armónico de la corriente que circula por el hilo neutro tiene una intensidad triple de la de los terceros armónicos de las corrientes de excitación de los transformadores.

En la tabla del apartado 1c puede verse que solamente están en fase los terceros armónicos y los de orden múltiplo del tercero; todos los demás armónicos de las tres corrientes de excitación están defasados 120° .

► Por tanto, cuando los transformadores son iguales y están equilibradas las tensiones, la corriente que circula por el neutro sólo contiene los armónicos impares de frecuencias múltiplos de la del tercero. Los armónicos a partir del noveno suelen ser muy débiles, por lo que la corriente que circula por el neutro es aproximadamente una onda sinusoidal de frecuencia triple cuya intensidad eficaz es aproximadamente igual al triple de la intensidad eficaz del tercer armónico de las corrientes de excitación de los transformadores. ◀

En el oscilograma de la figura 4b puede verse este hecho. La pequeña componente de frecuencia fundamental de la corriente i_N que circula por el neutro se debe a pequeñas desigualdades entre las características de excitación de los tres transformadores.

Los terceros armónicos de las corrientes de excitación producen pequeñas caídas de tensión de la frecuencia del tercer armónico en las impedancias de fuga de los primarios de los transformadores y por tanto, cuando varían sinusoidalmente las tensiones respecto al neutro aplicadas a los primarios, las fuerzas electromotrices inducidas por el flujo mutuo contienen terceros armónicos débiles. Estos aparecen como componentes pequeñas de las tensiones de los secundarios respecto al neutro si bien no se hallan presentes en las tensiones entre línea y línea de los secundarios, según se ve en la parte d) de este apartado.

Para mantener un sentido de la proporción adecuado, convendrá hacer un comentario acerca del orden de magnitud de las corrientes de excitación. La corriente de excitación en un transformador ordinario para sistemas de potencia suele ser un 5 % de la intensidad nominal y como el tercer armónico es un 40 % de la corriente de excitación, resulta ser un $0,4 \times 5$, ó sea un 2 % de la intensidad nominal. La corriente que circula por el neutro tiene, pues, una intensidad del mismo orden de magnitud que las corrientes de excitación que circulan por los tres hilos de la línea, siendo todas estas intensidades iguales solamente a un pequeño tanto por ciento de la intensidad nominal.

Aun cuando las características de un banco estrella-estrella suelen ser satisfactorias cuando se conecta el neutro de los primarios al neutro del generador, los terceros armónicos de las corrientes de línea resultantes de esta conexión pueden ocasionar una interferencia inductiva molesta en los circuitos de comunicaciones paralelos según se verá a continuación.

2b. *Interferencia inductiva ocasionada por el tercer armónico de las corrientes de excitación.* Aun cuando la intensidad eficaz del tercer armónico de la corriente de excitación suele ser solamente un 2 % de la intensidad nominal a plena carga de las corrientes de línea, el efecto inductivo de las corrientes de excitación sobre un circuito de comunicaciones paralelo al circuito de potencia puede ser mayor que el efecto de las corrientes trifásicas equilibradas de plena carga que circulan por las líneas de potencia. Por ejemplo, consideremos la figura 5 en la que puede

verse la línea de potencia trifásica ABC y una línea telefónica ab descubierta. Para mayor sencillez, supondremos que ambos circuitos están en un mismo plano. Los

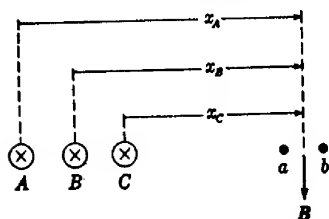


Fig. 5. Circuitos paralelos de potencia y de comunicaciones

sentidos de las corrientes en la línea de potencia los supondremos positivos hacia afuera del observador, tal como indican las aspas que representan las colas de flechas dirigidas en el sentido positivo. Las corrientes que circulan por la línea de potencia crean un campo magnético que abraza al circuito de comunicación y que está representado por el vector B inducción magnética resultante, que es la suma de las componentes creadas por cada corriente actuando por su cuenta. Según la ley de Biot y Savart, las inducciones magnéticas componentes son proporcionales a las intensidades instantáneas i_A , i_B , i_C de las corrientes e inversamente proporcionales a las distancias x_A , x_B , x_C de los conductores de la línea de potencia hasta el punto en cuestión; así,

$$B = \mu_0 \left(\frac{2i_A}{x_A} + \frac{2i_B}{x_B} + \frac{2i_C}{x_C} \right), \quad (6)$$

donde μ_0 es la permeabilidad del vacío. Esta ecuación es válida para cualquier sistema de unidades no racionalizado. El flujo que abraza al circuito de comunicación es la integral extendida al área encerrada por los dos hilos de comunicación, de la inducción magnética B .

Si están equilibradas las corrientes de la línea de potencia, las corrientes sinusoidales defasadas en 120° (tales como los armónicos fundamentales, quinto, séptimo, etcétera de las corrientes trifásicas equilibradas) dan una suma nula en todo instante y si fueran iguales las distancias x_A , x_B , x_C de los tres hilos de fase al circuito de comunicación, la suma de las inducciones magnéticas creadas por las corrientes también sería nula. Es decir, las inducciones magnéticas componentes creadas por las corrientes de fase tienden a contrarrestarse entre sí, dependiendo la inducción magnética resultante de las diferencias entre las distancias x_A , x_B y x_C . La inducción magnética resultante creada por los armónicos equilibrados fundamental, quinto, séptimo, etc., de las corrientes de la línea de potencia es, pues, relativamente pequeña cuando las distancias x_A , x_B , x_C son grandes frente a las separaciones entre conductores de la línea de potencia.

No obstante, si la línea de potencia suministra la excitación a un banco estrella-estrella de transformadores cuyo neutro de los primarios está conectado al neutro del generador, las corrientes que circulan por la línea de potencia contienen terceros armónicos. Para mayor sencillez, supongamos que la conexión entre los neutros se realiza a través del suelo y que el efecto inductivo del tercer armónico de la corriente de tierra es despreciable debido a la altura a que se encuentran sobre el suelo los circuitos. Los terceros armónicos de las tres corrientes de línea están en fase y por tanto los valores instantáneos de las inducciones magnéticas debidas a los terceros armónicos se suman directamente*. Por tanto, terceros armónicos relativa-

* Esto es también cierto para inducciones magnéticas componentes creadas en determinadas condiciones de desequilibrio, tales como la ilustrada a la derecha de la avería de la figura 3

mente débiles de las corrientes trifásicas pueden enviar a través del circuito de comunicación un flujo mayor que el debido a los armónicos fundamentales equilibrados, mucho más intensos. Además, la variación en unidad de tiempo del flujo del tercer armónico es triple que la variación del flujo del armónico fundamental y por tanto la tensión de frecuencia triple inducida en el circuito de comunicación por un flujo dado del tercer armónico es tres veces mayor que la tensión de frecuencia fundamental que induciría un flujo fundamental igual. Además, la respuesta de un receptor telefónico y del oído a una señal de frecuencia triple de la fundamental de un sistema ordinario de potencia es mayor que la respuesta a una señal de frecuencia fundamental de igual intensidad. Todos estos factores tienden a que la interferencia inductiva debida a terceros armónicos relativamente débiles de la línea de potencia sea más perjudicial que la interferencia debida a armónicos fundamentales equilibrados mucho más intensos.

Cuando sea necesario exponer un circuito de comunicación al aire libre a los efectos inductivos de una línea de potencia, puede reducirse la interferencia traspasando adecuadamente la línea de comunicación. También es conveniente emplear conexiones de los transformadores del sistema de potencia que no permitan la circulación de los terceros armónicos de las corrientes de excitación por el circuito de potencia. Por todo lo anterior, pueden no resultar convenientes los primarios conectados en estrella con su neutro conectado al del generador.

2c. *Conexión estrella-triángulo.* Consideremos un banco de tres transformadores iguales cuyos primarios estén conectados en estrella y cuyos secundarios estén conectados en serie a punto para conectar en triángulo, tal como se indica en la figura 6; es decir, el triángulo está abierto por un vértice. El neutro de los primarios se conecta al neutro de un generador de tensiones sinusoidales trifásicas conectado en estrella. En el lado de los primarios, el banco se comporta de igual manera que el banco en estrella-estrella estudiado en la parte a) de este apartado; es decir, las tensiones de los primarios varían sinusoidalmente, cada transformador recibe su corriente de excitación de las líneas de los primarios y los terceros armónicos de las corrientes de excitación regresan al generador por el hilo neutro, teniendo las formas de onda indicadas por los oscilogramas de la figura 4b.

Los terceros armónicos de las corrientes de excitación crean pequeñas caídas de tensión de la frecuencia de los terceros armónicos en las impedancias de fuga de los transformadores y por tanto las fuerzas electromotrices inducidas por el flujo mutuo contienen terceros armónicos débiles que aparecen como componentes pequeñas de las tensiones de los secundarios de los transformadores. Como las fuerzas

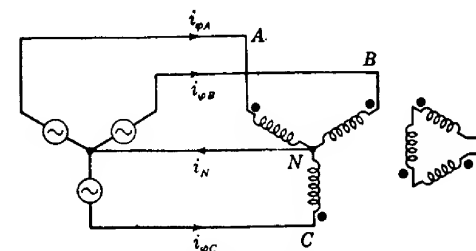


Fig. 6. Banco estrella-triángulo de transformadores con el triángulo abierto por un vértice

del capítulo XXIV, donde las corrientes de línea tienen igual intensidad y están en fase. En el análisis de circuitos trifásicos por el método de las componentes simétricas, dichas corrientes reciben el nombre de componentes de secuencia cero. Véase el apartado 4 del capítulo XXIV.

electromotrices de la frecuencia de los terceros armónicos están en fase en los tres transformadores, la tensión en el vértice abierto del triángulo de secundarios contiene un tercer armónico triple de la fuerza electromotriz inducida en cada secundario con la frecuencia del tercer armónico. Como los armónicos fundamentales, quinto, séptimo, etc., de las tensiones en los tres secundarios son de igual magnitud y están defasados 120° , sus sumas son nulas y por tanto entre los extremos del vértice del triángulo no existirán tensiones de estas frecuencias. Luego, si se desprecian los armónicos de orden superior al séptimo, la tensión en el vértice abierto del triángulo de secundarios será el triple de la fuerza electromotriz de la frecuencia del tercer armónico generada en cada secundario, cuando sean iguales los transformadores y las tensiones aplicadas estén equilibradas. Aun cuando esta tensión de la frecuencia del tercer armónico suele ser muy pequeña frente a las tensiones de secundario entre los terminales de cada transformador, cuando se cierra el triángulo, las fuerzas electromotrices de secundario de la frecuencia del tercer armónico tienen un efecto importante sobre los fenómenos de excitación. Vamos a estudiar esto.

Si cerramos el triángulo de secundarios, las fuerzas electromotrices de los secundarios de la frecuencia del tercer armónico crean una corriente de dicha frecuencia que circula por el triángulo de secundarios. La acción combinada de las corrientes de excitación de la frecuencia del tercer armónico que circulan por primario y secundario crean las fuerzas magnetomotrices de la frecuencia del tercer armónico necesarias para permitir variaciones casi sinusoidales del flujo en los tres transformadores, como ocurre en la conexión triángulo-triángulo estudiada en el apartado 1e, por lo que al cerrar el triángulo de secundarios, se reducen los terceros armónicos de las corrientes de los primarios.

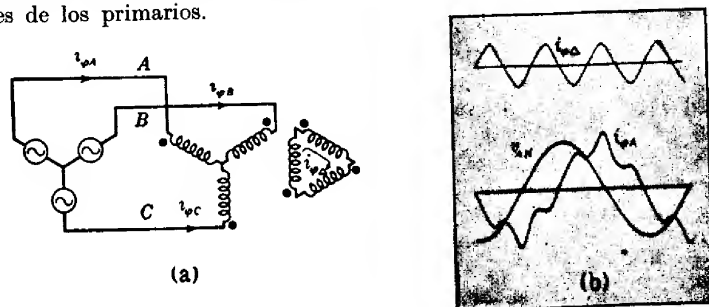


Fig. 7. Banco estrella-triángulo con neutro aislado; a) conexiones, y b) oscilogramas de la tensión v_{AN} respecto al neutro, corriente de excitación i_{pA} y corriente de excitación i_{pA} en el triángulo de secundarios

Si se cierra el triángulo de secundarios y se desconecta el hilo neutro, como en la figura 7a, las formas de onda de la tensión v_{AN} respecto al neutro, de la corriente de excitación i_{pA} en uno de los primarios y la corriente de excitación i_{pA} en el triángulo de secundarios son las indicadas por los oscilogramas de la figura 7b. Los terceros armónicos de las corrientes de los primarios ya no pueden existir, por estar interrumpido su camino de retorno por el hilo neutro. Así, pues, la forma de onda de la corriente de excitación i_{pA} de la figura 7b es distinta de la forma de onda de i_{pA} de la figura 4b, siendo su diferencia principal la ausencia de terceros armónicos

cuando está aislado el neutro de la estrella. El triángulo cerrado de secundarios, en cambio, proporciona un camino para los terceros armónicos de las corrientes, y las componentes de la frecuencia del tercer armónico de las fuerzas magnetomotrices necesarias para permitir las variaciones casi sinusoidales de los flujos mutuos las proporciona la corriente de excitación i_{p1} de la frecuencia del tercer armónico que circula por el triángulo de secundarios. Como para crear esta corriente de frecuencia del tercer armónico en el triángulo es necesaria una fuerza electromotriz de dicha frecuencia, el flujo mutuo se ajustará por sí mismo para contener el tercer armónico requerido para generar esta pequeña fuerza electromotriz de secundario de la frecuencia del tercer armónico. Por tanto, el flujo mutuo induce un tercer armónico de la tensión respecto al neutro del lado del primario pero, por lo general, este tercer armónico de la tensión es muy pequeño y la forma de onda de la tensión del primario respecto al neutro permanece esencialmente sinusoidal, según se ve en el oscilograma de v_{AN} en la figura 7b.

De este estudio y del de las conexiones triángulo-estrella y triángulo-triángulo realizado en el apartado 1e, es posible sacar una conclusión importante referente a los efectos sobre los fenómenos de excitación de los devanados conectados en triángulo.

► Las corrientes de excitación de la frecuencia del tercer armónico necesarias para una variación sinusoidal del flujo circulan por los devanados conectados en triángulo de un banco triángulo-triángulo, triángulo-estrella o estrella-triángulo, pero (para transformadores exactamente iguales) no están presentes en las líneas trifásicas conectadas a los transformadores cuando se aíslan los neutros de los devanados en estrella de los otros sistemas de neutros.◀

En cambio, las corrientes de excitación de la frecuencia del tercer armónico están presentes en las líneas que alimentan un banco estrella-estrella cuyo neutro de los primarios se conecta al del generador, y por tanto este montaje puede originar una interferencia inductiva perjudicial. Si, aislando los neutros de un banco estrella-estrella, se eliminan de las líneas las corrientes de excitación de la frecuencia del tercer armónico, las tensiones respecto al neutro pueden sufrir una gran distorsión, según veremos en lo que sigue.

2d. *Conexión estrella-estrella con neutros aislados.* El estudio que vamos a realizar es aplicable a un banco de tres transformadores monofásicos conectados en estrella-estrella. En el apartado I del capítulo XXVI se ve que un transformador trifásico del tipo acorazado tiene esencialmente las mismas características que un banco de tres transformadores monofásicos y por tanto el estudio también será aplicable a la conexión estrella-estrella de unidades trifásicas del tipo acorazado. En cambio, el estudio *no es* aplicable a un transformador trifásico del tipo de núcleo conectado en estrella-estrella; sus características de excitación, estudiadas en el apartado 2a del capítulo XXVI son marcadamente diferentes de las de un banco de tres transformadores monofásicos conectados en estrella-estrella.

La conexión estrella-estrella de transformadores monofásicos sólo se empleará tras un estudio concienzudo de las condiciones en que ha de trabajar el banco, ya que la conexión tiene características que en determinadas circunstancias pueden ser perjudiciales e incluso peligrosas. Estas características se estudian a continuación.

Consideremos un banco estrella-estrella de transformadores monofásicos con

neutros aislados, excitados por un generador trifásico equilibrado cuyas tensiones tienen forma de onda sinusoidal. Supongamos que el banco no está alimentado a ninguna carga. Las conexiones son las de la figura 8a.

Como el neutro de los primarios está aislado del neutro del generador, la suma instantánea de las corrientes de excitación suministradas al banco ha de ser nula; es decir, la corriente de excitación suministrada a un transformador cualquiera ha de encontrar su camino de retorno al generador a través de los primarios de los otros transformadores. Según se vio en el apartado 2b del capítulo XXI, el resultado de esta interdependencia de las corrientes de excitación entre sí es que las tensiones en los transformadores están determinadas por sus características de excitación. Como tres transformadores tienen rara vez características de excitación exactamente iguales, aun cuando sean del mismo diseño, las tensiones respecto al neutro suelen estar más o menos desequilibradas, aun cuando estén equilibradas las tensiones entre línea y línea. Esta situación no es conveniente.

El neutro aislado tiene también un efecto importante sobre los armónicos de la corriente de excitación. Para este estudio, supongamos que los transformadores tengan características de excitación exactamente iguales. En tal caso, las corrientes de excitación suministradas a los transformadores tendrán la misma intensidad y forma de onda, pero estarán defasadas un tercio de período. Por tanto, los terceros armónicos de las tres corrientes de excitación, si existieran, estarían en concordancia de fase y su suma *no* sería nula.

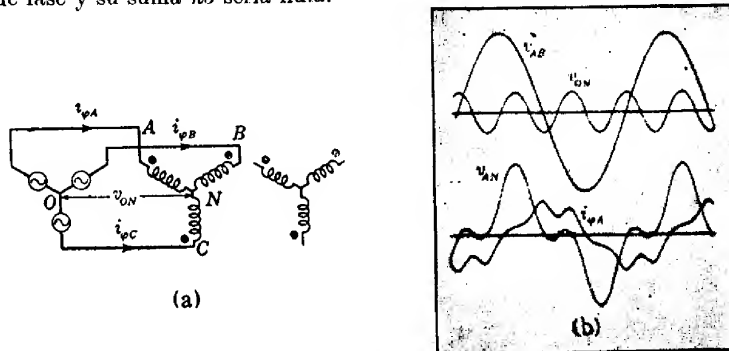


Fig. 8. Banco de transformadores monofásicos en estrella-estrella; a) conexiones, y b) oscilogramas de la tensión v_{AB} entre línea y línea, la tensión v_{AN} respecto al neutro, la corriente de excitación $i_{\phi A}$ y la tensión v_{ON} entre el neutro O del generador y el neutro N de los primarios

► No obstante, como la suma de las intensidades instantáneas de las corrientes de excitación *debe* ser siempre nula a causa del neutro aislado, en las corrientes de excitación no podrán haber armónicos terceros ni de orden múltiplo del tercero y por tanto la forma de onda de la corriente de excitación en cada transformador es diferente de la forma de onda que se requiere para crear una variación sinusoidal del flujo en su núcleo. ◀

El oscilograma de $i_{\phi A}$ en la figura 8b es un ejemplo ordinario de forma de onda de las corrientes de excitación en un banco estrella-estrella con neutro aislado. Es

interesante comparar esta forma de onda con la de la corriente de excitación para flujo variable sinusoidalmente, representada en la figura 9 del capítulo VI. Cuando la variación de flujo es sinusoidal, la forma de onda de la corriente de excitación presenta un pico muy agudo, correspondiendo el pico de intensidad al instante en que se dobla el ciclo de histeresis en sus extremos. Este pico agudo de la corriente de excitación es causa del tercer armónico relativamente intenso de la corriente de excitación correspondiente a una variación sinusoidal del flujo. Cuando se suprime este tercer armónico por estar aislado el neutro de la estrella, se reduce la intensidad de pico de la corriente de excitación y la onda presenta frecuentemente una doble cumbre, como en la figura 8b. La doble cumbre se debe principalmente a la presencia de quintos armónicos. Es interesante señalar que la doble cumbre de la onda de corriente de excitación indica un lacito del ciclo de histeresis que penetra en él cerca de sus extremos. Obsérvese que al aislar el neutro de los primarios sólo se suprimen los armónicos tercero y de frecuencias múltiplos de la de él. Todos los restantes armónicos de las tres corrientes de excitación podrán circular, ya que están defasados en 120° y sus sumas son nulas.

► Como para una variación sinusoidal de flujo es necesario un tercer armónico de la corriente de excitación, la supresión de estos terceros armónicos de la corriente de excitación evita que el flujo varíe sinusoidalmente e introduce en los flujos en el núcleo terceros armónicos que inducen terceros armónicos en las tensiones de primario y secundario de cada transformador. A inducciones magnéticas ordinarias en el núcleo, estos terceros armónicos de las tensiones suelen ser de un 30 a un 70 % del armónico fundamental de la tensión respecto al neutro. Luego, aun cuando varíen sinusoidalmente las tensiones aplicadas a los terminales de la línea, la forma de onda de las tensiones respecto al neutro no será sinusoidal cuando el neutro del banco esté aislado del neutro del generador. ◀

Como las relaciones entre las tensiones instantáneas entre línea y línea y entre línea y neutro son:

$$v_{AB} = v_{AN} - v_{BN} \quad (7)$$

$$v_{BC} = v_{BN} - v_{CN} \quad (8)$$

$$v_{CA} = v_{CN} - v_{AN}, \quad (9)$$

y como los terceros armónicos de las tres tensiones respecto al neutro y los armónicos de orden múltiplo del tercero están en concordancia de fase y tienen igual valor, las diferencias entre los terceros armónicos de dos tensiones respecto al neutro cualesquiera, tales como las que figuran en los segundos miembros de las ecuaciones (7), (8) y (9), son nulas en condiciones de equilibrio.

► Luego en las tensiones respecto al neutro podrán haber armónicos terceros y de órdenes múltiplos del tercero sin que estos armónicos se hallen presentes en las tensiones entre línea y línea. ◀

Sin embargo, en las tensiones entre línea y neutro no podrán aparecer otros armónicos, a menos que se hallen presentes también en las tensiones entre línea y línea. Luego, si están equilibradas las tensiones entre línea y línea y varían sinusoidalmente, las tensiones entre línea y neutro contienen armónicos fundamentales de

valor eficaz igual al producto de $1/\sqrt{3}$, ó sea 0,577 por el valor eficaz de las tensiones entre línea y línea y armónicos terceros y de órdenes múltiplos del tercero, cuyos valores eficaces están determinados por las características magnéticas no lineales del núcleo.

Si se desprecian los armónicos noveno y siguientes y se suponen tensiones entre línea y línea sinusoidales, el valor eficaz V_Y de las tensiones respecto al neutro es:

$$V_Y = \sqrt{V_{Y1}^2 + V_{Y3}^2}, \quad (10)$$

donde V_{Y1} es la tensión eficaz del armónico fundamental y V_{Y3} es la tensión eficaz del tercer armónico. Este suele valer ordinariamente entre un 30 y un 70 % del armónico fundamental. Si, como valor representativo, se toma,

$$V_{Y3} = 0,50 V_{Y1}, \quad (11)$$

entonces,

$$V_Y = V_{Y1} \sqrt{1 + 0,25} = 1,12 V_{Y1} \quad (12)$$

$$= 1,12 \frac{V_{línea}}{\sqrt{3}}, \quad (13)$$

donde $V_{línea}$ es el valor eficaz de las tensiones equilibradas entre línea y línea variables sinusoidalmente, y donde los transformadores se supone que tienen características de excitación exactamente iguales. Así, el valor eficaz de las tensiones respecto al neutro ya no es $V_{línea}/\sqrt{3}$ como se obtendría si variaran sinusoidalmente las tensiones respecto al neutro, sino que es mayor que este valor.

Además, los valores máximos de los armónicos fundamental y tercero de las tensiones respecto al neutro se tienen, aproximadamente, en el mismo instante del ciclo. Por tanto, la forma de onda de las tensiones respecto al neutro presentará un pico agudo, según puede verse en el oscilograma de v_{AN} de la figura 8b. La tensión de pico en cada transformador es entre un 30 y un 70 % mayor que la tensión de pico del armónico y, por tanto, puede ser casi tan grande como el valor de pico de las tensiones entre línea y línea. Esta condición no es conveniente, ya que se aumentan los esfuerzos a que se somete el aislante debidos a la tensión, a causa de las tensiones de los terceros armónicos.

Cuando están equilibradas las tensiones del generador en estrella y varían sinusoidalmente, teniendo los transformadores características de excitación exactamente iguales, los terceros armónicos de las tensiones en los transformadores aparecen como tensiones de frecuencia triple entre el neutro del generador y el neutro de los primarios de los transformadores, según puede verse en el oscilograma de v_{ON} en la figura 8b. Si se pone a tierra el neutro del generador, entre el neutro de los primarios y tierra existe una tensión de frecuencia triple cuyo valor eficaz suele estar comprendido entre el 30 y el 70 % de la tensión entre línea y neutro. Si no se pone a tierra ni el neutro del generador ni el de los primarios, las tensiones entre las líneas y tierra y entre el neutro de los primarios y tierra están determinadas por las capacidades de las líneas a tierra y de los devanados del transformador a tierra.

► En determinadas circunstancias, los fenómenos de resonancia pueden incrementar en mucho los terceros armónicos de las tensiones. Esta condición peligrosa puede presentarse cuando se conecta el banco a una línea de transmisión o cable y está a tierra el punto neutro de los devanados de los transformadores, como se indica en la figura 9. ◀

Con esta conexión, el neutro del banco de transformadores se halla al potencial de tierra y por tanto, aun cuando las tensiones de la frecuencia del tercer armónico inducidas en cada transformador no se hallen presentes en las tensiones entre línea y línea, aparecen como terceros armónicos de las tensiones entre los hilos de la línea y tierra. Estas tensiones de la frecuencia del tercer armónico crean corrientes de

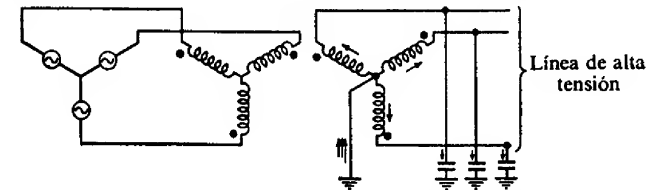


Fig. 9. Caminos de las corrientes de la frecuencia del tercer armónico creadas cuando se conecta un banco estrella-estrella con neutro a tierra a una línea de transmisión larga. Hay que evitar esta conexión, pues podrían desarrollarse por resonancia terceros armónicos excesivamente intensos

excitación de igual frecuencia en los circuitos constituidos por las capacidades a tierra de los hilos de la línea en serie con los devanados a tierra de los transformadores, tal como se muestra en la figura 9. Si las reactancias capacitivas para frecuencia triple de los hilos de la línea respecto a tierra son iguales a las reactancias magnetizantes para frecuencia triple de los transformadores, se estará en condiciones muy próximas a las de resonancia serie y los terceros armónicos de las tensiones entre línea y neutro pueden hacerse peligrosamente elevados. En estas circunstancias se han medido tensiones triples de la normal entre línea y neutro.

3. IGUALACIÓN DE LAS TENSIONES DE LOS NEUTROS EN LOS BANCOS ESTRELLA-ESTRELLA

A pesar de sus peculiaridades, hay ocasiones en que conviene la conexión estrella-estrella. A veces se emplean bancos estrella-estrella con neutros aislados, estando más o menos desequilibradas las tensiones respecto al neutro y no siendo sinusoidales sus formas de onda. Conectando el neutro de los primarios con el del generador pueden igualarse las tensiones respecto al neutro y eliminarse los terceros armónicos de las tensiones, pero la interferencia inductiva hace poco aconsejable esta disposición *. Si no es aconsejable conectar el neutro de los primarios con el del generador, existen otras maneras de lograr los mismos resultados. Vamos a describir dos de ellas.

3a. *Transformadores de puesta a tierra en estrella-triángulo.* Los terceros armónicos de las tensiones respecto al neutro de un banco estrella-estrella pueden eliminarse prácticamente e igualarse las tensiones de los neutros disponiendo el

* Véase el apartado 2b.

circuito de manera que puedan circular por los secundarios las corrientes de excitación necesarias para estos fines. Un método para lograr este resultado es el indicado en la figura 10, en donde se conecta a los terminales del banco estrella-estrella cuyas tensiones de los neutros se quieren igualar, un banco estrella-triángulo con el neutro de los primarios puesto a tierra. El neutro de los secundarios del banco estrella-estrella se conecta al neutro de los primarios del banco estrella-triángulo, bien poniendo a tierra ambos neutros o mejor mediante un hilo neutro como se indica

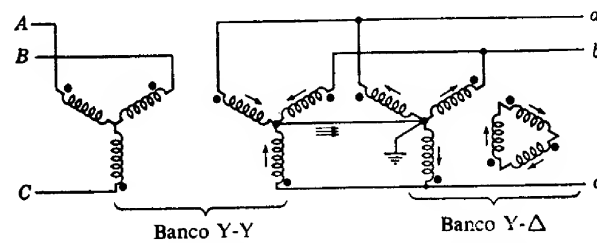


FIG. 10. Empleo de un banco estrella-triángulo de transformadores de puesta a tierra para igualar las tensiones de los neutros y eliminar los terceros armónicos de las tensiones en un banco estrella-estrella. Las flechas indican los circuitos para los terceros armónicos de las corrientes de excitación del banco estrella-estrella.

en la figura 10. En este circuito, los terceros armónicos de las corrientes de excitación del banco estrella-estrella circulan por sus secundarios, estando indicados sus caminos en la figura 10. Cuando estas corrientes de frecuencia triple circulan por los primarios del banco estrella-triángulo, inducen corrientes de frecuencia triple en sus secundarios conectados en triángulo cuyas fuerzas magnetomotrices son casi iguales y opuestas a las fuerzas magnetomotrices de frecuencia triple de las corrientes que circulan por los primarios. Por tanto, la impedancia introducida por el banco estrella-triángulo y que se opone a la circulación de los terceros armónicos de las corrientes de excitación del banco estrella-estrella no es más que la impedancia equivalente a la frecuencia triple del banco estrella-triángulo referida a su primario, la cual es relativamente pequeña. Como estas corrientes de frecuencia triple son de igual intensidad y están en concordancia de fase (suponiendo exactamente iguales los transformadores del banco estrella-estrella), sólo circularán por el triángulo de secundarios del banco estrella-triángulo. Además de los terceros armónicos de las corrientes de excitación del banco estrella-estrella de la figura 10, circulan por los secundarios en triángulo del otro banco, en la forma normal descrita en el apartado 2c, los terceros armónicos de las corrientes de excitación de éste y las líneas suministran los armónicos fundamental, quinto, séptimo, etc., de las corrientes de excitación de ambos bancos.

A veces, el banco estrella-triángulo alimenta una segunda carga, pero otras no se conecta ninguna carga al triángulo y el único fin del banco estrella-triángulo es eliminar los terceros armónicos de las tensiones, igualar las tensiones respecto al neutro de uno o más bancos estrella-estrella y proporcionar una tierra al sistema exenta de los peligros debidos a la resonancia del tercer armónico. A veces, como transformadores de puesta a tierra se emplean autotransformadores conectados en zigzag, según se describe en el apartado 4a del capítulo XXV. Normalmente, los

transformadores de puesta a tierra están situados en la misma subcentral que el banco estrella-estrella.

Aun cuando en condiciones de equilibrio las únicas corrientes que circulan por los transformadores de puesta a tierra son sus propias corrientes de excitación más los terceros armónicos de las corrientes de excitación del banco estrella-estrella, por los transformadores de puesta a tierra podrán circular corrientes intensas en el caso de un cortocircuito entre línea y tierra. En esas condiciones, las corrientes que circulan por el banco estrella-triángulo son las indicadas en la figura 3 del capítulo XXIV. Por tanto, los transformadores de puesta a tierra deberán tener una capacidad de transporte de corriente suficiente para soportar los efectos de las averías debidas a puesta a tierra de una línea.

3b. *Conexión estrella-estrella-triángulo.* Los terceros armónicos de las tensiones respecto al neutro de un banco de transformadores monofásicos conectados en estrella-estrella se pueden reducir en gran manera y pueden igualarse las tensiones de los neutros si se añade a cada transformador un tercer devanado, llamado terciario, y se conectan estos devanados en triángulo, como se indica en la figura 11. Con esta disposición de los circuitos, los terceros armónicos de las corrientes de excitación necesarios para mantener las variaciones sinusoidales de los flujos en los

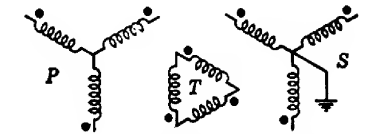


FIG. 11. Conexión estrella-estrella-triángulo.

núcleos podrán circular por el triángulo, como en la conexión estrella-triángulo descrita en el apartado 2c. La ventaja de este montaje es que los terceros armónicos de las corrientes de excitación no necesitan circular por las líneas en donde podrían ocasionar interferencia telefónica. Si las características de excitación de los transformadores no fueran exactamente iguales, el triángulo de terciarios proporciona también un circuito por el que puede circular una corriente de excitación monofásica, o de secuencia cero, para compensar las desigualdades de las características de excitación y evitar el desequilibrio de las tensiones respecto al neutro que, de otra manera, existiría en un banco estrella-estrella con neutros aislados.

El diseño de los devanados terciarios está determinado por las conexiones del sistema y los resultados que se espera obtener del triángulo de terciarios. Por ejemplo, si están aislados los neutros de los primarios y los secundarios y el triángulo de terciarios no alimenta a carga alguna, las únicas corrientes que pueden circular por los devanados terciarios son los terceros armónicos o corrientes de excitación de secuencia cero y en consecuencia, los devanados pueden ser relativamente finos. Sin embargo, el neutro de la estrella de alta tensión suele estar puesto a tierra, como en la figura 11, y a veces lo están ambos neutros. En estas condiciones las averías de puesta a tierra de las líneas de alta tensión pueden inducir corrientes muy intensas en los terciarios y éstos deberán poder soportar el calentamiento y las fuerzas mecánicas ocasionadas por ellas. A menudo, el triángulo de terciarios alimenta una carga; por ejemplo circuitos auxiliares de una subcentral, o condensadores estáticos o sincrónicos para regulación del factor de potencia y de la tensión. En estas condiciones, el triángulo de terciarios debe poder soportar los efectos de cortocircuitos entre sus propios terminales. En el capítulo XXVII se realiza el estudio de los transformadores de tres devanados bajo carga.

4. RESUMEN DE LOS FENÓMENOS DEBIDOS A LOS ARMÓNICOS

Los puntos importantes puestos de manifiesto en el estudio anterior de los fenómenos debidos a los armónicos en circuitos trifásicos equilibrados pueden resumirse de la manera siguiente:

Los terceros armónicos de corrientes y tensiones en los circuitos trifásicos equilibrados son iguales y están en concordancia de fase. (Es decir, son cantidades de secuencia cero.)

El orden de fases de los quintos armónicos es opuesto al de los armónicos fundamentales. (Es decir, son cantidades de secuencia negativa.)

Por estar en concordancia de fase, los terceros armónicos de las corrientes no pueden circular por las líneas de un sistema trifásico equilibrado, a menos que se les proporcione un camino de retorno a través de una conexión neutra. No obstante, por los circuitos conectados en triángulo pueden circular corrientes de la frecuencia del tercer armónico que no estén presentes en las líneas conectadas al triángulo.

Debido a que sus efectos inductivos son aditivos directamente, las corrientes de la frecuencia del tercer armónico (u otras de secuencia cero) que circulen por las líneas de un sistema trifásico pueden originar una interferencia inductiva importante en los circuitos de comunicaciones paralelos a las líneas de potencia.

Por deber ser nula la suma instantánea de las tensiones entre línea y línea de un sistema trifásico (tomadas en orden cíclico), en las tensiones entre línea y línea de un sistema trifásico equilibrado no podrán existir terceros armónicos, ya que estarían en concordancia de fase y por tanto su suma no sería nula. En cambio, pueden existir terceros armónicos en las tensiones de la estrella respecto al neutro, sin que estén presentes en las tensiones entre línea y línea.

Las características magnéticas del hierro exigen que para que el flujo varíe sinusoidalmente, la corriente de excitación de un transformador contenga un tercer armónico cuya intensidad es normalmente de un 40 % de la del armónico fundamental de la corriente de excitación.

Las aplicaciones de estos principios generales a las conexiones trifásicas de transformadores monofásicos conducen a las siguientes conclusiones:

Si las tensiones de los transformadores deben variar sinusoidalmente, deberá permitirse la circulación de los terceros armónicos de las corrientes, o por los devanados conectados en triángulo o a través de una conexión neutra*.

Aun cuando las características de la conexión estrella-estrella con hilo neutro sean satisfactorias en lo que concierne al comportamiento del banco, la necesidad de un cuarto hilo es un inconveniente y la presencia de terceros armónicos de las corrientes de excitación en las líneas trifásicas puede ocasionar interferencia inductiva perjudicial.

Si se suprimen los terceros armónicos de las corrientes de excitación, como ocurre en la conexión estrella-estrella con neutros aislados, las tensiones de los neutros pueden desequilibrarse** y contener terceros armónicos relativamente intensos. En determinadas condiciones, estos terceros armónicos de las tensiones

* Téngase en cuenta que esto no vale para transformadores trifásicos del tipo de núcleo, como los estudiados en el apartado 2 del capítulo XXVI.

** Véase el apartado 2b del capítulo XXI.

respecto al neutro pueden aumentar mucho a causa de los fenómenos de resonancia. Por ello, la conexión estrella-estrella de transformadores monofásicos deberá utilizarse con precaución.

PROBLEMAS

1. Un banco de transformadores monofásicos exactamente iguales conectados en triángulo-triángulo se excita mediante un sistema trifásico que suministra tensiones sinusoidales equilibradas de 6 600 V entre línea y línea. Los transformadores tienen por valores nominales 6 600 : 440 V, 100 kVA y 60 Hz. Las impedancias de fuga de los dos devanados de los transformadores pueden considerarse iguales en sus partes resistivas y reactivas al referirlas al mismo lado.

Mientras los transformadores funcionan en vacío, se conectan amperímetros de baja impedancia en ambos triángulos de primarios y de secundarios. El amperímetro de los primarios señala 0,820 A y el de los secundarios 2,65 A.

¿Cuál sería la intensidad de la corriente por fase en los devanados primarios, en vacío, si se conectaran los transformadores en estrella-estrella, el neutro de los primarios al neutro del generador y se aplicaran tensiones sinusoidales equilibradas de 6 600 V respecto al neutro?

2. Una línea de transmisión trifásica de 66 000 V está alimentada por un generador trifásico conectado en estrella de 6 600 V a través de un banco de transformadores monofásicos conectados en estrella-triángulo. Los neutros del generador y de los primarios del banco de transformadores están puestos a tierra. Cada transformador tiene por valores nominales 1 000 kVA, 3 810 : 66 000 V y 60 Hz. En cortocircuito, con una tensión del 0,06 por uno y 60 Hz aplicada al devanado de alta tensión, cada uno de los transformadores conduce la corriente nominal con una potencia de entrada del 0,008 por uno.

Cuando alimentan a la carga equilibrada nominal, los transformadores se calientan mucho. Una investigación realizada indica que el generador de corriente alterna tiene una tensión entre terminales que contiene un 15 % de armónico tercero. Suponiendo despreciables las corrientes de excitación, determinar la pérdida en el cobre a plena carga en los transformadores como tanto por ciento de lo que se tendría si las tensiones entre terminales de los primarios fueran exactamente sinusoidales.

3. Un banco trifásico de transformadores de 30 kVA consta de tres transformadores iguales de distribución de 10 kVA, 2 400 : 240 V, 60 Hz conectados en estrella-estrella sin poner a tierra los puntos neutros. Los terminales de línea de los primarios de alta tensión están conectados directamente a los terminales de línea de los secundarios de un banco trifásico equilibrado de transformadores de 1 500 kVA conectado en triángulo-estrella en una subcentral cuyas tensiones entre línea y línea de los secundarios tienen forma de onda sinusoidal y un valor eficaz de 4 160 V. El neutro de los secundarios del banco de transformadores de 1 500 kVA de la subcentral está conectado a tierra sólidamente. Un voltímetro conectado entre tierra y el neutro de los primarios del banco de transformadores de distribución de 30 kVA señala 1 000 V. ¿Cuál es el valor eficaz de la tensión entre línea y neutro en los secundarios de los transformadores de distribución?

4. Una línea de transmisión trifásica de tres hilos está tendida paralelamente a una línea telefónica a lo largo de varios kilómetros. Las distancias son las consignadas en la figura 12. La conductibilidad de la tierra en la región sobre la cual se han tendido dichas líneas es tal que un retorno por tierra para el sistema trifásico, en caso de existir, podría representarse por un hilo único de imagen situado a 300 m bajo la superficie de la Tierra.

a) Si la línea de transmisión termina en un banco de transformadores iguales conectados en triángulo, si la carga está equilibrada y si en el extremo emisor de la línea

se aplican tensiones sinusoidales equilibradas, ¿cuál es la tensión inducida en la línea telefónica por kilómetro y por ampere de la corriente trifásica?

b) Si la línea de transmisión termina en un banco de transformadores iguales conectados en estrella y neutro puesto a tierra, ¿qué frecuencia tendrán las corrientes que circulen por la línea que produzcan probablemente una perturbación especial a causa de la interferencia inductiva con la línea telefónica? ¿Cuál es la tensión inducida en la línea telefónica, por kilómetro y ampere, por cada una de estas corrientes que tenga una frecuencia menor que 1 000 Hz?

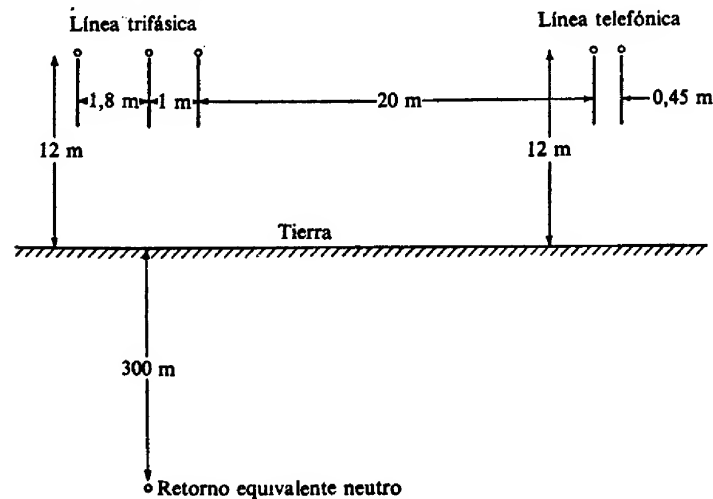


FIG. 12. Distancias entre las líneas telefónicas y de potencia, problema 4

5. Tres transformadores monofásicos iguales de 60 Hz tienen por tensiones nominales 1 328 : 230 V. Cuando al lado de alta tensión de uno cualquiera de los transformadores se aplica la tensión sinusoidal nominal a la frecuencia nominal, estando el lado de baja tensión en circuito abierto, la corriente tiene por intensidad

$$i = 3 \sin \omega t + 1,1 \sin (3\omega t + \alpha_3) + 0,1 \sin (5\omega t + \alpha_5)$$

Las impedancias de fuga para la frecuencia del tercer armónico son iguales en ambos devanados al referirlas a un mismo lado.

Si se conectan estos transformadores en estrella-triángulo a un circuito trifásico de 2 300 V, 60 Hz con tensiones sinusoidales equilibradas, ¿qué intensidad eficaz señalará un amperímetro situado en el circuito cerrado formado por los secundarios conectados en triángulo cuando la carga del secundario es nula:

a) Cuando no hay conexión alguna entre el neutro del generador de potencia conectado en estrella y el neutro de los primarios conectados en estrella?

b) Cuando el neutro de los primarios de los transformadores está conectado a través de un conductor de impedancia despreciable al neutro de un generador cuyas tensiones entre línea y neutro son sinusoidales y están equilibradas?

Bancos trifásicos de transformadores desequilibrados

Los tres capítulos anteriores se han dedicado principalmente al análisis del funcionamiento de bancos simétricos de transformadores en circuitos trifásicos equilibrados. A continuación vamos a estudiar problemas prácticos en los que intervienen condiciones de desequilibrio que pueden deberse a una asimetría del banco o a cargas monofásicas no equilibradas o a cortocircuitos.

El método de las componentes simétricas¹ resulta casi indispensable para el análisis de condiciones de desequilibrio en las cuales jueguen un papel importante las impedancias de máquinas rotativas. La mayoría de los problemas en los que los principales factores reguladores son las impedancias de bancos de transformadores pueden, en cambio, resolverse satisfactoriamente combinando la teoría del transformador único con las relaciones entre tensiones e intensidades en circuitos trifásicos. A continuación, y como repaso, se resumen la teoría simplificada del transformador y las ecuaciones de los circuitos trifásicos.

Ecuaciones del transformador: Corrientemente, pueden despreciarse las corrientes de excitación de los transformadores y suponer que las corrientes de primario y secundario crean fuerzas magnetomotrices iguales y opuestas. Así, la relación entre los vectores representativos de la corriente de primario I_1 y la corriente de secundario directamente opuesta I_L es:

$$I_L = aI_1, \quad (1)$$

donde a es la razón N_1/N_2 de los números de espiras.

La relación entre las tensiones de primario y secundario es:

$$\frac{V_1}{a} = V_2 + I_L Z_{eq2}, \quad (2)$$

donde Z_{eq2} es la impedancia equivalente referida al secundario. O bien, la ecuación de las tensiones referida al primario es:

$$V_1 = aV_2 + I_1 Z_{eq1}, \quad (3)$$

donde Z_{eq1} es la impedancia equivalente referida al primario.

El transformador, pues, está caracterizado por la ecuación (1) y por la (2) ó la (3).

¹ La teoría de las componentes simétricas puede verse en W. V. LYON, *Applications of the Method of Symmetrical Components* (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1937), C. F. WAGNER y R. D. EVANS, *Symmetrical Components* (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1933). Un resumen de las aplicaciones de las componentes simétricas a problemas de transformadores puede verse en L. F. BLUME, editor, *Transformer Engineering* (New York: John Wiley & Sons, 1938), capítulo vi.

Ecuaciones de las tensiones de línea: La suma vectorial de las tensiones entre línea y línea tomadas en orden cíclico es nula:

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CA} = 0 \quad (4)$$

$$V_{ab} + V_{bc} + V_{ca} = 0, \quad (5)$$

donde los subíndices en mayúscula indican las fases de los primarios y los subíndices en minúsculas, las fases de los secundarios.

Ecuaciones de las tensiones de la estrella: Las relaciones vectoriales entre las tensiones de línea a línea y las tensiones de línea a neutro son:

$$V_{AB} = V_{AN} - V_{BN} \quad (6)$$

$$V_{BC} = V_{BN} - V_{CN} \quad (7)$$

$$V_{CA} = V_{CN} - V_{AN} \quad (8)$$

$$V_{ab} = V_{an} - V_{bn} \quad (9)$$

$$V_{bc} = V_{bn} - V_{cn} \quad (10)$$

$$V_{ca} = V_{cn} - V_{an}. \quad (11)$$

Obsérvese que de las cuatro relaciones dadas por las ecuaciones (4), (6), (7) y (8) (o por las 5, 9, 10 y 11) sólo tres son independientes, ya que cualquiera de ellas puede obtenerse de las otras tres.

Ecuaciones de las corrientes de línea: Para circuitos conectados en estrella con hilos neutros, la ecuación de las corrientes de primarios es:

$$I_A + I_B + I_C = I_N, \quad (12)$$

donde I_A , I_B , I_C son los vectores representativos de las corrientes de línea que penetran en los primarios e I_N es el vector que representa a la corriente que circula por el neutro regresando al generador. Para las corrientes de los secundarios

$$I_a + I_b + I_c = I_n, \quad (13)$$

donde I_a , I_b , I_c son los vectores representativos de las corrientes que circulan hacia la carga por las líneas de los secundarios, e I_n es el vector representativo de la corriente que regresa por el neutro procedente de la carga.

Para circuitos conectados en triángulo o para circuitos conectados en estrella sin hilos neutros,

$$I_A + I_B + I_C = 0 \quad (14)$$

$$I_a + I_b + I_c = 0. \quad (15)$$

Relaciones entre las corrientes en la línea y en el triángulo: Las relaciones vectoriales entre las corrientes en la línea y en las fases del triángulo son:

$$I_A = I_{AB} - I_{CA} \quad (16)$$

$$I_B = I_{BC} - I_{AB} \quad (17)$$

$$I_C = I_{CA} - I_{BC} \quad (18)$$

$$I_a = I_{ba} - I_{ac} \quad (19)$$

$$I_b = I_{cb} - I_{ba} \quad (20)$$

$$I_c = I_{ac} - I_{cb}. \quad (21)$$

Obsérvese que de las cuatro relaciones dadas por las ecuaciones (14), (16), (17) y (18) (o por las 15, 19, 20 y 21) sólo tres son independientes, ya que cualquiera de ellas puede deducirse de las otras tres.

Como ejemplos de las aplicaciones de estas ecuaciones surgen varios problemas en relación con el empleo de bancos triángulo-triángulo, los cuales se estudian en el apartado siguiente.

1. CONDICIONES DE DESEQUILIBRIO EN BANCOS TRIÁNGULO-TRIÁNGULO

Como la conexión triángulo-triángulo proporciona dos derivaciones entre cada par de terminales de línea tanto en el lado de los primarios como en el de los secundarios, las corrientes en los transformadores dependen no sólo de las corrientes que circulan por la carga, sino también de las características de los transformadores. Esta importante propiedad de la conexión triángulo-triángulo se estudia cualitativamente en los apartados 1 y 3 del capítulo XXI. Como consecuencia de ello existen numerosos problemas en los que interviene el funcionamiento de bancos triángulo-triángulo bajo condiciones de desequilibrio debidas a cargas desequilibradas, o a asimetrías del banco ocasionadas por razones de transformación o impedancias equivalentes desiguales. A continuación se estudian algunos de dichos problemas².

1a. Corrientes circulantes en bancos triángulo-triángulo, debidas a razones de transformación desiguales. Según se mencionó en el apartado 1 del capítulo XXI, las desigualdades en las razones de transformación de los tres transformadores originan corrientes circulantes en los bancos triángulo-triángulo. Estas corrientes pueden calcularse fácilmente aplicando el teorema de Thévenin.

Consideremos el banco de transformadores de la figura 1a, en el cual los primarios están conectados en triángulo y los secundarios están conectados en serie, preparados para ser conectados en triángulo. Puede completarse el triángulo de secundarios cerrando el interruptor K .

Si son iguales las razones de transformación de los tres transformadores, entre los extremos del interruptor abierto K no habrá tensión alguna (si se desprecian los terceros armónicos por débiles) y por tanto, al cerrar el interruptor K no circulará corriente alguna (salvo una débil corriente de excitación de la frecuencia del tercer armónico). En cambio, si no fueran iguales las razones de transformación, entre los

² Para un estudio más detallado de los bancos triángulo-triángulo, véase L. F. BLUME, editor, *Transformer Engineering* (New York: John Wiley & Sons, 1938), 172-180.

extremos del interruptor K aparecería una tensión E_{20} , igual a la suma vectorial de las tensiones en circuito abierto de los secundarios; es decir,

$$E_{20} = \frac{V_{AB}}{a_{AB}} + \frac{V_{BC}}{a_{BC}} + \frac{V_{CA}}{a_{CA}}, \quad (22)$$

donde a_{AB} , a_{BC} , a_{CA} son las razones de transformación N_1/N_2 de los tres transformadores y son muy aproximadamente iguales a las razones de tensiones en circuito abierto. Al cerrar, en este caso, el interruptor K , se origina una corriente en los secundarios. Por el teorema de Thévenin, esta corriente en los secundarios tiene una intensidad igual al cociente entre la tensión en circuito abierto E_{20} y la impedancia medida en el vértice abierto del triángulo, estando cortocircuitadas las tensiones

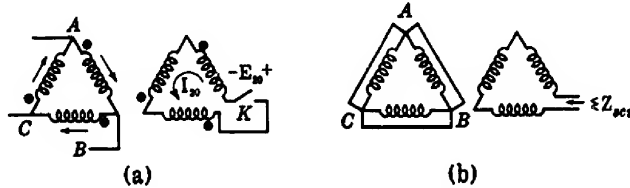


Fig. 1. Corrientes circulantes en bancos triángulo-triángulo

aplicadas V_{AB} , V_{BC} , V_{CA} . De la figura 1b resulta evidente que la impedancia es igual a la suma vectorial de las impedancias en cortocircuito Z_{sc2} del transformador medidas desde sus terminales de secundarios con los terminales de los primarios cortocircuitados. Así, la corriente circulante I_{20} en el triángulo de secundarios es:

$$I_{20} = \frac{E_{20}}{\sum Z_{sc2}}. \quad (23)$$

Pueden ahora determinarse las corrientes que circulan por el triángulo de primarios mediante la ecuación (1); por ejemplo,

$$I_{AB} = \frac{I_{20}}{a_{AB}}. \quad (24)$$

Las corrientes que circulan por las líneas de los primarios vienen dadas por las ecuaciones (16), (17) y (18); por ejemplo,

$$I_A = I_{AB} - I_{CA} = \frac{I_{20}}{a_{AB}} - \frac{I_{20}}{a_{CA}} = \left(\frac{a_{CA} - a_{AB}}{a_{AB}a_{CA}} \right) I_{20}. \quad (25)$$

Obsérvese que la corriente circulante I_{20} está limitada por las impedancias en cortocircuito que son relativamente pequeñas, y en consecuencia, desigualdades más bien pequeñas de las razones de transformación pueden traducirse en corrientes circulantes por el banco relativamente intensas. Así, pues, convendrá evitar la conexión triángulo-triángulo de transformadores de razones desiguales, si bien esta situación se puede producir accidentalmente en un banco triángulo-triángulo de transformadores con equipo cambiador de tomas, en el caso en que los cambiadores de tomas no funcionaran simultáneamente.

Obsérvese también que, aun cuando las corrientes circulantes por el interior del banco puedan ser relativamente intensas, las corrientes que circulan por las líneas pueden ser débiles, ya que dependen de las diferencias entre dos razones de transformación, según indica la ecuación (25). Por tanto, pueden existir en un banco corrientes circulantes relativamente intensas sin que pueda detectarse su presencia con medidas de las corrientes de línea.

1b. *Ecuaciones generales para bancos triángulo-triángulo; razones de transformación iguales.* Si se desprecian las corrientes de excitación, las corrientes de los primarios son iguales a las directamente opuestas de los secundarios, cuando ambas se refieren a un mismo lado. Así, si los tres transformadores tienen la misma razón de transformación a ,

$$I_{ba} = aI_{AB} \quad (26)$$

$$I_{cb} = aI_{BC} \quad (27)$$

$$I_{ac} = aI_{CA}, \quad (28)$$

donde I_{AB} , I_{BC} , I_{CA} son los vectores representativos de las corrientes de primario en el sentido del tornillo directo respecto al flujo positivo e I_{ba} , I_{cb} , I_{ac} son los vectores que representan las corrientes de secundario directamente opuestas.

Cuando se desprecian las corrientes de excitación, las ecuaciones para las tensiones son:

$$V_{AB} = aV_{ab} + I_{AB}Z_{AB} \quad (29)$$

$$V_{BC} = aV_{bc} + I_{BC}Z_{BC} \quad (30)$$

$$V_{CA} = aV_{ca} + I_{CA}Z_{CA}, \quad (31)$$

donde Z_{AB} , Z_{BC} , Z_{CA} son las impedancias equivalentes de los transformadores referidas a los lados de los primarios. Estas ecuaciones para las tensiones pueden referirse también a los lados de los secundarios. Como la suma de las tensiones de línea es igual a cero (ecs. 4 y 5), la suma de las ecuaciones (29), (30) y (31) indica que,

$$I_{AB}Z_{AB} + I_{BC}Z_{BC} + I_{CA}Z_{CA} = 0. \quad \blacktriangleright (32)$$

Si se refieren a los secundarios las corrientes e impedancias, se tiene una relación análoga; es decir,

$$I_{ba}Z_{ab} + I_{cb}Z_{bc} + I_{ac}Z_{ca} = 0, \quad \blacktriangleright (33)$$

donde las impedancias Z_{ab} , Z_{bc} , Z_{ca} están referidas a los secundarios.

Pueden ahora determinarse las tensiones e intensidades para condiciones de funcionamiento cualesquiera. Por ejemplo, supongamos que se dan vectorialmente dos de las tensiones de línea de los secundarios y dos de las intensidades de línea de los secundarios. Pueden determinarse entonces la tercera tensión de línea de los secundarios y la tercera intensidad de línea de los secundarios, puesto que la suma vectorial de las tensiones de línea es nula (ec. 5) y también lo es la suma vectorial de las

intensidades de línea (ec. 15). Pueden entonces determinarse las corrientes en los transformadores sustituyendo en la ecuación (33) los valores

$$I_{ac} = I_{ba} - I_a \quad (34)$$

$$I_{cb} = I_b + I_{ba} \quad (35)$$

obtenidos de las ecuaciones (19) y (20). El resultado es:

$$I_{ba}Z_{ab} + (I_b + I_{ba})Z_{bc} + (I_{ba} - I_a)Z_{ca} = 0 \quad (36)$$

o sea,

$$I_{ba} = \frac{I_a Z_{ca} - I_b Z_{bc}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \quad (37)$$

Las otras corrientes de los secundarios pueden determinarse de manera análoga. Entonces se conocen las corrientes de los primarios a través de las ecuaciones (26), (27) y (28) y pueden determinarse las tensiones de los primarios mediante las ecuaciones (29), (30) y (31).

El examen de la ecuación (37) indica que las corrientes que circulan por los transformadores dependen de sus impedancias equivalentes. Así, si están equilibradas las corrientes de línea, no lo estarán las de los transformadores a menos que sean iguales las impedancias equivalentes complejas. En general, el transformador de menor impedancia equivalente conduce la corriente más intensa, comportándose el banco en este aspecto en forma algo parecida a como lo hacen las impedancias derivadas.

Así pues, si tres transformadores conectados en triángulo-triángulo tienen iguales potencias nominales pero distintas impedancias equivalentes y suministran potencia a una carga equilibrada, el banco no puede suministrar su potencia total sin que la corriente supere su intensidad nominal en el transformador de menor impedancia equivalente.

Por esta razón es preferible utilizar transformadores exactamente iguales en las conexiones triángulo-triángulo cuando está equilibrada la carga, aun cuando pueda convenir no hacerlo si la carga está desequilibrada. Para un estudio más detallado de esta cuestión, véase el apartado 3 del capítulo XXI.

2. CORRIENTES MONOFÁSICAS EN BANCOS TRIFÁSICOS

Las cargas monofásicas casi siempre están alimentadas por sistemas trifásicos y además, como en estos sistemas pueden producirse cortocircuitos monofásicos, suele ser necesario determinar la distribución de corrientes monofásicas en bancos trifásicos de transformadores.

En la figura 2 puede verse un cierto número de montajes trifásicos de transformadores que alimentan cargas monofásicas. Los devanados de los transformadores están representados por líneas gruesas, dibujándose paralelos entre sí los devanados primario y secundario de un mismo transformador e indicándose mediante un punto los terminales de primario y secundario de la misma polaridad. Las corrientes resultantes (despreciando las corrientes de excitación) están indicadas por flechas, representando cada flecha una unidad de intensidad sobre la base de una razón de trans-

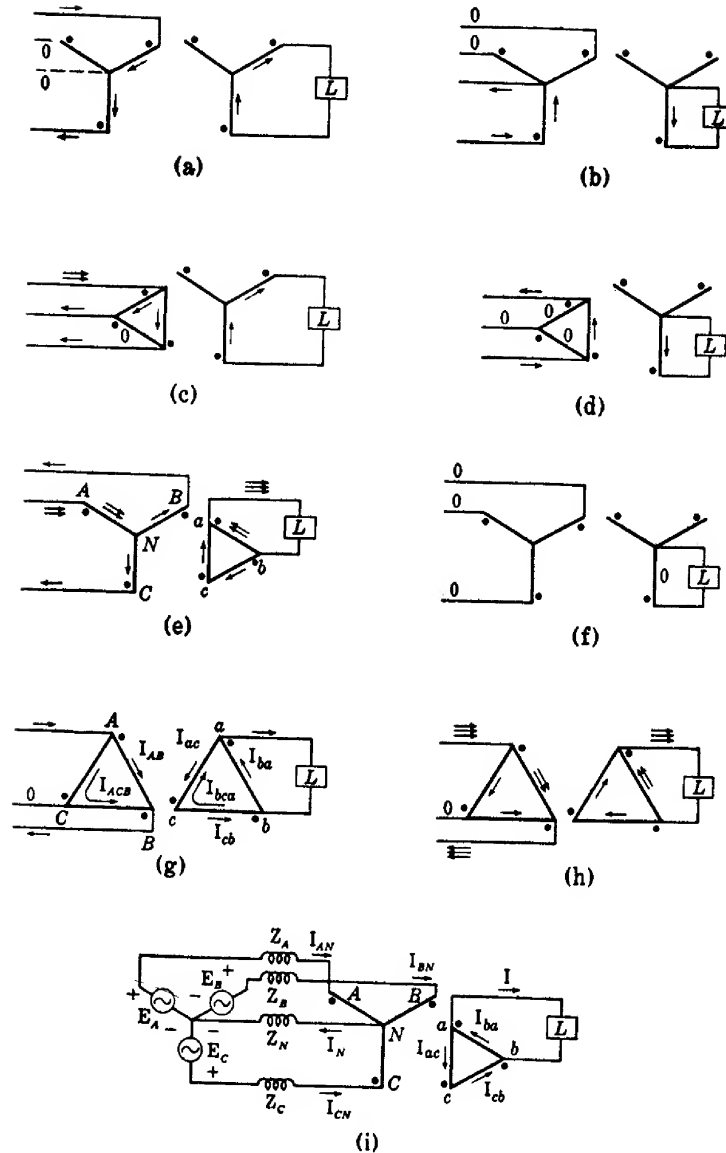


FIG. 2. Corrientes monofásicas en bancos trifásicos

formación de 1 : 1. En a), b), c), d) y e) las distribuciones de corrientes están fijadas únicamente por las conexiones de los transformadores y están determinadas por el hecho de que, si circula corriente por el secundario de algún transformador, por su primario deberá circular una corriente igual y contraria (sobre la base de una razón de transformación 1 : 1 y despreciando las corrientes de excitación). En a), b), c) y d), los secundarios están conectados en estrella y por tanto la corriente monofásica del secundario sólo podrá circular por un camino serie, pero en e) los secundarios están conectados en triángulo y la corriente monofásica del secundario se divide entre los dos caminos en paralelo ba y bca . Como en e) las corrientes que circulan por los secundarios bc y ca de los transformadores son iguales, sus corrientes de primario deben ser, también, iguales. Las intensidades I_{NB} e I_{NC} de las corrientes de retorno al generador a través de los transformadores B y C deberán ser, pues, iguales cada una a la mitad de la intensidad I_{AN} de la corriente del transformador A , según indican las flechas en e). Así pues, las intensidades I_{bc} e I_{ca} de las corrientes de secundario de los transformadores B y C también serán la mitad de la intensidad I_{ba} de la corriente que circula por el secundario del transformador A . El transformador A , por tanto, suministra los dos tercios de la intensidad I de la corriente de carga monofásica y los transformadores B y C suministran ambos el tercio restante, según indican las flechas en e).

En la figura 2f que presenta la conexión estrella-estrella de transformadores monofásicos con neutro de primarios aislado— si circula corriente por el primario de uno de los transformadores debe regresar al generador a través de los primarios de los otros dos y por tanto la corriente monofásica que pueda suministrarse entre línea y neutro en el lado de los secundarios queda limitada a una intensidad pequeña determinada por las características de excitación de los dos transformadores descargados *. En el apartado 2b del capítulo XXI se estudia esta característica de los bancos estrella-estrella de transformadores monofásicos.

En el banco triángulo-triángulo de la figura 2g existen caminos paralelos tanto en los circuitos de primarios como en los de secundarios y la distribución de la corriente monofásica entre los transformadores no sólo está determinada por las conexiones, sino que depende de las impedancias equivalentes de los transformadores. La corriente, pues, está suministrada en parte por el transformador ba y en parte por el camino bca consistente en la combinación serie de los transformadores bc y ca en paralelo con el transformador ba . La corriente que circula por la línea c de secundarios es nula y, examinando la figura 2g,

$$I_{ac} = I_{cb} = -I_{bca}, \quad (38)$$

donde I_{bca} es la corriente que circula de b hacia a por el camino bca . Sustituyendo la ecuación (38) en la (33) se tiene:

$$I_{ba}Z_{ab} - I_{bca}(Z_{bc} + Z_{ca}) = 0, \quad (39)$$

de donde,

$$\frac{I_{ba}}{I_{bca}} = \frac{Z_{bc} + Z_{ca}}{Z_{ab}}. \quad (40)$$

* No obstante, un transformador trifásico del tipo de núcleo, conectado en estrella-estrella puede alimentar una carga monofásica bastante grande conectada entre una línea del secundario y el neutro, aun cuando esté aislado el neutro de los primarios. Véase el apartado 2b del capítulo XXVI.

Es decir, las intensidades son inversamente proporcionales a las impedancias equivalentes de los caminos derivados ba y bca a través del banco de transformadores. Si éstos son exactamente iguales, dos tercios de la carga está alimentada por el transformador ba y un tercio por los transformadores bc y ca en serie, tal como se indica en h).

Otro circuito en el cual existen caminos derivados en los lados de los primarios y en los de los secundarios, es la conexión estrella-triángulo con el neutro de los primarios conectado al del generador, como indica la figura 2i. En este circuito, la distribución de las corrientes depende de las impedancias, no sólo de los transformadores, sino también del generador. La ecuación para las corrientes de los primarios es:

$$I_{AN} + I_{BN} + I_{CN} = I_N. \quad (41)$$

Si se desprecian las corrientes de excitación, las relaciones entre las corrientes directamente opuestas de primario y secundario son:

$$I_{ba} = aI_{AN} \quad (42)$$

$$I_{cb} = aI_{BN} \quad (43)$$

$$I_{ac} = aI_{CN}, \quad (44)$$

donde a es la razón de transformación. Como la línea c de los secundarios está abierta

$$I_{cb} = I_{ac}. \quad (45)$$

La relación entre la intensidad I de la corriente suministrada a la carga y las de las corrientes que circulan por los secundarios de los transformadores es:

$$I = I_{ba} - I_{ac}. \quad (46)$$

Sean E_A , E_B , E_C , los vectores representativos de las fuerzas electromotrices del generador y sea Z_N la impedancia compleja en el hilo neutro. Sean, también, Z_A , Z_B , Z_C las impedancias complejas de cada fase de primarios, siendo estas impedancias las sumas vectoriales de las impedancias del generador, de la línea y equivalente del transformador referida a su lado de primarios. Las ecuaciones de las tensiones para las tres fases son:

$$E_A = I_{AN}Z_A + I_NZ_N + aV_{ab} \quad (47)$$

$$E_B = I_{BN}Z_B + I_NZ_N + aV_{bc} \quad (48)$$

$$E_C = I_{CN}Z_C + I_NZ_N + aV_{ca}, \quad (49)$$

donde V_{ab} , V_{bc} , V_{ca} son los vectores representativos de las tensiones entre terminales de los secundarios. Obsérvese que, puesto que son tensiones entre línea y línea, su suma vectorial es nula, o sea,

$$V_{ab} + V_{bc} + V_{ca} = 0. \quad (50)$$

Las ecuaciones números (41) a (50), ambas inclusive, constituyen las relaciones generales para un banco estrella-triángulo con una carga monofásica. Cuando, sean desiguales las impedancias o estén desequilibradas las tensiones E_A , E_B , E_C del generador, podrá resolverse ese sistema de diez ecuaciones que contiene las constantes del circuito y 14 vectores representativos de tensiones y corrientes, si se conocen las constantes del circuito y cuatro vectores independientes representativos de tensiones o intensidades. La solución general es más bien complicada.

No obstante, si las tensiones E_A , E_B , E_C de los generadores están equilibradas y son iguales las impedancias Z_A , Z_B , Z_C , se simplifican mucho las relaciones entre las intensidades de corriente. Si están equilibradas las tensiones del generador, su suma vectorial es nula y como también lo es la suma de las tensiones entre terminales de los secundarios (ec. 50), la suma de las ecuaciones (47), (48) y (49) es:

$$0 = (I_{AN} + I_{BN} + I_{CN})Z + 3I_N Z_N, \quad (51)$$

donde Z es la impedancia de cada fase de primario. Pero la suma vectorial de las intensidades de línea de los primarios es igual a la intensidad I_N de la corriente que circula por el neutro (ec. 41). Así, de la ecuación (51) resulta,

$$0 = I_N(Z + 3Z_N) \quad (52)$$

o sea,

$$= 0. \quad (53)$$

Luego, con tensiones de generador equilibradas e impedancias de las fases de los primarios iguales, por el hilo neutro no circula corriente y por tanto la distribución de corrientes es la misma que se tendría si se desconectara el hilo neutro de los primarios. En la figura 2e puede verse esta distribución.

3. AVERÍA DE LÍNEA A TIERRA EN EL LADO DE PRIMARIOS DE UN BANCO ESTRELLA-TRIÁNGULO CON NEUTRO A TIERRA

En la figura 3 se presenta otra situación en la que existen corrientes monofásicas en un banco estrella-triángulo. En ella puede verse un banco estrella-triángulo con neutro a tierra situado en el extremo receptor de una línea de transmisión, existiendo un fallo F de línea a tierra en el conductor C de fase. De momento, supongamos que el neutro de la estrella es la única tierra del sistema aparte de la avería. La corriente de la avería circula de la fase C a tierra y vuelve al sistema de transmisión a través de la conexión a tierra del neutro de la estrella. Como parte de esta corriente circula desde el neutro de la estrella a través del primario del transformador C , como indica la corriente I_{NC} de la figura 3, por el secundario del transformador C deberá circular una corriente directamente opuesta I_{ca} que también circulará por los secundarios de los otros dos transformadores, según indican las flechas de la figura 3. Por tanto, por los primarios de los transformadores B y C deberán circular también corrientes directamente opuestas. Como por los tres secundarios circula la misma corriente, las tres corrientes que circulan por los primarios deberán ser de igual intensidad y estar

en concordancia de fase y por tanto, cada una de ellas deberá ser la tercera parte de la corriente de la avería. La distribución de corrientes es, pues, la indicada por las flechas de trazo continuo de la figura 3, en donde cada flecha representa un tercio

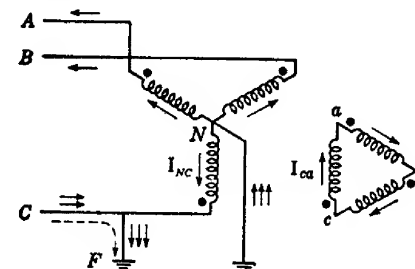


FIG. 3. Avería de línea a tierra en el lado de los primarios de un banco estrella-triángulo con neutro de los primarios puesto a tierra

de la corriente en la avería. En la terminología de las componentes simétricas, estas corrientes de igual intensidad y en concordancia de fase se llaman corrientes de secuencia cero.

4. ANÁLISIS DE COMPONENTES SIMÉTRICAS

Los métodos simples estudiados en los apartados anteriores permiten resolver satisfactoriamente problemas sencillos en los que las impedancias de los transformadores son los principales factores rectores. Sin embargo, en problemas más complicados tales como aquellos en que intervienen impedancias de líneas de transmisión y de máquinas rotativas suele ser más expeditivo el método de las componentes simétricas*. Si se dispone de un analizador de redes y si la complejidad del sistema abona su empleo, puede determinarse experimentalmente el comportamiento del sistema establecido adecuadamente e interconectando las redes equivalentes para secuencias cero, positiva y negativa, del sistema completo. En problemas de este tipo, el primer objetivo es la determinación del comportamiento de cada una de las partes del sistema. Los transformadores juegan aquí un importante papel.

El estudio siguiente se limita al estudio de condiciones de desequilibrio resultantes de cargas desequilibradas o de cortocircuitos en uno o más puntos de un sistema que, de otra manera, sería simétrico. En un tal sistema, nada distingue una fase de otra, excepto en los puntos de desequilibrio; es decir, las impedancias de las tres fases del sistema son iguales. En consecuencia, si se descomponen las tensiones y corrientes desequilibradas en tres sistemas equilibrados de componentes —los sistemas de secuencia cero, positiva y negativa— podrá entonces analizarse el sistema como un problema de circuitos equilibrados sobre una base por fase para cada sistema.

Si las tensiones y corrientes existentes antes de aplicar el desequilibrio tienen el orden de fases abc , las componentes de secuencia positiva de las tensiones e inten-

* En la primera nota de pie de página de este capítulo se dan referencias de textos que tratan el tema de las componentes simétricas.

sidades en las tres fases para condiciones de desequilibrio forman sistemas equilibrados cuyo orden de fases es *abc*. Las impedancias de máquinas rotativas, líneas de transmisión y bancos de transformadores son las mismas para corrientes y tensiones de secuencia positiva que para condiciones de equilibrio y la red equivalente del sistema para secuencia positiva sobre una base por fase es la misma que para las condiciones de equilibrio.

Las componentes de secuencia negativa de las tensiones y corrientes en las tres fases forman sistemas equilibrados cuyo orden de fases es *acb*. La única diferencia entre los sistemas de secuencia positiva y negativa es su orden de fases. Las impedancias de aparatos estáticos, tales como líneas de transmisión y transformadores, son independientes del orden de las fases, y las partes de la red de secuencia negativa que las representa son las mismas que las partes correspondientes de la red de secuencia positiva. En cambio, las máquinas rotativas presentan valores de impedancia diferentes a las corrientes de secuencia positiva que a las de secuencia negativa, y ordinariamente no generan fuerzas electromotrices internas de secuencia negativa. En consecuencia, estarán representadas en la red de secuencia negativa por valores de las impedancias diferentes de los de la red de secuencia positiva, y en la red de secuencia negativa sus fuerzas electromotrices internas estarán cortocircuitadas.

Las componentes de secuencia cero de las tensiones y corrientes en las tres fases, forman también sistemas simétricos, pero con una forma de simetría diferente de la existente para las componentes de secuencia positiva o negativa. Por definición, el vector representativo de la componente I_0 de secuencia cero de los vectores I_a , I_b , I_c representativos de las corrientes en las fases de un sistema trifásico es:

$$I_0 = \frac{1}{3}(I_a + I_b + I_c). \quad (54)$$

Las componentes de secuencia cero de las tres corrientes son iguales y están en concordancia de fase entre sí, en contraste con lo que ocurre con las componentes de secuencia positiva o negativa que son de igual magnitud pero están defasadas 120°; es decir, para las componentes de secuencia cero de I_a , I_b e I_c ,

$$I_{a0} = I_{b0} = I_{c0} = I_0. \quad (55)$$

► De la ecuación 54 resulta que sólo podrán existir corrientes de secuencia cero cuando esté dispuesto el circuito de manera que la suma vectorial de las corrientes de las tres fases no sea obligatoriamente nula. ◀

Esto significa que no podrán existir corrientes de secuencia cero en máquinas rotativas simétricas conectadas en estrella, bancos de transformadores, o líneas de transmisión a menos que se pongan a tierra o interconecten uno o más puntos neutros. Por ejemplo, no podrán existir corrientes de secuencia cero en los primarios de los transformadores de la figura 3 si no estuviera puesto a tierra el punto neutro *N*. Como los caminos de las corrientes de secuencia cero son distintos de los de las corrientes de secuencia positiva o negativa, las impedancias a las corrientes de secuencia cero en máquinas rotativas y líneas de transmisión son distintas de las impedancias a corrientes de otra secuencia.

Sin embargo, pueden existir corrientes de secuencia cero en las fases de los circuitos conectados en triángulo. En esta disposición, las componentes de secuencia cero de las tres corrientes del triángulo, al ser iguales y estar en fase, no hacen mas

que circular por el triángulo, pero no por las líneas a él conectadas, como ocurre en los devanados secundarios del banco de transformadores de la figura 3. Como la suma vectorial de las tres tensiones entre línea y línea de un sistema trifásico, tomadas en orden cíclico, debe ser siempre nula, es imposible la existencia de componentes de secuencia cero en las tensiones entre línea y línea. Así pues, aun cuando en los secundarios conectados en triángulo de la figura 3 existan corrientes de secuencia cero, no crean componentes de secuencia cero en las tensiones entre línea y línea.

Del estudio anterior resulta evidente que las conexiones de los bancos de transformadores ejercen influencias importantes sobre las corrientes de secuencia cero. Los principios generales pueden resumirse de manera muy sencilla³.

Pueden existir corrientes de secuencia cero en las líneas que terminan en un grupo de devanados conectados en estrella, solamente cuando el punto neutro esté a tierra o conectado a un hilo neutro. Si el punto neutro está aislado, el circuito está abierto en lo que concierne a las corrientes de secuencia cero.

Las líneas terminales en un grupo de devanados conectados en triángulo están en circuito abierto en lo que concierne a las corrientes de secuencia cero, ya que no existe ninguna conexión neutra que les proporcione un camino de retorno. Sin embargo, en el triángulo pueden inducirse corrientes circulantes si existen corrientes de secuencia cero en otros devanados con los que esté acoplado inductivamente el grupo conectado en triángulo.

Si se disponen los circuitos de manera que puedan existir corrientes de secuencia cero en los devanados primario y secundario, las corrientes de secuencia cero de un lado inducen en el otro corrientes de secuencia cero que crean fuerzas magnetomotrices iguales y opuestas (despreciando las corrientes de excitación). La impedancia a las corrientes de secuencia cero introducida por dicho banco de transformadores es, pues, la impedancia equivalente, o en cortocircuito, por fase. Por ejemplo, un grupo de transformadores exactamente iguales conectados en estrella-estrella con *ambos* puntos neutros puestos a tierra es equivalente en la red para secuencia cero a la impedancia en cortocircuito de uno de los transformadores en serie con los circuitos primario y secundario (bien entendido, claro está, que todas las corrientes, tensiones e impedancias están referidas a una base común). El circuito equivalente para la secuencia cero es el de la figura 4a. Si existieran corrientes de secuencia cero en los devanados conectados en estrella de un banco estrella-triángulo cuyo neutro de la estrella esté puesto a tierra, las corrientes de secuencia cero que circulan por el lado conectado en estrella inducen en el triángulo corrientes de secuencia cero que no harán mas que circular por él, como se indica en la figura 3. Así, pues, la impedancia a la secuencia cero del banco de transformadores por fase vista desde su lado conectado en estrella es igual a la impedancia equivalente de uno de los transformadores. Sin embargo, por los circuitos exteriores conectados al triángulo no pueden circular corrientes de secuencia cero y el banco, por tanto, actúa como un circuito abierto para las corrientes de secuencia cero, situado en el circuito exterior del lado conectado en triángulo, como se indica en la figura 4b.

En cambio, si se disponen las conexiones del transformador de manera que puedan existir corrientes de secuencia cero en uno de los lados pero no en el otro, la impe-

³ Para un estudio más amplio, véase la primera nota de pie de página de este capítulo. Se estudian en detalle algunos montajes de transformadores en L. F. BLUME, editor, *Transformer Engineering* (New York: John Wiley & Sons, 1938), 142-155.

dancia a las corrientes de secuencia cero en el lado en que pueden existir es la impedancia en circuito abierto o impedancia de excitación de una fase del banco. En el otro lado, el banco actúa como circuito abierto para las corrientes de secuencia cero. Esta es la situación en la disposición indicada en la figura 4c.

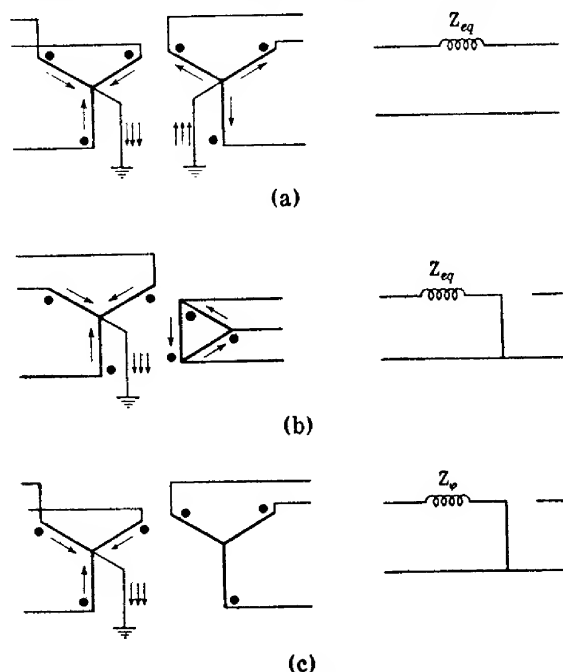


FIG. 4. Circuitos equivalentes para secuencia cero para diferentes montajes de transformadores

Aplicando los principios generales ilustrados en el estudio anterior, puede determinarse la distribución de corrientes de secuencia cero en cualquier banco de transformadores que contenga una combinación cualquiera de devanados conectados en estrella y en triángulo. Si el banco está constituido por transformadores multicircuito, los fenómenos de impedancia (estudiados en el capítulo XXVII) son algo más complicados, si bien para la determinación de la distribución de las corrientes de secuencia cero pueden aplicarse los mismos principios. Estos mismos principios se aplican también a los transformadores trifásicos, igual que a los bancos trifásicos de unidades monofásicas, siendo la única diferencia que la impedancia de excitación para secuencia cero de un transformador trifásico del tipo de núcleo (estudiado en el apartado 2b del capítulo XXVI) es muy inferior a la de un banco análogo de unidades monofásicas. A veces se utilizan transformadores en los que las fases se interconectan en un montaje en zigzag. En el apartado 4a del capítulo XXV se estudia el comportamiento de dichos transformadores con corrientes de secuencia cero circulando por ellos.

PROBLEMAS

1. Tres transformadores de 2 400 : 240 V, 10 kVA, 60 Hz están conectados en triángulo en ambos lados y se utilizan para rebajar una tensión trifásica de 2 400 V para alimentar una carga inductiva equilibrada conectada en triángulo de $6,0 + j 2,0$ ohm por fase. Uno de los transformadores regulares se avería y se sustituye por un transformador viejo de 2 400 : 230 V, 10 kVA y 60 Hz. La impedancia equivalente de cada uno de los dos transformadores originales es de $0,06 + j 0,20$ ohm referida al secundario, y la impedancia equivalente del transformador sustituto es de $0,11 + j 0,36$, referida al lado de baja tensión.

Determinar cuál de los tres transformadores está sobrecargado.

2. Tres transformadores monofásicos, cada uno de 100 kVA, 11 000 : 2 200 V y 60 Hz, están conectados a una línea trifásica de 11 000 V, con sus primarios conectados en triángulo, así como sus secundarios. Los ensayos en cortocircuito de cada uno de los transformadores dieron los siguientes datos:

DATOS DE CORTOCIRCUITO

Transformador	Intensidad	Tensión	Potencia
A	9,10 A	312 V	1 000 W
B	9,10	402	1 130
C	9,10	450	1 200

Determinar, para la condición de equilibrio de las corrientes de la línea, la máxima carga en kVA que pueden alimentar estos transformadores sin que ninguno de ellos se halle sobrecargado.

3. Tres transformadores iguales de 100 kVA se conectan a un circuito trifásico equilibrado. Para las conexiones siguientes, ¿cuál es la máxima carga monofásica que puede aplicarse entre cada par de terminales de línea del secundario sin sobrecalentar ninguno de los transformadores?

- Triángulo-triángulo,
- Estrella-triángulo,
- Triángulo-estrella.

Supóngase que los transformadores funcionen a la tensión y frecuencia nominales.

4. Tres transformadores monofásicos casi exactamente iguales de 10 kVA, 2 400 : 120 V y 60 Hz, se conectan en triángulo en la parte de sus devanados de alta tensión a un circuito trifásico equilibrado de 2 400 V, 60 Hz. Los devanados de baja tensión se conectan en estrella a un sistema trifásico de distribución de cuatro hilos, de manera que puedan conectarse cargas de alumbrado de 120 V entre cualquier línea y el hilo neutro y puedan alimentarse cargas de poca potencia a 208 V, entre líneas.

Cada uno de los tres transformadores consume, cuando se cortocircuita el devanado de baja tensión, 4,6 A y 170 W a una tensión de 110 V.

¿Cuáles serán las tensiones entre los pares de terminales de línea de los secundarios si se conecta entre un terminal de los secundarios y el neutro de los mismos una carga de alumbrado de 83 A, con factor de potencia unidad?

5. Cuando se aplican tensiones de 310 V, a los devanados de alta tensión de tres transformadores iguales de 11 000 : 2 200 V, 100 kVA y 60 Hz, en cortocircuito, cada uno de ellos consume 9,1 A y 1 000 W. Estos tres transformadores están conectados en tri-

ángulo a ambos lados y sus primarios están conectados a un circuito trifásico de 11 000 V, 60 Hz. Entre un par de terminales de los secundarios se conecta una carga monofásica de autoinducción 0,090 H y resistencia 36 ohm. Hallar los valores de las tensiones entre terminales de los secundarios.

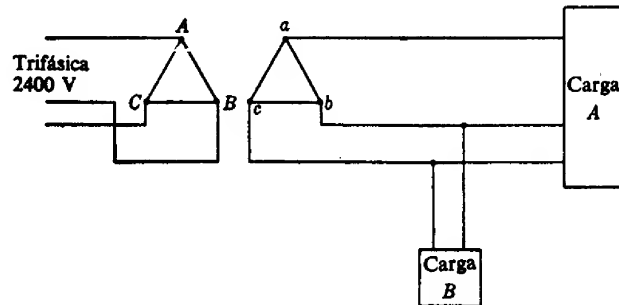


FIG. 5. Conexión de transformadores que alimentan una carga trifásica y otra monofásica, problema 8

6. Dos transformadores, cada uno de 2 400 : 12 000 V, están conectados en triángulo abierto y a sus lados de baja tensión se aplican tensiones trifásicas equilibradas de valor nominal. Del lado abierto del secundario se toma una corriente de carga monofásica de 90 A, a un factor de potencia inductivo de 0,80. Si las impedancias equivalentes de los dos transformadores referidas al secundario son $1,0 + j 8,0$ y $0,7 + j 5,0$ ohm, ¿cuál es la tensión en la carga, y cuál es la tensión de secundario de cada uno de los transformadores?

7. Dos transformadores monofásicos de 100 kVA, 6 600 : 230 V, 60 Hz están conectados en triángulo abierto a un sistema trifásico con tensiones de 6 600 V, entre cada par de conductores de línea. Con los devanados de baja tensión cortocircuitados y 390 V a 60 Hz, aplicados a los devanados de alta tensión, cada transformador consume 17 A y 980 W.

Si entre los terminales de secundario de cada transformador se coloca una carga monofásica de impedancia $0,36 + j 0,30$ ohm a 60 Hz, ¿cuál es la tensión de secundario en el lado abierto de la V?

8. Se quieren conectar tres transformadores en triángulo-triángulo, en la forma indicada en la figura 5, para suministrar potencia a una carga trifásica A sustancialmente equilibrada y a una carga monofásica B. Las condiciones de funcionamiento en las cargas son:

	Carga continua	Carga de pico de dos horas a continuación de carga continua	Durante las dos horas de carga máxima	
			Tensión en la carga	Factor de potencia
Carga A	56 kVA	75 kVA	220 V	0,70
Carga B	30	40	230	0,90

La impedancia compleja equivalente expresada a tanto por uno, de un transformador de distribución standard, puede suponerse que tiene el mismo valor, referido al valor nominal del transformador, para todos los valores nominales comprendidos entre 15 y 100 kVA.

Especificar la potencia nominal en kVA mínima permisible de cada transformador y calcular la razón de su carga de pico a su potencia nominal continua.

Justifíquense todas las aproximaciones o hipótesis realizadas en el curso de la solución.

Conexiones trifásicas de autotransformadores

Los autotransformadores pueden conectarse de varias maneras para transformar tensiones polifásicas¹. Las conexiones trifásicas comunes estudiadas en este capítulo pueden emplearse tanto con tres autotransformadores monofásicos como con un autotransformado trifásico con sus tres devanados para las tres fases arrollados sobre un mismo núcleo magnético*. Nuestro estudio se referirá, principalmente, a la primera de estas posibilidades.

► Los autotransformadores se emplean rara vez cuando la razón de las tensiones es mayor que la 1 : 1, ya que sus ventajas frente a los transformadores de dos circuitos son insignificantes para razones más elevadas de las tensiones, y puesto que con razones más elevadas es mayor el peligro que se produzcan sobretensiones en el sistema de baja tensión a causa de transitorios o averías. ◀

1. CONEXIÓN EN ESTRELLA DE AUTOTRANSFORMADORES

Tres autotransformadores monofásicos pueden conectarse en estrella, como se indica en la figura 1. En estas condiciones, el comportamiento del banco es análogo, en muchos aspectos, al de un banco de tres transformadores de dos circuitos conectados en estrella-estrella. Si el neutro está aislado, como el de la figura 1, las tensiones respecto al neutro están desequilibradas a menos que los transformadores tengan características de excitación exactamente iguales. Además, las tensiones entre línea y neutro contienen terceros armónicos relativamente grandes originados por la supresión de los terceros armónicos de las corrientes de excitación**. Si se pone a tierra el neutro pero se aíslan todos los demás neutros del sistema, estos terceros armónicos de las tensiones respecto al neutro pueden intensificarse mucho por resonancia de las reactancias magnetizantes de frecuencia triple de los transformadores con las reactancias capacitivas de frecuencia triple de las líneas de transmisión respecto a tierra***. Si las líneas de transmisión tienen una capacidad apreciable respecto a tierra, no podrá ponerse a tierra el neutro de los autotransformadores a menos que

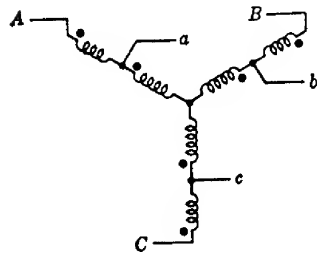


Fig. 1. Autotransformadores conectados en estrella

las reactancias capacitivas de frecuencia triple de las líneas de transmisión respecto a tierra***. Si las líneas de transmisión tienen una capacidad apreciable respecto a tierra, no podrá ponerse a tierra el neutro de los autotransformadores a menos que

¹ Para más detalles acerca de las conexiones de los autotransformadores, véase L. F. BLUME, editor, *Transformer Engineering* (New York: John Wiley & Sons, 1938), capítulos viii y xvi.

* Véase el capítulo XXVI.

** Esto no es cierto para un autotransformador del tipo de núcleo, trifásico, de tres ramas. Véase el apartado 2a del capítulo XXVI.

*** Véase el apartado 2d del capítulo XXIII.

el neutro del sistema se halle también puesto a tierra sólidamente en algún otro lugar, o a menos que los autotransformadores estén dotados de un triángulo de terciarios como se describió anteriormente.

Si está aislado el neutro de los autotransformadores y los neutros del sistema no están puestos a tierra en otra parte, un fallo a tierra de la línea en el sistema de alta tensión aplicaría tensiones anormalmente elevadas entre dos de los terminales de baja tensión y tierra. En consecuencia, no suelen emplearse autotransformadores con neutros aislados en sistemas no puestos a tierra, a menos que la razón de tensiones sea próxima a la unidad.

Los terceros armónicos de las tensiones pueden eliminarse prácticamente por los mismos métodos utilizados a tal fin en los bancos estrella-estrella de transformadores de dos circuitos. El método más satisfactorio es proveer a cada autotransformador de un terciario y conectar en triángulo estos terciarios, proporcionando así un circuito a los terceros armónicos de las corrientes de excitación. En estas condiciones, conviene para la seguridad personal conectar a tierra el neutro de los autotransformadores, con lo que se reducen en gran manera los peligros debidos a tensiones anormales.

2. CONEXIÓN EN TRIÁNGULO DE AUTOTRANSFORMADORES

Tres autotransformadores pueden conectarse en triángulo en la forma indicada en la figura 2. Un posible inconveniente de esta conexión es que las tensiones de

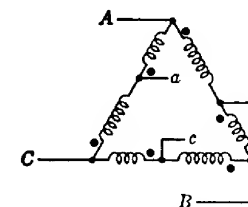


Fig. 2. Autotransformadores conectados en triángulo

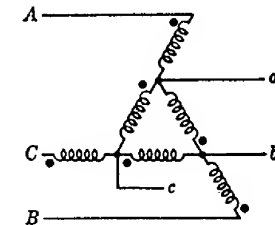


Fig. 3. Conexión de autotransformadores en triángulo prolongado

línea de los secundarios no están en concordancia de fase con las tensiones de línea de los primarios. Además, la mayor razón de transformación que puede obtenerse es 2 : 1. Como en la conexión triángulo-triángulo de transformadores de dos circuitos, los terceros armónicos de las corrientes de excitación circulan por el triángulo, pero no aparecen en las corrientes de línea.

Los autotransformadores también pueden conectarse en triángulo como se indica en la figura 3, en la cual los devanados serie se conectan en serie con las líneas de alta tensión y los devanados comunes se conectan en triángulo. Al igual que en la conexión triángulo de la figura 2, las tensiones de línea de primario y secundario no están en fase.

3. CONEXIÓN DE AUTOTRANSFORMADORES EN TRIÁNGULO ABIERTO

A diferencia de la conexión en triángulo, la conexión en triángulo abierto de autotransformadores, indicada en la figura 4, no está restringida a razones de transformación inferiores a la 2 : 1. Además, si se prescinde de las caídas de tensión debidas a las impedancias de fuga, las tensiones de línea de primario y secundario están en concordia de fase.

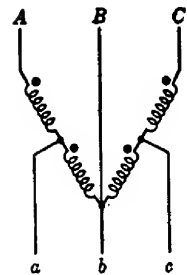


FIG. 4. Conexión de autotransformadores en triángulo abierto

La conexión tiene alguna de las características de la conexión en triángulo abierto de transformadores de dos devanados *. Su factor de utilización es del 86,6 %; es decir, la potencia nominal trifásica del banco es el 86,6 % de las potencias monofásicas nominales combinadas de los dos autotransformadores. Por ser asimétrica la conexión, las caídas en las impedancias de los transformadores introducen un ligero desequilibrio, ordinariamente despreciable, en el circuito.

Si los terminales de los primarios están alimentados por un generador conectado en estrella cuyo neutro esté puesto a tierra, las tensiones respecto a tierra de los secundarios están desequilibradas, ya que al conductor *b* del secundario se aplica la misma tensión que existe entre el conductor *B* del primario y tierra, pero las tensiones entre las líneas *ab* y *bc* de los secundarios son diferentes de las tensiones entre las líneas *AB* y *BC* de los primarios.

► Luego, si se conectan ambos lados de primario y secundario de un banco de autotransformadores conectados en triángulo abierto a circuitos conectados en estrella, sólo podrá conectarse a tierra el neutro de uno de los lados del banco, ya que existe una diferencia de tensión entre los neutros de los circuitos primarios y secundarios. ◀

Si se pusieran a tierra las dos estrellas primaria y secundaria, se cortocircuitaría la diferencia de tensiones y por los circuitos primarios y secundarios circularía una corriente de cortocircuito. Este desplazamiento entre los neutros de los primarios y de los secundarios constituye una característica que puede ser una desventaja de la conexión en triángulo abierto de autotransformadores.

3a. *Compensadores de arranque.* La aplicación más común de la conexión en triángulo abierto de autotransformadores se encuentra en los compensadores de arranque utilizados para aplicar tensiones reducidas a los terminales de los inducidos de los motores trifásicos a fin de limitar las corrientes de arranque a valores que no sean peligrosos para los motores y que no originen caídas de tensión nocivas en las líneas de alimentación. El compensador de arranque consiste en dos autotransformadores monofásicos, o una unidad trifásica, conectados en triángulo abierto, junto con dispositivos adecuados de conmutación. En la figura 5 pueden verse las conexiones elementales, en las cuales *M*, *S* y *R* son interruptores accionados manual o magnéticamente, o bien disyuntores de inmersión en aceite. Para poner en marcha

* Véase el apartado 5 del capítulo XXI.

el motor, se cierran los interruptores *M* y *S* y se aplican al motor tensiones reducidas a través de los autotransformadores. Cuando el motor ha alcanzado su velocidad máxima con las tensiones reducidas, se abren *M* y *S* y se cierra el interruptor *R*, quedando así los autotransformadores desconectados y las tensiones totales de la línea aplicadas al motor. Los interruptores suelen estar conectados mecánicamente entre sí a fin de asegurar la sucesión adecuada de las fases de su funcionamiento, y muchas veces el compensador suele ir provisto de protección adecuada contra las subtensiones y sobreintensidades. Como el servicio normal exigido al compensador es intermitente y de corta duración, los autotransformadores se diseñan para funcionar a grandes densidades de corriente en los devanados y fuertes inducciones magnéticas en los núcleos, a fin de lograr una mayor economía y compacidad. En funcionamiento continuo se calentaría excesivamente en poco tiempo.

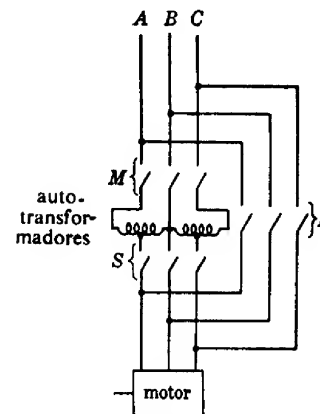


FIG. 5. Conexiones de un compensador de arranque de una etapa

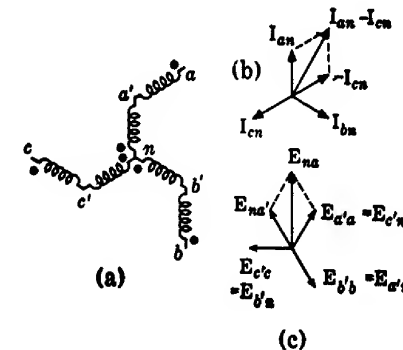


FIG. 6. Conexión en zigzag y diagramas vectoriales de corrientes y tensiones

4. CONEXIÓN EN ZIGZAG

Los transformadores de grupos polifásicos se montan a veces con los devanados de los diferentes transformadores conectados en serie. En la figura 6a puede verse uno de estos tipos de interconexión, que puede representar bien autotransformadores o bien los devanados primarios de transformadores de tres devanados cuyos secundarios no se han dibujado en la figura. Los devanados dibujados paralelos entre sí corresponden a un mismo transformador; por ejemplo, los devanados *aa'* y *nc'*. Todos los devanados tienen igual número de espiras. Obsérvese que los terminales de igual polaridad relativa están conectados juntos y que el circuito es simétrico. Si por los terminales *a*, *b*, *c* penetran corrientes *I_{an}*, *I_{bn}*, *I_{cn}*, en el transformador cuyos devanados son *aa'* y *nc'* los ampere-espira totales debidos a estas corrientes cumplen la relación vectorial,

$$N(I_{aa'} + I_{nc'}) = N(I_{an} - I_{cn}), \quad (1)$$

donde N es el número de espiras de un devanado. En la figura 6b pueden verse estas relaciones vectoriales para el orden de fases abc , de donde,

$$N(I_{an} - I_{cn}) = \sqrt{3} NI_{an} / -30^\circ. \quad (2)$$

Si se conectaran en serie los devanados de un mismo transformador, como en la conexión estrella de la figura 1, los ampere-espira del transformador en la fase a serían $2NI_{an}$. Es decir, en la conexión en zigzag la fuerza magnetomotriz total es $\sqrt{3}/2$, o sea, 0,866 por la que habría si estuvieran conectados en serie los devanados de un mismo transformador.

Además, si las tensiones aplicadas están equilibradas, también lo están las tensiones inducidas en los devanados por los flujos resultantes en los núcleos, como se indica en la figura 6c en la que los vectores representan las fuerzas electromotrices o elevaciones de potencial en los sentidos indicados por el orden de los subíndices. Luego,

$$E_{na} = E_{na'} + E_{a'a} \quad (3)$$

$$= -E_{a'n} + E_{a'a} \quad (4)$$

$$= \sqrt{3} E_{a'a} / 30^\circ. \quad (5)$$

Si se conectaran en serie los devanados de un mismo transformador, como en la conexión en estrella de la figura 1, la tensión inducida E_{na} entre línea y neutro sería $2E_{a'a}$. Así, pues, en la conexión en zigzag, la tensión inducida entre línea y neutro para un flujo dado en el núcleo es $\sqrt{3}/2$ o sea, 0,866 por el valor que tendría en una conexión en estrella. En consecuencia, para una tensión dada E_{na} entre línea y neutro se precisan $1/0,866$ ó sea, 1,15 veces más espiras cuando se conectan en zigzag los devanados (fig. 6a), que cuando se conectan en estrella, si debe ser la misma la magnitud del flujo magnético en el núcleo. En la conexión en zigzag existe un desfase de 30° entre las tensiones de línea a neutro y las tensiones inducidas en los devanados correspondientes.

Si las tensiones aplicadas están equilibradas y se conecta el neutro n al neutro del generador, podrán existir terceros armónicos iguales en las corrientes que penetran en los transformadores por los terminales a, b, c . No obstante, estos terceros armónicos no crean ningún efecto magnetizante total, ya que circulan en sentidos opuestos por los dos devanados de cada núcleo; es decir, el tercer armónico de la corriente de la fase a circula en el sentido aa' , mientras que en el sentido contrario $c'n$ circula un tercer armónico de la corriente de la fase c igual y en concordancia de fase con el anterior, y, como los devanados aa' y nc' se hallan sobre el mismo núcleo, la fuerza magnetomotriz total, debida a los terceros armónicos, que actúa sobre el núcleo es nula *. Luego, tanto si está aislado el punto n como si está conectado al neutro del generador, no hay fuerza magnetomotriz creada por los terceros armónicos en cada núcleo y, en consecuencia, la ausencia de las fuerzas magnetomotrices de los terceros armónicos (necesarias para permitir la variación sinusoidal

* Como las corrientes de secuencia cero del método de las componentes simétricas son iguales y están en fase, se comportan como terceros armónicos de corrientes de excitación equilibradas. Esta característica de las corrientes de secuencia cero se estudia en la parte (a) de este apartado.

de los flujos) se traduce en un tercer armónico de la tensión inducida en cada uno de los seis devanados. Como estos terceros armónicos de las tensiones en cada uno de los devanados son iguales y están en concordancia de fase, y como la tensión E_{na} entre línea y neutro es igual a la diferencia entre las tensiones generadas de dos devanados (ec. 4), no habrá ningún tercer armónico en la tensión entre línea y neutro, como ocurriría en un banco conectado en estrella y con neutro aislado.

4a. *Transformadores de puesta a tierra conectados en zigzag.* Si se pone a tierra el punto neutro n de la figura 6a, los transformadores interconectados reciben el nombre de transformadores de puesta a tierra, siendo el único fin del banco poner a tierra el neutro de otro sistema que, de no ser así, quedaría aislado. Si es simétrico el sistema total al que se conectan los transformadores, las tensiones entre línea y neutro en éstos estarán equilibradas y las corrientes que penetran en los transformadores bastan solamente para excitarlos. Si en el sistema hubiera una asimetría debida, por ejemplo, a un fallo a tierra de la línea, con lo que las tensiones entre línea y neutro en los transformadores no estarían equilibradas, por las fases an, bn y cn de los transformadores de puesta a tierra pueden circular corrientes componentes que sean iguales entre sí y estén en concordancia de fase. Si se analiza el sistema asimétrico por el método de las componentes simétricas, las corrientes componentes que sean iguales y estén en concordancia de fase son las componentes de secuencia cero. Las corrientes de secuencia cero que circulan de a a a' y de c' a n en un mismo transformador no crean imanación total en el núcleo, ya que dichas corrientes circulan en sentidos contrarios respecto al núcleo. En consecuencia, la tensión entre línea y neutro necesaria para mantener esta corriente de secuencia cero es igual al producto de la intensidad de la corriente por la suma de las impedancias de fuga de los devanados aa' y $a'n$. Cuando los transformadores son exactamente iguales, puede medirse esta impedancia conectando en serie-oposición los dos devanados de un transformador —como se indica en la figura 7— aplicando una tensión baja, y midiendo la tensión, la intensidad y la potencia. Por ser la impedancia de fuga combinada de los dos devanados del orden de 0,002 de la impedancia de excitación, los transformadores ofrecen una impedancia mucho menor a las corrientes de secuencia cero que a las corrientes de excitación equilibradas que circulan cuando el sistema completo está equilibrado. Por tanto, en condiciones normales precisan muy poca corriente de excitación, pero proporcionan un camino a tierra de impedancia relativamente baja, manteniendo así el neutro del sistema al potencial de tierra. En el caso de un fallo a tierra de una línea del sistema, los transformadores de puesta a tierra permiten la circulación de una corriente de avería lo suficientemente intensa para accionar los relés protectores.

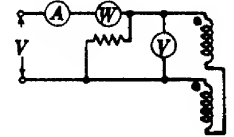


Fig. 7. Circuito para medir la impedancia a la secuencia cero de un banco de autotransformadores en zigzag

PROBLEMAS

1. Se conectan en triángulo, como el de la figura 2, tres autotransformadores iguales de razón 2 : 1. Con tensiones aplicadas equilibradas y una carga equilibrada de I ampere por fase en el circuito secundario abc , ¿cuáles son las intensidades de la corriente de línea

del primario I_A , y de las corrientes I_{Aa} e I_{Ab} de los devanados? ¿Qué defasajes tienen estas corrientes?

2. Los autotransformadores de razón 2 : 1 de la figura 2 alimentan una carga monofásica de I ampere conectada a los terminales ab . ¿Cuáles son las intensidades de las corrientes de línea en cada uno de los terminales primarios A , B y C ?

3. Tres autotransformadores de razón 2 : 1 están montados en estrella, como en la figura 1. Entre los terminales ab del secundario se conecta una carga de lámparas que conduce I ampere, y entre los terminales bc se conecta otra carga que consume la misma intensidad con un factor de potencia 0,50, corriente retrasada. ¿Cuáles son las intensidades de las corrientes que circulan por los devanados de cada transformador?

4. Se conectan tres autotransformadores en triángulo prolongado, como en la figura 3. La razón de las tensiones de línea de primario a secundario es de 2 : 1. ¿Cuál debe ser la razón de los números de espiras de los dos devanados de cada transformador? ¿Cuál es el defasaje entre la tensión V_{AB} del primario y la V_{ab} del secundario? Si a los terminales abc de los secundarios se conecta una carga equilibrada de lámparas, ¿cuál es el defasaje entre la corriente de línea I_A del primario y la tensión de línea V_{AB} del primario?

5. A los terminales del secundario de cada uno de los tres grupos de autotransformadores montados como se indica en las figuras 1, 2 y 3, se conecta una carga resistiva equilibrada. Compárense los efectos producidos abriendo el disyuntor de la línea A en estos tres montajes.

Transformadores trifásicos

En la transformación de potencia trifásica se prefiere frecuentemente un transformador trifásico a un banco de tres unidades monofásicas. El transformador trifásico suele ser menos caro que un banco de tres unidades monofásicas de igual potencia nominal, porque los devanados de la unidad trifásica están colocados sobre un núcleo magnético común en vez de sobre tres independientes, traduciéndose la consolidación en un considerable ahorro de material. Al igual que en los transformadores monofásicos, la disposición del circuito magnético clasifica a los transformadores trifásicos en transformadores de *tipo acorazado* en los que el circuito magnético es una coraza que rodea a los devanados, y de *tipo de núcleo*, en los que el circuito magnético es un núcleo rodeado por los devanados.

1. TIPO ACORAZADO

Consideremos tres transformadores monofásicos con sus núcleos reunidos de manera que se toquen, según indica la figura 1a. La única diferencia entre esta disposición de tres transformadores monofásicos y el transformador trifásico indicado en la figura 1b, es que las láminas del núcleo de este último están entrelazadas;

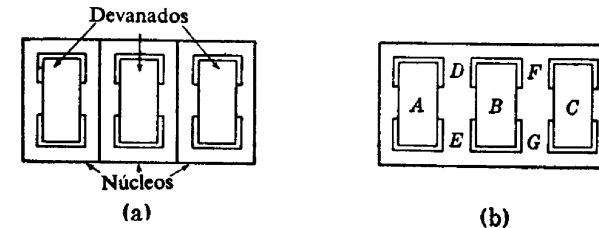
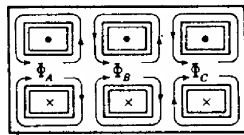
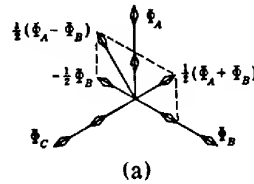


FIG. 1. Transformador de tipo acorazado; a) tres transformadores monofásicos, y b) la unidad trifásica correspondiente

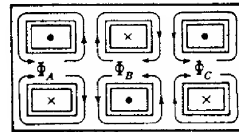
las tres partes del núcleo no están separadas. Esta unidad de los núcleos magnéticos hace que los flujos en el núcleo correspondientes a fases diferentes se superpongan en las partes del núcleo indicadas por D , E , F , G de la figura 1b, lo que permite, según se verá más adelante, un ahorro considerable de material en el núcleo.

Supongamos que el transformador funciona con tensiones inducidas sinusoidales equilibradas. Los flujos en el núcleo que atraviesan los tres primarios deberán tener forma de onda sinusoidal y estar equilibrados, y pueden representarse por los vectores Φ_A , Φ_B , Φ_C de la figura 2a. Los tres devanados primarios pueden conectarse simétricamente en el circuito de manera que los sentidos positivos de los flujos en el núcleo Φ_A , Φ_B , Φ_C sean los mismos, como en la figura 2b; o bien, pueden invertirse las conexiones de la fase central, con lo que los sentidos positivos serán los indicados

en la figura 2c. En la figura 2b, los flujos en las partes indicadas por D y E en la figura 1b son, cada uno de ellos, iguales a $1/2 (\Phi_A - \Phi_B)$, y del diagrama vectorial de la figura 2a, la magnitud de cada uno de estos flujos resulta ser $(\sqrt{3}/2) \phi$, donde ϕ es la magnitud de cada uno de los flujos en el núcleo Φ_A, Φ_B, Φ_C . En cambio, en la figura 2c (en la que se han invertido las conexiones de la fase central), los flujos en D y E son, cada uno, iguales a $1/2 (\Phi_A + \Phi_B)$, y del diagrama vectorial resulta que la magnitud de cada uno de estos flujos es $1/2 \phi$, o sea, $1/\sqrt{3}$ de su magnitud en la figura 2b. En consecuencia, si todas las partes del núcleo deben funcionar a la misma



(b)



(c)

FIG. 2. Relaciones de los flujos en un transformador trifásico de tipo acorazado; a) diagrama vectorial para tensiones de fase equilibradas, b) sentidos positivos de los flujos para devanados conectados simétricamente, y c) sentidos positivos de los flujos cuando se invierten las conexiones de la fase central. El método normal de conexión es el indicado en (c)

inducción magnética máxima, el área de la sección recta del núcleo en los espacios D, E, F, G entre las fases, cuando se invierten las conexiones de la fase central (fig. 2c), basta que sea igual al producto de $1/\sqrt{3}$, o sea, 0,58 por el área de la sección recta para el caso en que se realicen las conexiones de manera que los sentidos positivos de los flujos en el núcleo sean los mismos (fig. 2b).

► Por tanto, las conexiones de la fase central de un transformador trifásico de tipo acorazado se invierten siempre para que los sentidos positivos de los flujos sean los indicados en la figura 2c. ◀

Cuando se realizan las conexiones como en la figura 2c, la magnitud del flujo en las partes D, E, F, G del núcleo es la misma que las de los flujos en las partes correspondientes del núcleo en un transformador monofásico del tipo acorazado. En consecuencia, el núcleo de un transformador trifásico del tipo acorazado contiene menos material que los núcleos de tres transformadores monofásicos del tipo acorazado diseñados para igual flujo en el núcleo e igual inducción magnética máxima. La parte sombreada de la figura 3 muestra el material del núcleo que puede ahorrarse con el diseño trifásico.

En todas las partes del núcleo, exceptuando lo anteriormente indicado, los flu-

jos son los mismos que existirían en transformadores monofásicos. La superposición de los flujos no afecta de manera importante al funcionamiento del transformador trifásico del tipo acorazado salvo en modificar las formas de onda y desequilibrar ligeramente las intensidades de las corrientes de excitación.

► Así, pues, no existe diferencia sustancial entre las características de funcionamiento de un transformador trifásico del tipo acorazado y un grupo de tres transformadores monofásicos conectados en forma análoga. ◀

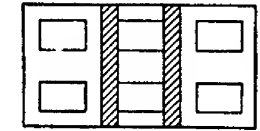


FIG. 3. Comparación de diseños con transformadores monofásicos y trifásicos del tipo acorazado. La parte sombreada indica el material del núcleo que se ahorra en el diseño trifásico

2. TIPO DE NÚCLEO CON TRES RAMAS

Consideremos un grupo de tres transformadores monofásicos del tipo de núcleo cuyos devanados se hallen situados en una misma rama en cada transformador, como se indica esquemáticamente en la figura 6a. Si las tensiones inducidas están

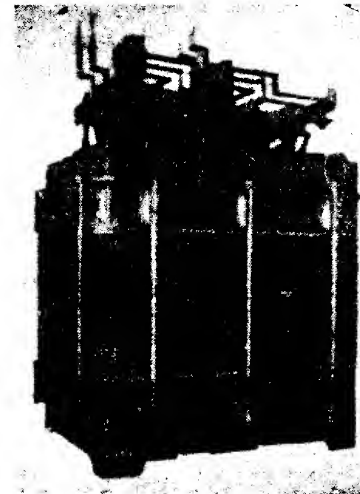


FIG. 4. Partes operantes de un auto-transformador trifásico del tipo acorazado cuyos valores nominales son: 60 Hz, 36 000 kVA, 34 500 : 13 800 V.

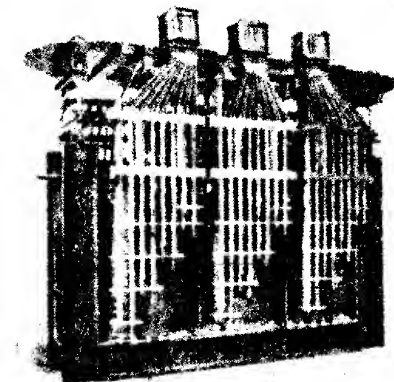


FIG. 5. Núcleo, bobinas y conjunto de entrada de un transformador trifásico para servicios intensos utilizado para suministrar potencia a un horno eléctrico de 75 toneladas de capacidad para cada carga. Los valores nominales son: 25 Hz, 15 000 kVA, 6 600 : 242 V, triángulo-triángulo, con un juego de tomas. Este transformador tiene un núcleo de 5 ramas. Sus características eléctricas son análogas a las de una unidad trifásica del tipo acorazado

equilibradas y varían sinusoidalmente, los flujos en los núcleos también estarán equilibrados y tendrán forma de onda sinusoidal y, en consecuencia, su suma es nula

en todo instante. Si se disponen los transformadores de manera que los sentidos positivos de sus flujos en el núcleo sean los mismos en las ramas adyacentes de los núcleos, como en la figura 6a, la suma instantánea de los flujos en estas ramas es nula. Luego, si se unen los núcleos por las partes superior e inferior, formando dos yugos en forma de Y como en la figura 6b, pueden suprimirse las ramas de los núcleos

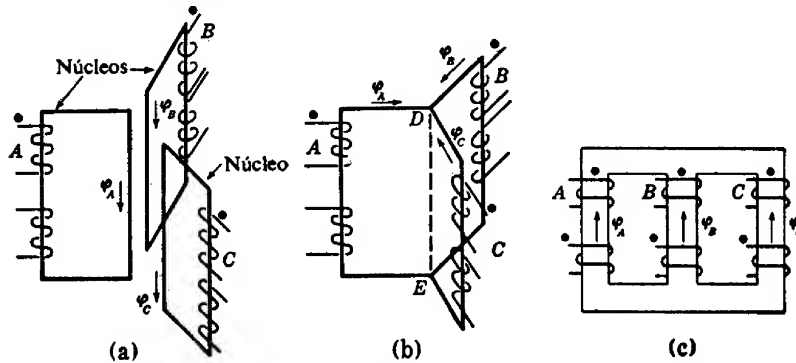


FIG. 6. Síntesis de un transformador trifásico de tres ramas, tipo de núcleo, a partir de tres unidades monofásicas

situadas en el centro, indicadas por la línea de trazos, sin que se perturben los flujos o las corrientes de excitación. Las condiciones en el circuito magnético son análogas a las de un circuito eléctrico que contenga un generador conectado en estrella y una carga conectada en estrella, siendo las ramas centrales del núcleo el equivalente magnético de una conexión eléctrica de baja impedancia entre los neutros del generador y de la carga. En la analogía con los circuitos eléctricos si la suma instantánea de las corrientes de línea suministradas a la carga es nula, no circulará corriente por el conductor neutro, el cual podrá suprimirse sin perturbar el circuito. En cambio, en el circuito eléctrico, si no es nula la suma instantánea de las intensidades de las corrientes de línea cuando se conectan los neutros del generador y de la carga, la supresión del conductor neutro perturbaría el circuito. Análogamente, si en el circuito magnético de la figura 6b, por cualquier razón, no se anulara la suma de flujos en las ramas centrales dibujadas con línea de trazos, la supresión de estas ramas perturbaría la distribución de los flujos. El flujo desequilibrado tendría que cerrar su circuito a través del camino de gran reluctancia constituido por el aire desde el yugo superior D hasta el inferior E, de la figura 6b. La analogía en el circuito eléctrico sería la inserción de un conductor neutro de impedancia elevada.

En el transformador real del tipo de núcleo de tres ramas, no existen las ramas centrales punteadas en la figura 6b, se reducen a cero las partes horizontales del núcleo del transformador B, y los núcleos se disponen en un mismo plano, según puede verse en las figuras 6c y 7. El resultado es un considerable ahorro de material en el núcleo. Esta construcción desequilibra ligeramente los circuitos magnéticos, con lo que se desequilibran algo las corrientes de excitación. En este aspecto son análogos los transformadores de los tipos de núcleo y acorazado. No obstante, en el tipo acorazado existe en cada fase un camino de hierro para el flujo, mientras en

el tipo de núcleo de tres ramas el flujo desequilibrado debe cerrar su circuito a través del aire.

► Así, pues, las características de los transformadores trifásicos del tipo de núcleo y del tipo acorazado serán diferentes cuando la suma instantánea de los flujos de las fases no sea nula. Con esta excepción —que puede ser importante en las circunstancias que se estudian a continuación— no existe ninguna diferencia sustancial entre las características eléctricas de un transformador trifásico del tipo de núcleo y un transformador trifásico del tipo acorazado o un grupo de transformadores monofásicos, conectados en forma análoga. ◀

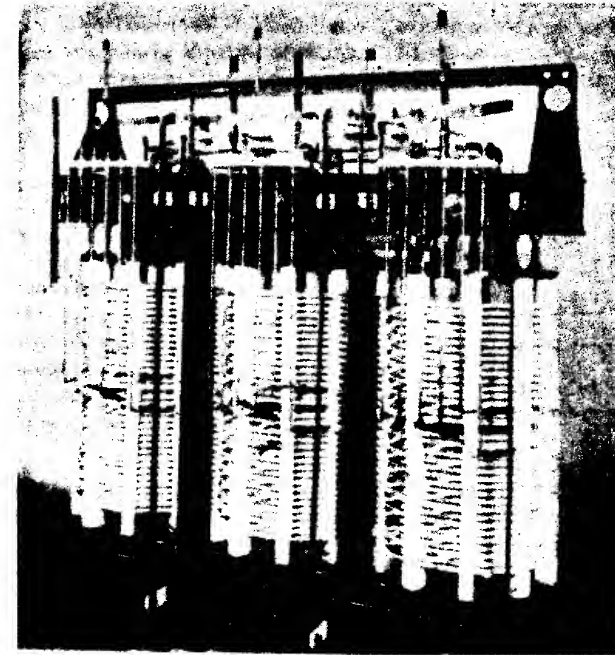


FIG. 7. Núcleo y bobinas de un transformador trifásico de potencia del tipo de núcleo con tres ramas, refrigerado por aire

La suma instantánea de flujos de fase puede no ser nula, bien a causa de los terceros armónicos del flujo resultantes de los fenómenos de excitación en la conexión estrella-estrella, o bien a causa de corrientes desequilibradas con componentes de secuencia cero. En las dos secciones siguientes de este apartado se estudian las características de los transformadores trifásicos del tipo de núcleo de tres ramas que se hallen en estas condiciones.

2a. *Fenómenos de excitación en los transformadores trifásicos del tipo de núcleo de tres ramas conectados en estrella-estrella.* Si se conectan en estrella los primarios con su neutro aislado, la suma de las intensidades de las corrientes de excitación

debe ser nula. Si el circuito magnético fuera perfectamente simétrico y a los tres terminales de línea de los primarios se aplicaran tensiones de línea sinusoidales equilibradas, las corrientes de excitación estarían equilibradas; es decir, serían de igual intensidad y forma de onda y estarían defasadas en un tercio de periodo. El desequilibrio en el circuito magnético debido a la construcción trifásica de tipo de núcleo es tan pequeño que para los fines de este estudio pueden considerarse las corrientes de excitación como sustancialmente equilibradas.

Si es cero la suma de tres corrientes equilibradas (a causa del neutro aislado), las corrientes no pueden contener armónicos terceros o de orden múltiplo del tercero. Esto es igual que la condición existente cuando se conectan en estrella con el neutro aislado, tres transformadores monofásicos.

En el caso de transformadores monofásicos, la supresión de los terceros armónicos de las corrientes de excitación introduce terceros armónicos en los flujos, por lo que existen terceros armónicos importantes en las tensiones entre línea y neutro del banco. En el apartado 2d del capítulo XXIII se estudian las características perjudiciales de estos terceros armónicos de las tensiones.

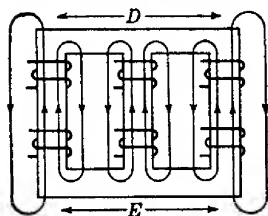


Fig. 8. Caminos de los terceros armónicos y otras componentes de secuencia cero del flujo en un transformador trifásico del tipo de núcleo de tres ramas

Sin embargo, el comportamiento de un transformador trifásico del tipo de núcleo de tres ramas es totalmente diferente. Los terceros armónicos de los flujos en el núcleo están en concordancia de fase y en consecuencia el circuito magnético para los terceros armónicos del flujo se completa a través del aire desde el yugo superior *D* al inferior *E*, según se indica en la figura 8. La gran reluctancia de este camino de aire limita los terceros armónicos de los flujos a valores pequeños y por tanto los terceros armónicos de las tensiones entre línea y neutro son relativamente pequeños.

► Así, pues, un transformador del tipo de núcleo de tres ramas puede conectarse en estrella-estrella con neutros aislados sin que se produzcan terceros armónicos importantes de las tensiones respecto al neutro, como ocurriría en un banco de transformadores monofásicos o en un transformador trifásico del tipo acorazado conectado de igual manera.◀

Las características magnéticas del hierro exigen un tercer armónico del campo magnético de excitación cuando varía sinusoidalmente la inducción magnética; con todo, en el transformador del tipo de núcleo de tres ramas resulta una variación de flujos sustancialmente sinusoidal aun cuando se supriman los terceros armónicos de las corrientes de excitación mediante la conexión estrella-estrella con neutros aislados. A primera vista, estas dos aseveraciones parecen contradictorias, pero profundizando en ellas se ve que no lo son. En realidad, existen terceros armónicos relativamente pequeños de los flujos, cuyos caminos van por el aire desde el yugo superior *D* hasta el inferior *E* de la figura 8. Para crear estos terceros armónicos de los flujos, debe existir un tercer armónico de la caída de potencial magnético a través del camino en el aire desde *E* hasta *D*. En consecuencia, existe una diferencia de potencial magnético resultante que actúa sobre cada una de las ramas verticales del núcleo, debida en parte a la fuerza magnetomotriz de la corriente de excitación

y en parte al efecto de los armónicos del flujo tercero y de orden múltiplo del tercero. El tercer armónico del flujo se ajusta por sí mismo de manera que el tercer armónico de la elevación de potencial magnético que actúa sobre cada rama vertical del núcleo desde *E* a *D* —según se requiere para la existencia del tercer armónico del flujo en el camino en el aire desde *D* hasta *E*— sea igual al tercer armónico de la fuerza magnetomotriz exigida por el hierro. Como la reluctancia del camino de aire desde *D* hasta *E* es relativamente elevada, un tercer armónico del flujo relativamente pequeño se traduce en un tercer armónico mucho más importante de la fuerza magnetomotriz requerida por el hierro, y por tanto la variación de flujo es casi sinusoidal.

2b. *Corrientes de secuencia cero en los transformadores del tipo de núcleo de tres ramas.* Consideremos un transformador del tipo de núcleo, de tres ramas, conectado en estrella-estrella, que suministre potencia a una carga trifásica conectada en estrella. El neutro de los secundarios está conectado al neutro de la carga. Si ésta está desequilibrada, la suma instantánea de las intensidades de las corrientes de línea suministradas a la carga puede no ser nula, por lo que por el hilo neutro de los secundarios puede circular corriente. Si se analiza el circuito por el método de las componentes simétricas, la corriente que circula por cada fase contiene una componente de secuencia cero igual a un tercio de la corriente que circula por el neutro.

Si se conecta el neutro de los primarios al del generador, cada fase del primario recibe su potencia independientemente de las otras fases. En estas condiciones y prescindiendo de las corrientes de excitación, las corrientes de primario y secundario crean fuerzas magnetomotrices iguales y opuestas y por tanto, las corrientes de primario y secundario tienen intensidades inversamente proporcionales a los números de espiras de los devanados de primario y de secundario, y cada fase del transformador es equivalente a un transformador monofásico ideal en serie con la impedancia equivalente o en cortocircuito de los dos devanados. Así, pues, cuando se conecta el neutro del primario al del generador, no existe diferencia esencial entre el comportamiento de un transformador del tipo de núcleo, de tres ramas, conectado en estrella-estrella y un banco de transformadores monofásicos conectado de manera análoga.

En cambio, si está aislado el neutro de los primarios, la suma instantánea de las intensidades de las corrientes que circulan por las líneas de los primarios debe ser nula; es decir, no puede haber corrientes de primario de secuencia cero. Si se prescinde de los efectos de las corrientes de excitación, la suma instantánea de las intensidades de las corrientes que circulan por los secundarios deberá ser, por tanto, también nula; es decir, las únicas corrientes de secundario de secuencia cero que pueden existir son corrientes de excitación, ya que sólo están presentes en un devanado de cada fase sin inducir en el otro devanado una componente de carga de la corriente igual y opuesta.

En el caso de un banco estrella-estrella de transformadores monofásicos (o de un transformador trifásico del tipo acorazado conectado en forma análoga) cuando el neutro de primarios está aislado del neutro de la carga, todo intento de suministrar corriente a una carga monofásica conectada al neutro de los secundarios hará circular por los dos transformadores descargados corrientes de excitación mayores de lo normal, y por tanto desequilibrarán en gran manera las tensiones respecto al neutro*. Cuando se desequilibran las tensiones respecto al neutro, también se de-

* Véase el apartado 2b del capítulo XXI.

seguilibran los flujos; es decir, su suma instantánea no es nula, y contienen componentes de secuencia cero.

Sin embargo, en un transformador del tipo de núcleo, de tres ramas, el flujo desequilibrado de secuencia cero debe completar su circuito a través del camino de aire de gran reluctancia desde el yugo superior *D* hasta el yugo inferior *E* de la figura 8. En este aspecto, el flujo debido a las corrientes desequilibradas de secuencia cero es como el tercer armónico del flujo descrito en la parte *a*) de este apartado.

► Así, pues, en un transformador del tipo de núcleo, de tres ramas, el flujo desequilibrado de secuencia cero está limitado a un valor relativamente pequeño y por tanto las tensiones respecto al neutro tienden a permanecer equilibradas, a pesar de las fuerzas magnetomotrices desequilibradas resultantes de la carga monofásica unida al neutro. Conectando entre línea y neutro de un transformador del tipo de núcleo, de tres ramas, conectado en estrella-estrella, una carga monofásica igual a un tanto por ciento no muy grande de la potencia nominal trifásica, podrá ser alimentada sin desequilibrar seriamente las tensiones de fase, aun cuando estuviera aislado el neutro de los primarios ¹. ◀

3. CONEXIÓN EN TRIÁNGULO ABIERTO DE TRANSFORMADORES TRIFÁSICOS

Si se avería una fase de un transformador trifásico conectado en triángulo-triángulo, puede conectarse el transformador en triángulo abierto y utilizarlo para alimentar cargas de hasta $1/\sqrt{3}$ o sea, 0,58 de su potencia nominal *. Los devanados primario y secundario de la fase averiada deberán desconectarse del circuito.

En el caso de un transformador del tipo acorazado, estos devanados pueden estar o en circuito abierto o cortocircuitados. Si están en circuito abierto, en ellos se inducen tensiones cuyos valores pueden ser de, aproximadamente, la cuarta parte de la tensión nominal. Si están en cortocircuito, las tensiones inducidas crean corrientes de cortocircuito, pero el efecto magnético de estas corrientes inducidas obligan a que la mayor parte del flujo discorra por caminos que no abrazan a los devanados en cortocircuito. Por tanto, las corrientes en los devanados cortocircuitados son relativamente débiles.

► Sin embargo, en los transformadores del tipo de núcleo, de tres ramas, los dos devanados de la fase averiada deben dejarse *en circuito abierto*, ya que los caminos de retorno de los flujos de las otras dos fases deben atravesar el núcleo de la fase averiada. Así, pues, si la avería es un cortocircuito interno, será imposible hacer funcionar en triángulo abierto un transformador del tipo de núcleo, de tres ramas, sin abrir antes el tanque y quitar el cortocircuito. ◀

4. COMPARACIÓN DE LOS TRANSFORMADORES TRIFÁSICOS Y MONOFÁSICOS

Se ha visto en los apartados anteriores que la superposición de los circuitos magnéticos se traduce en un ahorro considerable de material en el núcleo de un transformador trifásico si se considera el material que se emplearía en los núcleos de un banco

¹ Para profundizar más en este tema, véase L. F. BLUME, editor, *Transformer Engineering* (New York: John Wiley & Sons, 1938), 188-190.

* Véase el apartado 5 del capítulo XXI.

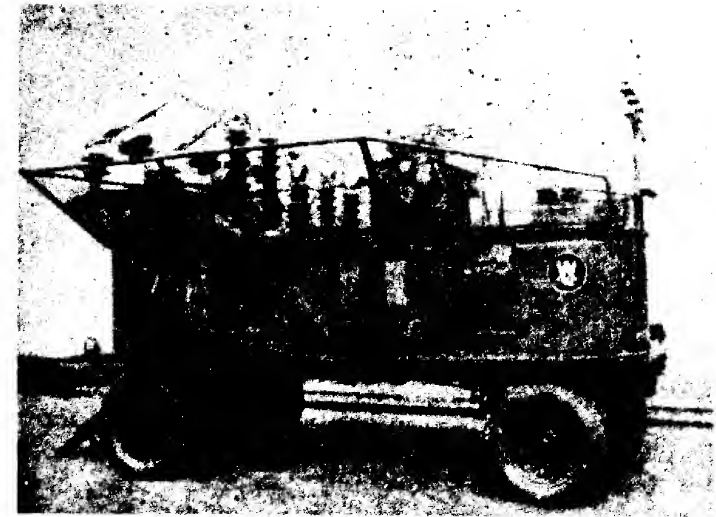


Fig. 9. Subcentral trifásica portátil de 33 000 : 5 000 V para casos de emergencia. La subcentral contiene interruptor de alta tensión, pararrayos, transformador trifásico y disyuntor de baja tensión



Fig. 10. Subcentral trifásica de 750 kVA 13 800 : 4 800 V. Además del transformador, el equipo incluye interruptores y fusibles para alta tensión, disyuntor de baja tensión y un cambiador de tomas automático para 13 800 V.

de tres unidades monofásicas de características análogas. Además, mientras tres unidades monofásicas pueden precisar seis pasatapas de alta tensión y seis de baja, un transformador trifásico sólo requiere tres de cada clase, realizándose las conexiones entre las fases en un cuadro de terminales interior. El tanque único de mayor tamaño de un transformador trifásico puede costar menos que los tres tanques menores de un banco de unidades monofásicas. Sin embargo, la unidad trifásica puede necesitar radiadores u otros medios de refrigeración más caros.

El resultado de estos ahorros de material es que, en tamaños para transformadores de potencia, un transformador trifásico suele costar y pesar menos que un banco de transformadores monofásicos de características análogas. No obstante, deberán observarse ciertas excepciones a esta aseveración. En tamaños pequeños (es decir, para potencias nominales del banco inferiores a 300 kVA, o sea 100 kVA por fase) y para tensiones normales de los circuitos de distribución, se tiene una demanda mucho mayor de transformadores monofásicos que de unidades trifásicas; en consecuencia, el costo de fabricación inferior resultante de una producción en cantidad de unidades monofásicas compensa el costo probablemente mayor de los materiales. Para estas potencias nominales, pues, no existe una diferencia sustancial entre los costos de un transformador trifásico y de un banco de transformadores monofásicos. Además, en tamaños pequeños, la unidad trifásica puede contener en realidad más material y peso que tres unidades monofásicas de igual potencia nominal del banco, especialmente cuando para las unidades monofásicas se emplea el diseño de núcleo arrollado *.

Las principales ventajas e inconvenientes de un transformador trifásico comparado con un banco de unidades monofásicas pueden resumirse de la manera siguiente:

Ventajas de los transformadores trifásicos

1. Suele costar menos.
2. Suele pesar menos.
3. Ocupa menos espacio.
4. Sólo hay que manejar y conectar una unidad.

Inconvenientes

1. Mayor peso por unidad.
2. Mayor costo de las unidades de recambio.
3. Mayor costo de las reparaciones.

PROBLEMAS

1. Al devanado de baja tensión de la rama central de un transformador trifásico del tipo de núcleo, de tres ramas, se aplica una tensión monofásica de 110 V y de frecuencia nominal. La intensidad de la corriente es de 1,0 A cuando todos los demás devanados están en circuito abierto.

a) ¿Cuáles son las tensiones en circuito abierto de cada uno de los otros dos devanados de baja tensión?

b) Si se cortocircuita uno de los devanados de baja tensión, ¿cuál es la tensión en circuito abierto del otro devanado de baja tensión? Estímese la corriente en el devanado cortocircuitado.

* Véase el apartado 1 del capítulo XI.

c) Si se cortocircuita uno de los devanados de baja tensión y se conecta una resistencia de 10 ohm entre los terminales del otro devanado de baja tensión, estimar la intensidad de la corriente que circula por cada uno de los devanados de baja tensión.

Supóngase que las resistencias de los devanados son despreciables y que no existe campo magnético fuera del núcleo.

2. Los devanados de baja tensión de un transformador trifásico del tipo de núcleo, de tres ramas, se conectan en triángulo y a los terminales de éste se aplican tensiones trifásicas equilibradas de 440 V a la frecuencia nominal.

Si se desconecta de los otros y de la alimentación trifásica el devanado de baja tensión de la rama central, ¿qué tensión se genera en él? Esta desconexión, ¿hará aumentar o disminuir las corrientes en vacío de los otros dos devanados de baja?

3. Al devanado de baja tensión central de un transformador trifásico del tipo acorazado se aplica la tensión nominal de 2 400 V, a la frecuencia nominal. Estimar la tensión en circuito abierto generada en cada uno de los otros dos devanados de baja tensión.

Transformadores multicircuito

En muchas ocasiones se utilizan transformadores mono- o trifásicos para interconectar tres o más circuitos independientes. Aun cuando pueden utilizarse transformadores de dos devanados, se pueden obtener los mismos resultados a un costo inferior y con pérdidas menores empleando transformadores que tengan tres o más devanados independientes.

Ejemplo de aplicación monofásica es el transformador de distribución que alimenta un circuito de tres hilos a 120/240 V mediante dos secundarios, cada uno de los cuales puede cargarse independientemente. El análisis de un tal transformador, cuando esté alimentando cargas desiguales a 120 V, debe basarse en la teoría del transformador de tres circuitos. Una aplicación algo parecida en circuitos de comunicación la constituyen los transformadores con toma central en el secundario, utilizados en los amplificadores con válvulas de vacío trabajando en contrafase¹.

Una aplicación trifásica común de los transformadores de tres circuitos se encuentra en la conexión estrella-estrella-triángulo descrita en el apartado 3b del capítulo XXIII. El triángulo de terciarios proporciona un circuito a los terceros armónicos de las corrientes de excitación, cuya ausencia podría introducir terceros armónicos nocivos en las tensiones respecto al neutro de los devanados conectados en estrella. También los terciarios pueden suministrar potencia a una carga local, tal como aparatos auxiliares o condensadores sincrónicos utilizados para regular el factor de potencia o la tensión².

Es a menudo conveniente alimentar un sistema de distribución importante a partir de dos sistemas de transmisión separados —que pueden ser de tensiones diferentes— de manera que en el caso de avería de una u otra línea de transmisión el sistema de distribución pueda ser alimentado por el otro generador. En estas condiciones suelen utilizarse transformadores de tres circuitos.

A veces, un sistema de distribución grande se divide en dos partes alimentadas cada una de ellas por un grupo independiente de devanados de un banco trifásico de transformadores de tres circuitos. Cuando se subdivide la carga de esta manera, las corrientes resultantes de cortocircuitos accidentales pueden reducirse sin afectar en forma contraproducente la regulación de tensión. Así, pues, con una carga subdividida, cada devanado secundario suministra sólo parte de la corriente de carga y por tanto puede diseñarse para tener una reactancia de fuga mayor de la que sería permisible para la misma regulación de tensión con una carga sin dividir. Una mayor reactancia de fuga se traduce en una corriente de cortocircuito más débil.

Otro empleo común de los transformadores multicircuito se encuentra en los bancos de transformadores para transformación de fase. Empleando un banco adecuadamente conectado de transformadores multicircuito, puede obtenerse, por

ejemplo, potencia hexafásica a partir de una alimentación trifásica. Estas conexiones de los transformadores se estudian en el capítulo XXVIII.

Se utilizan muchos tipos de transformadores multicircuito. Los circuitos exteriores pueden conectarse todos a devanados separados que están aislados entre sí, o bien pueden haber partes de devanados que sean comunes a dos o más circuitos, como ocurre en los autotransformadores*. Los transformadores utilizados en montajes trifásicos pueden ser transformadores monofásicos o trifásicos de los tipos de núcleo o acorazados con varios devanados por fase. Los devanados trifásicos pueden conectarse de varias maneras, siendo los montajes más comunes las conexiones en estrella y en triángulo.

Como el funcionamiento de los circuitos trifásicos equilibrados puede determinarse analizando una fase única**, y puesto que (salvo para los fenómenos de excitación) las características por fase de un transformador trifásico no son diferentes de las de uno monofásico, la teoría del transformador monofásico multicircuito desarrollada en este capítulo es aplicable sobre una base por fase a problemas trifásicos en que intervengan transformadores trifásicos o bancos de transformadores monofásicos***. Además, el análisis es aplicable a las características externas de los autotransformadores tanto como a los transformadores que tengan devanados separados, ya que las características de un autotransformador vistas desde sus terminales pueden calcularse a partir de sus impedancias en circuito abierto y cortocircuito por los mismos métodos de análisis aplicables a un transformador que tenga devanados separados§. Aun cuando las corrientes que circulan por algunos de los devanados de un autotransformador son algo diferentes de las que circulan por los circuitos exteriores, pueden calcularse fácilmente a partir de las corrientes de los circuitos.

Del empleo de transformadores multicircuito surgen problemas importantes tales como los de la regulación de tensión, corrientes de cortocircuito, división de la carga entre los circuitos, y el comportamiento de los transformadores multicircuito puestos en paralelo con otros transformadores. Para resolver estos problemas es necesario conocer las características de un transformador multicircuito como elemento de impedancia en los circuitos a los que se conecte. El estudio que sigue tiende a desarrollar métodos de análisis sobre los que puedan fundarse la solución de estos problemas y otros análogos.

1. TEORÍA GENERAL DE LOS TRANSFORMADORES MULTICIRCUITO

La figura 1 muestra esquemáticamente un transformador de n devanados, todos ellos situados sobre un mismo núcleo magnético. Este circuito puede representar o

* Véase capítulo XV.

** El análisis de circuitos desequilibrados por el método de las componentes simétricas también entraña el mismo análisis por fase.

*** En el análisis de los circuitos polifásicos en los que haya conexiones cruzadas entre devanados de núcleos magnéticos diferentes —como en la conexión zigzag del apartado 4, del capítulo XXV, y en muchos circuitos para transformación de fase— el análisis siguiente es aplicable sobre una base monofásica a todos los devanados sobre un mismo núcleo magnético, pero no se podrá considerar cada fase del circuito eléctrico como un problema monofásico, porque cada corriente de fase circula por dos o más devanados cruzados y afecta a dos o más núcleos magnéticos. Para un análisis de circuitos en los que intervienen devanados cruzados, véase A. BOYAJIAN, «Progress in Three-Circuit Theory», *A. I. E. E. Trans.*, 52 (septiembre, 1933), 914-917.

§ Véase el capítulo XV.

¹ Los amplificadores de válvulas en contrafase (push-pull) se estudian en A. L. ALBERT, *Electrónica y dispositivos electrónicos*, Ed. Reverté, Barcelona, 1962.

² Para un estudio de los transformadores multicircuito con condensadores sincrónicos, véase H. P. ST. CLAIR, «The Use of Multiwinding Transformers with Synchronous Condensers for System Voltage Regulation», *A. I. E. E. Trans.*, 59 (1940), 212-217.

Sin embargo, al igual que en el análisis de los transformadores de dos devanados *, se obtendrían resultados poco precisos si se calculara el funcionamiento de un transformador multicircuito sustituyendo en las ecuaciones (1-4) los valores medidos de las impedancias propias y mutuas. Las caídas de tensión en el transformador dependen principalmente de las fugas magnéticas —es decir, de diferencias relativamente pequeñas entre las distintas impedancias propias y mutuas— y para determinar estas pequeñas diferencias con precisión razonable, deberían haberse medido las impedancias propias y mutuas con una precisión muy elevada. Esta medida resultaría muy difícil a causa de las características magnéticas no lineales del núcleo. Por tanto, aun cuando las ecuaciones (1-4), son importantes como punto de partida para el análisis de los transformadores multicircuito, es preciso manejarlas en otras formas antes de poderlas utilizar en cálculos numéricos.

1 b. *Admitancias de entrada y de transferencia en cortocircuito.*—Aplicando la regla de Cramer a las ecuaciones (1-4), se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$I_1 = \frac{M_{11}}{D_z} V_1 + \frac{M_{21}}{D_z} V_2 + \cdots + \frac{M_{j1}}{D_z} V_j + \frac{M_{k1}}{D_z} V_k + \cdots + \frac{M_{n1}}{D_z} V_n \quad (8)$$

$$I_2 = \frac{M_{12}}{D_z} V_1 + \frac{M_{22}}{D_z} V_2 + \cdots + \frac{M_{j2}}{D_z} V_j + \frac{M_{k2}}{D_z} V_k + \cdots + \frac{M_{n2}}{D_z} V_n \quad (9)$$

.....

$$I_j = \frac{M_{1j}}{D_z} V_1 + \frac{M_{2j}}{D_z} V_2 + \cdots + \frac{M_{jj}}{D_z} V_j + \frac{M_{kj}}{D_z} V_k + \cdots + \frac{M_{nj}}{D_z} V_n \quad (10)$$

.....

$$I_n = \frac{M_{1n}}{D_z} V_1 + \frac{M_{2n}}{D_z} V_2 + \cdots + \frac{M_{jn}}{D_z} V_j + \frac{M_{kn}}{D_z} V_k + \cdots + \frac{M_{nn}}{D_z} V_n \quad (11)$$

donde D_z es el determinante de las Z en las ecuaciones (1-4), y M_{jk} es el adjunto del elemento de la fila j y la columna k . A causa de la simetría de las ecuaciones (1-4),

$$M_{jk} = M_{kj}. \quad (12)$$

Cada uno de los términos de los segundos miembros de las ecuaciones (8-11) es una componente de una de las corrientes creadas por una de las tensiones entre terminales actuando sola, siendo nulas todas las tensiones entre terminales restantes. Por tanto, el coeficiente de cada término en V podrá representarse como una admitancia. En general,

$$y_{jk} = \frac{M_{kj}}{D_z} \quad (13)$$

es el vector representativo de la corriente que circula por el circuito j creada por una tensión V_k unitaria aplicada al circuito k cuando todas las restantes tensiones entre terminales son nulas —es decir, están cortocircuitados dichos pares de terminales.

* Véase el apartado 2 del capítulo XVII.

La admitancia y_{jk} recibe el nombre de *admitancia de transferencia en cortocircuito* entre los circuitos j y k , y de la ecuación (12) resulta evidente que,

$$y_{jk} = y_{kj}. \quad (14)$$

Cuando tensión y corriente pertenecen al mismo circuito, con lo que la admitancia tiene la forma,

$$y_{jj} = \frac{M_{jj}}{D_z}, \quad (15)$$

la admitancia recibe el nombre de *admitancia de entrada en cortocircuito* del circuito j , ya que es la intensidad que circula por el circuito j por unidad de tensión aplicada al mismo circuito cuando todos los demás están cortocircuitados. Escribiendo las ecuaciones 8-11 en función de las admitancias de entrada y de transferencia en cortocircuito, resulta,

$$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2 + \cdots + y_{1j}V_j + y_{1k}V_k + \cdots + y_{1n}V_n \quad \blacktriangleright(16)$$

$$I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2 + \cdots + y_{2j}V_j + y_{2k}V_k + \cdots + y_{2n}V_n \quad \blacktriangleright(17)$$

.....

$$I_j = y_{j1}V_1 + y_{j2}V_2 + \cdots + y_{jj}V_j + y_{jk}V_k + \cdots + y_{jn}V_n \quad \blacktriangleright(18)$$

.....

$$I_n = y_{n1}V_1 + y_{n2}V_2 + \cdots + y_{nj}V_j + y_{nk}V_k + \cdots + y_{nn}V_n. \quad \blacktriangleright(19)$$

Según se verá en seguida, estas ecuaciones son adecuadas para fines de cálculo, ya que las admitancias en cortocircuito de las ecuaciones (16-19) pueden medirse o calcularse a partir de las dimensiones fácilmente y están relacionadas directamente con las características de impedancia de fuga del transformador.

1 c. *Ecuaciones para las corrientes en los nudos.*—En las dos secciones anteriores de este apartado se han tomado las ecuaciones (1-4), para las tensiones de las mallas como punto de partida para el análisis del transformador de n circuitos. La solución de dichas ecuaciones da las ecuaciones (16-19), más útiles relativas a las corrientes en las mallas.

De otra manera, las ecuaciones para las corrientes pueden obtenerse directamente si se escriben las ecuaciones para las corrientes en los nudos del circuito de la figura 1, tomando como nudo de referencia los terminales puestos a tierra $1', 2', \dots, n'$. Así pues,

$$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 + \cdots + Y_{1j}V_j + Y_{1k}V_k + \cdots + Y_{1n}V_n \quad (20)$$

$$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 + \cdots + Y_{2j}V_j + Y_{2k}V_k + \cdots + Y_{2n}V_n \quad (21)$$

.....

$$I_j = Y_{j1}V_1 + Y_{j2}V_2 + \cdots + Y_{jj}V_j + Y_{jk}V_k + \cdots + Y_{jn}V_n \quad (22)$$

.....

$$I_n = Y_{n1}V_1 + Y_{n2}V_2 + \cdots + Y_{nj}V_j + Y_{nk}V_k + \cdots + Y_{nn}V_n. \quad (23)$$

En estas ecuaciones, las I son los vectores representativos de las corrientes que penetran por los terminales libres, siendo las V los vectores representativos de los potenciales de dichos terminales respecto al nudo a tierra de referencia, y las Y son las admitancias complejas propias y mutuas de los nudos. Por ejemplo, Y_{jj} es la autoadmitancia del nudo j y es igual al vector representativo de la corriente que penetra en el terminal j por unidad de tensión aplicada al terminal j , estando todos los demás terminales conectados a tierra —es decir, cortocircuitados.

Análogamente Y_{jk} es la admitancia mutua de los nudos j y k , y es igual al vector representativo de la corriente que penetra por el terminal j por unidad de tensión aplicada al terminal k , estando puestos a tierra, es decir, cortocircuitados, todos los terminales menos el k . Como en las redes lineales,

$$Y_{jk} = Y_{kj}. \quad (24)$$

Obsérvese que, a pesar de la similitud en la notación, las admitancias de las ecuaciones (20-23), no son los recíprocos de las impedancias correspondientes de las ecuaciones (1-4); es decir,

$$Y_{jk} \text{ (ec. 22)} \neq \frac{1}{Z_{jk}} \text{ (ec. 3)}$$

Las impedancias de las ecuaciones (1-4), son impedancias *en circuito abierto*, pero las admitancias de las ecuaciones (20-23), son admitancias *en cortocircuito*.

Como las admitancias en cortocircuito dependen principalmente de las fugas magnéticas, y como éstas son la causa principal de las caídas de tensión en un transformador, los coeficientes de las ecuaciones (20-23), están relacionados directamente con los importantes factores que influyen sobre los efectos del transformador como elemento de impedancia en los circuitos a los que está conectado. Además, las admitancias en cortocircuito pueden calcularse fácilmente a partir de la disposición geométrica de los devanados, o medirse por medio de los ensayos descritos en el apartado 3, de este capítulo. Por tanto, las ecuaciones (20-23), tienen una forma conveniente para el análisis de los transformadores multicircuito.

1 d. *Comparación de las ecuaciones para las mallas y para los nudos.* Es interesante comparar las ecuaciones (16-19), para las mallas, con las ecuaciones (20-23), para los nudos. Las V que se consideran en las ecuaciones (1-4) y (16-19), como tensiones en las mallas, son tensiones en los nudos en las ecuaciones (20-23). Las I consideradas como intensidades de corrientes de las mallas en las ecuaciones (1-4) y (16-19), son en las ecuaciones (20-23), intensidades de las corrientes que penetran en los nudos. Las Y de las ecuaciones (16-19), son las admitancias de entrada y de transferencia en cortocircuito, mientras que las Y de las ecuaciones (20-23), son las admitancias propias y mutuas de los nudos. A pesar de estas diferencias de terminología, las V , I , y admitancias de las ecuaciones (16-19), representan exactamente las mismas cantidades físicas que las cantidades correspondientes de las ecuaciones (20-23), y por tanto, los métodos de análisis por mallas o por nudos conducen exactamente a las mismas ecuaciones para las corrientes.

En la teoría general de redes lineales, la geometría de la red puede ser tal que las fuerzas electromotrices que actúan en las mallas, en función de las cuales se escriben las ecuaciones para las tensiones de las mallas, no coinciden con los potenciales de

los nudos, en función de los cuales se expresan las corrientes de los nudos. Puede, por tanto, no ser posible conectar juntos un terminal de cada entrada a malla, como en la figura 1, considerando entonces este terminal común como nudo de referencia. En tales casos, las admitancias propias y mutuas del método de los nudos no son iguales a las admitancias de entrada y de transferencia en cortocircuito del método de las mallas; pero, en la figura 1, las tensiones en las mallas y los potenciales en los nudos son los mismos, las corrientes en las mallas y las corrientes en los nudos son las mismas, y por tanto, las admitancias de las ecuaciones de los nudos y de las mallas son, también, las mismas.

1 e. *Intensidades, tensiones y parámetros del circuito referidos a una base común.* En todo el anterior análisis de este apartado, las V , I , Z e Y , pueden ser las tensiones, intensidades, impedancias y admitancias reales, pero en el análisis de transformadores suele ser más conveniente expresar las tensiones, intensidades, impedancias y admitancias referidas a una base común. Así, pueden expresarse en tanto por uno *, sobre una base común de potencia aparente, o pueden referirse todas a un devanado de manera análoga a la utilizada en el análisis de transformadores de dos devanados **. Cuando se refieren de esa manera, el transformador se analiza como transformador equivalente con igual número de espiras en todos sus devanados.

Por ejemplo, la corriente I_k del circuito k puede referirse al circuito j dividiéndola por la razón,

$$a_{jk} = \frac{N_j}{N_k} \quad (25)$$

del número de espiras N_j del devanado j al número de espiras N_k del devanado k ; luego, la intensidad de la corriente que circula por el circuito k referida al circuito j es:

$$\frac{I_k}{a_{jk}} = I_k \frac{N_k}{N_j} \quad (26)$$

Obsérvese que esta sería la corriente que al circular por un devanado de N_j espiras produciría el mismo efecto magnético que la corriente de intensidad I_k en el devanado real k . Además, como en la teoría del transformador de dos circuitos, la tensión del circuito l referida al circuito j es:

$$a_{jl}V_l = \frac{N_j}{N_l} V_l, \quad (27)$$

donde V_l es la tensión real en el circuito l y a_{jl} es la razón de los números de espiras N_j/N_l . Al igual que en la teoría del transformador de dos circuitos, la tensión referida es la tensión de un devanado equivalente de igual disposición geométrica que el devanado real l , pero con el mismo número de espiras que el devanado j al que se refiere la tensión.

De las expresiones para los valores referidos de intensidad y tensión (ec. 26 y 27), pueden obtenerse fácilmente los valores referidos de impedancia y admitancia.

* Véase el apartado 6 del capítulo XIV.

** Véase el apartado 4 del capítulo XIII.

Por ejemplo, si es I_{kl} la intensidad de la corriente creada en el circuito k por la tensión V_l aplicada al circuito l —estando cortocircuitados todos los circuitos menos el l — la admitancia de transferencia en cortocircuito Y_{kl} entre los circuitos k y l es:

$$Y_{kl} = \frac{I_{kl}}{V_l}. \quad (28)$$

Si tanto la intensidad como la tensión se refieren a un tercer circuito —p. ej., el circuito j — el cociente entre la intensidad referida y la tensión referida es la admitancia de transferencia en cortocircuito entre los circuitos k y l referida al circuito j y es, en virtud de las ecuaciones (26) y (27),

$$\frac{I_{kl}/a_{jk}}{a_{jl}V_l} = \frac{1}{a_{jl}a_{jk}} \frac{I_{kl}}{V_l} = \frac{Y_{kl}}{a_{jl}a_{jk}}. \quad (29)$$

Siguiendo una línea de razonamiento análoga a la explicada en la deducción de la ecuación (29), podrá obtenerse el valor referido de cualquier otro parámetro de circuito.

► En el análisis que sigue se supondrá siempre que las intensidades, tensiones, impedancias y admitancias, o están todas expresadas en tanto por uno sobre una base común de potencia aparente, o están todas referidas a un mismo circuito.◀

2. CIRCUITOS EQUIVALENTES

Aun cuando pueda calcularse analíticamente el funcionamiento de un transformador de n circuitos a partir de las ecuaciones (16-19) o (20-23), suele ser más conveniente representar el transformador por un circuito equivalente y determinar las corrientes y tensiones a partir del circuito equivalente³.

Si se quiere representar un transformador de n circuitos por un circuito equivalente, es evidente que éste deberá tener el mismo número de terminales libres que el transformador. En consecuencia, en el caso más general, el circuito equivalente de un transformador de n circuitos deberá tener $2n$ terminales libres. No obstante, según se vió en el apartado 1, cuando son despreciables las corrientes a través de las capacidades de los devanados, las relaciones entre las tensiones en terminales de los distintos devanados y las corrientes que por ellos circulan quedan inalteradas si se consideran conectados terminales de la misma polaridad relativa, en la forma indicada por la conexión representada por la línea de trazos de la figura 1. Así, pues, salvo en el análisis de problemas en que las capacidades de los devanados tengan importancia (como en la determinación de los esfuerzos entre devanados no puestos a tierra debidos a la tensión, o durante los transitorios rápidamente variables), un transformador de n circuitos puede analizarse como circuito de $n+1$ terminales, y por tanto, con estas mismas restricciones, podrá representarse por un circuito equivalente con $n+1$ terminales.

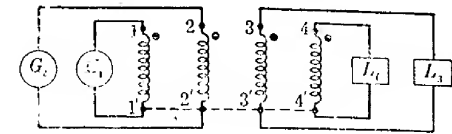
Es evidente, también, que el circuito equivalente deberá tener tantas ramas

³ Para un estudio general de la teoría de redes equivalentes de circuitos acoplados electromagnéticamente, véase F. M. STARR, «Equivalent Circuits», *A. I. E. E. Trans.*, 51 (junio, 1932) 287-298.

independientes como coeficientes independientes tengan las ecuaciones que expresen las relaciones intensidad-tensión (ec. 16-19 o 20-23). El segundo miembro de cada una de estas ecuaciones contiene n términos, y contiene una autoadmitancia y $n-1$ admitancias mutuas. Así, el sistema completo de n ecuaciones de intensidades contiene n autoadmitancias y $n(n-1)$ admitancias mutuas, pero cada una de las admitancias mutuas aparece dos veces, de donde hay $\frac{n(n-1)}{2}$ admitancias mutuas independientes. Por tanto, el transformador de n circuitos está caracterizado por n autoadmitancias y $\frac{n(n-1)}{2}$ admitancias mutuas, lo que hace un total de

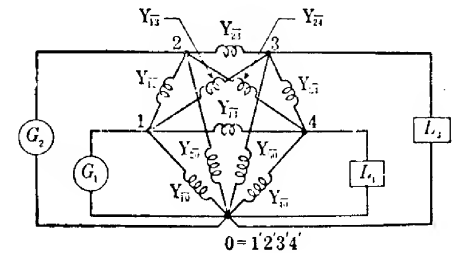
$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \quad (30)$$

coeficientes de admitancia independientes. En consecuencia, el circuito equivalente deberá tener este mismo número de ramas independientes. El segundo miembro de la ecuación 30, es el número de combinaciones binarias de $n+1$ elementos.



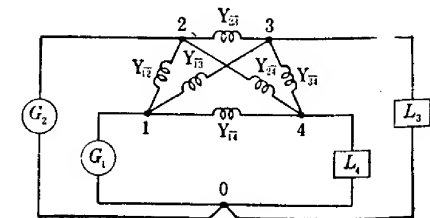
(a)

► Por tanto, cuando pueda considerarse un terminal de cada circuito conectado a los terminales correspondientes de todos los demás (conexión en línea de trazos de la Fig. 1), el transformador de n circuitos podrá representarse por un circuito equivalente de $n+1$ terminales y una admitancia que conecte cada terminal a todos los demás.◀



(b)

Por ejemplo, consideremos el transformador de cuatro circuitos indicado por los devanados 11', 22', 33', 44' en la figura 2a. Este circuito puede representarse o un transformador monofásico de cuatro circuitos en un circuito monofásico, o una fase de un banco trifásico de transformadores de cuatro circuitos. En la figura 2a, los devanados 1 y 2, están conectados a generadores, y los devanados 3 y 4, suministran potencia a sendas cargas. Los terminales 1', 2', 3', 4', se suponen conectados entre sí, según indica la línea de trazos. En la figura 2b, puede verse un circuito



(c)

FIG. 2. Esquema de circuito y circuitos equivalentes de un transformador de cuatro circuitos

equivalente consistente en una red de cinco terminales con admitancias que conectan cada terminal a los demás. Existen diez admitancias independientes, número que concuerda con el valor obtenido al hacer la sustitución $n = 4$ en la ecuación 30.

En la figura 2b, las admitancias Y_{10} , Y_{20} , Y_{30} , Y_{40} , que terminan en el terminal común 0 están en paralelo con los circuitos del generador y de carga y representan las características de excitación del transformador. Teóricamente, pueden determinarse los valores de estas admitancias a partir de los resultados de un cierto número de ensayos en circuito abierto*, pero como la intensidad de la corriente de excitación, suele ser solamente un pequeño tanto por ciento de las intensidades a plena carga de las corrientes, puede tratarse por métodos aproximados. En realidad, suele poderse despreciar. No obstante si es necesario incluir la corriente de excitación suele poderse hacer una de las dos aproximaciones siguientes. Puede suponerse que las n admitancias paralelo de un transformador de n circuitos tienen el mismo valor igual a $1/n$ de la admitancia de un circuito cualquiera medida con todos los demás circuitos abiertos. O bien, pueden despreciarse todas las admitancias menos una y suponer que la corriente de excitación pasa por esta admitancia paralelo cuyo valor deberá ser igual a la admitancia en circuito abierto. Cuando se refieren las admitancias en circuito abierto a una base común, se obtiene aproximadamente el mismo valor de la admitancia, independientemente del circuito utilizado para la medida de la admitancia.

Las admitancias Y_{12} , Y_{13} , Y_{14} , Y_{23} , Y_{24} , Y_{34} , forman una red que conecta los generadores y las cargas por las que deben circular las corrientes. Estas ramas del circuito equivalente representan los efectos de las resistencias de los devanados y las fugas magnéticas. Las caídas de tensión en ellas son de gran importancia en la determinación de los efectos del transformador como elemento de impedancia en los circuitos a los que se conecta. Los valores de estas admitancias pueden calcularse a partir de los datos de diseño o determinarse a partir de los resultados de ensayos en cortocircuito, como se describe en el apartado 3.

2a. Circuito equivalente para corriente de excitación despreciable. Como la corriente de excitación suele ser débil, las admitancias paralelo que representan las características de excitación suelen ser tan pequeñas (o sus impedancias tan grandes), que los efectos de estas impedancias grandes en paralelo con los circuitos del generador y de carga resultan despreciables y por tanto, las ramas en paralelo pueden considerarse como circuitos abiertos. En tal caso, el circuito equivalente se reduce a una forma más sencilla.

Por ejemplo, si se suprimen las admitancias de excitación Y_{10} , Y_{20} , Y_{30} , Y_{40} , el circuito equivalente del transformador de cuatro circuitos de la figura 2b, se reduce a la red de la figura 2c, que contiene cuatro terminales libres 1, 2, 3, 4, con una admitancia que conecta cada terminal a cada uno de los demás —en total seis admitancias, frente a las diez del circuito equivalente «exacto» de la figura 2b. Los circuitos de generador y carga están conectados a los terminales 1, 2, 3, 4, del circuito equivalente y a un punto común o nudo de referencia 0, si bien, el terminal 0 no tiene conexión alguna con el circuito equivalente.

En el caso general de un transformador de n circuitos, el despreciar la corriente

* Las dificultades prácticas que surgen al intentar determinar los valores exactos de estas admitancias se estudian en el apartado 5d de este capítulo.

de excitación reduce de $n + 1$ a n el número de terminales del circuito equivalente y elimina las n admitancias paralelo que representan las características de excitación.

► Por tanto, si se desprecia la corriente de excitación, el transformador de n circuitos puede representarse por un circuito equivalente de n terminales con una admitancia conectando cada terminal a cada uno de los demás. ◀

2b. Relaciones entre el circuito equivalente y las ecuaciones intensidad-tensión. El lector debe distinguir bien entre las admitancias que unen los terminales en el circuito equivalente y las admitancias de transferencia en cortocircuito de las ecuaciones (20-23). Así, el símbolo Y_{12} (con barra sobre los subíndices), representa una admitancia de enlace del circuito equivalente, indicando la barra que el símbolo representa un enlace entre los terminales 1 y 2. El símbolo Y_{12} (sin barra), es la admitancia de transferencia en cortocircuito de la ecuación (20). Se verá más adelante que para los sentidos positivos elegidos en este estudio,

$$Y_{12} = -Y_{12}. \quad (31)$$

Para probar la validez de la ecuación 31, consideremos el transformador de cuatro circuitos de la figura 3a con el circuito 2, excitado a tensión reducida y los circuitos 1, 3 y 4, cortocircuitados. Sean $I_{1(2)}$, $I_{3(2)}$, $I_{4(2)}$, los vectores representativos de las corrientes creadas en los devanados cortocircuitados por la tensión V_2 aplicada al circuito 2. Los sentidos positivos de tensiones y corrientes son los indicados en la figura 3a, y están de acuerdo con los sentidos positivos adoptados en todo este estudio, según se indica en la figura 1. De la ecuación (20), la admitancia de transferencia en cortocircuito Y_{12} es la corriente que penetra en el terminal 1 por unidad de tensión aplicada al circuito 2, estando cortocircuitados todos los circuitos menos el 2. Por tanto,

$$Y_{12} = \frac{I_{1(2)}}{V_2}. \quad (32)$$

Para las condiciones de cortocircuito de la figura 3a el circuito equivalente se reduce al de la figura 3b, en el cual todos los terminales, menos el 2, están cortocircuitados al terminal común 0. Las ramas indicadas por líneas de trazos están cortocircuitadas y no transportan corriente, por lo que bastará considerar las ramas conectadas al terminal 2. Como la corriente de excitación en cortocircuito es muy

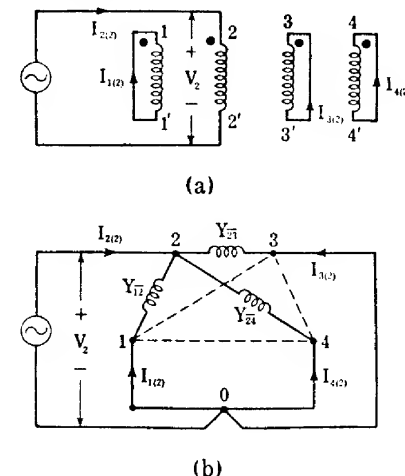


FIG. 3. Esquema del circuito y circuito equivalente de un transformador de cuatro circuitos con los devanados 1, 3 y 4 cortocircuitados. Los sentidos positivos de tensiones y corrientes son los indicados en la figura 1.

débil, el circuito equivalente de la figura 3b —en el que se han suprimido las admitancias de excitación— es muy aproximadamente un equivalente «exacto» del transformador cortocircuitado. La tensión V_2 y las corrientes $I_{1(2)}$, $I_{3(2)}$, $I_{4(2)}$, se han representado en la figura 3b, con los mismos sentidos positivos que en la figura 3a. En la figura 3b, la corriente que circula por la admitancia de enlace Y_{12} en el sentido de la caída de tensión V_2 en Y_{12} es $-I_{1(2)}$, de donde,

$$-I_{1(2)} = Y_{12}V_2 \quad (33)$$

o sea,

$$Y_{12} = -\frac{I_{1(2)}}{V_2}. \quad (34)$$

Los signos negativos de las ecuaciones (33) y (34), son necesarios para la conformidad con el sentido positivo asignado a $I_{1(2)}$. Comparando las ecuaciones (32) y (34) se ve que para los sentidos positivos elegidos en este análisis,

$$Y_{12} = -Y_{1\bar{2}}$$

según se indica en la ecuación (31). En general, pues, la relación entre la admitancia de transferencia en cortocircuito Y_{jk} y la admitancia de enlace $Y_{j\bar{k}}$ es:

$$Y_{jk} = -Y_{j\bar{k}}. \quad \blacktriangleright (35)$$

Las admitancias de entrada en cortocircuito de las ecuaciones (20-23), también pueden expresarse, mediante relaciones sencillas, en función de las admitancias de enlace del circuito equivalente. Por ejemplo, la admitancia de entrada en cortocircuito Y_{22} de la ecuación (21), es la admitancia del circuito 2, con todos los demás circuitos cortocircuitados, como en la figura 3a. El examen del circuito equivalente de la figura 3b muestra que para estas condiciones de cortocircuito las admitancias de enlace Y_{12} , Y_{23} , Y_{24} , están en paralelo, y por tanto la admitancia de entrada en cortocircuito Y_{22} del circuito 2, es:

$$Y_{22} = Y_{12} + Y_{23} + Y_{24}. \quad \blacktriangleright (36)$$

Luego, despreciando la pequeña corriente de excitación en cortocircuito, la admitancia de entrada en cortocircuito de un circuito cualquiera es igual a la suma vectorial de las admitancias de enlace entre el terminal libre de este circuito y los terminales libres de los demás en la red equivalente de la figura 2c.

3. MEDIDA DE LAS ADMITANCIAS

Los valores de los coeficientes de admitancia de las ecuaciones (20-23) y de las admitancias de las ramas del circuito equivalente pueden determinarse experimentalmente mediante un cierto número de ensayos en los que se aplica a cada devanado una tensión baja estando cortocircuitados todos los demás. La tensión aplicada y, las corrientes que circulan por todos los devanados se miden vectorialmente —es decir,

se miden sus valores eficaces con instrumentos ordinarios de corriente alterna y sus defasajes se determinan por los métodos que se estudian más adelante.

Como las admitancias en cortocircuito están determinadas principalmente por las fugas magnéticas, sus valores estarán muy poco afectados por las características magnéticas no lineales del núcleo, y por tanto los valores de estas admitancias, determinados mediante ensayos en cortocircuito a tensión reducida, son casi iguales a sus valores para tensiones normales.

Si se excita el circuito k con todos los demás cortocircuitados, la admitancia compleja de entrada en cortocircuito Y_{kk} del circuito k es:

$$Y_{kk} = Y_{kk}/\theta_{kk} = G_{kk} + jB_{kk} = \frac{I_{k(k)}}{V_k}, \quad \blacktriangleright (37)$$

donde

V_k es la tensión (vectorial) aplicada al circuito k ,
 $I_{k(k)}$ es la corriente (vectorial) que circula por el circuito k ,
 G_{kk} es la conductancia de entrada en cortocircuito,
 B_{kk} es la susceptancia de entrada en cortocircuito,
 θ_{kk} es el defasaje de $I_{k(k)}$ respecto a V_k .

► En la ecuación (37) y en todas las ecuaciones que siguen, se supone que las tensiones y corrientes están todas referidas a una base común antes de sustituir sus valores en las ecuaciones. Las admitancias, pues, son sus valores referidos. ◀

Las conductancias de entrada en cortocircuito de todos los circuitos son cantidades positivas, ya que se absorbe potencia en el devanado excitado. Así, si es P_{kk} la indicación de un watímetro conectado para señalar la potencia entregada al devanado excitado k ,

$$G_{kk} = +\frac{P_{kk}}{V_k^2}. \quad (38)$$

Las susceptancias de entrada en cortocircuito de todos los circuitos son cantidades negativas, ya que la corriente que circula por el devanado excitado está retrasada respecto a la tensión aplicada, como ocurre en todo circuito inductivo. Por tanto,

$$B_{kk} = -\sqrt{\left(\frac{I_{k(k)}}{V_k}\right)^2 - G_{kk}^2}. \quad (39)$$

Las admitancias de transferencia en cortocircuito y de enlace del circuito equivalente de la figura 2c pueden determinarse a partir de medidas de las intensidades eficaces y ángulos de fase de las corrientes que circulan por los devanados cortocircuitados. Así, si se excita el devanado k y se cortocircuitan todos los demás devanados, el valor complejo Y_{jk} de la admitancia de transferencia en cortocircuito entre los circuitos j y k es:

$$Y_{jk} = Y_{jk}/\theta_{jk} = G_{jk} + jB_{jk} = \frac{I_{j(k)}}{V_k}, \quad \blacktriangleright (40)$$

donde,

- V_k es la tensión (vectorial) aplicada al circuito k ,
- $I_{(k)}$ es la intensidad (vectorial) de la corriente que circula por el circuito j ,
- G_{jk} es la conductancia de transferencia en cortocircuito,
- B_{jk} es la susceptancia de transferencia en cortocircuito,
- θ_{jk} es el defasaje de $I_{(k)}$ respecto a V_k .

Los sentidos positivos de tensiones y corrientes son los indicados en la figura 1.

► Según se indica la ecuación (35), la admitancia de enlace Y_{jk} en el circuito equivalente es igual a la admitancia de transferencia en cortocircuito Y_{jk} cambiada de signo. ◀

Obsérvese que también puede determinarse el valor de la admitancia de transferencia en cortocircuito Y_{jk} excitando el devanado j , con todos los demás devanados cortocircuitados y midiendo la tensión aplicada al circuito j y la intensidad de la corriente que circula por el circuito k . Así, pues, el valor de cada admitancia puede determinarse a partir de dos sistemas de medidas independientes.

Hay que tener mucho cuidado al determinar los signos algebraicos de las conductancias y susceptancias mutuas. Antes de estudiar el transformador de n circuitos,

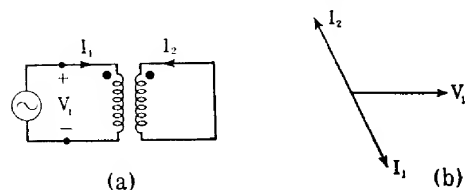


Fig. 4. Esquema de circuito y diagrama vectorial para un transformador de dos devanados cortocircuitado

del secundario está casi en oposición de fase con la corriente del primario cuando se toman en el mismo sentido respecto al flujo en el núcleo los sentidos positivos de las dos corrientes, según se indica con las flechas y los puntos de polaridad en la figura 4a. Así, pues, el diagrama vectorial del transformador de dos devanados cortocircuitado es el indicado en la figura 4b, donde se ha tomado como vector de referencia el de la tensión aplicada al primario V_1 . La admitancia de transferencia en cortocircuito es,

$$Y_{12} = G_{12} + jB_{12} = \frac{I_2}{V_1} \quad (41)$$

El examen de la figura 4b indica que G_{12} es una cantidad *negativa*, ya que la componente real de I_2 es negativa, pero B_{12} es una cantidad *positiva*, ya que es positiva la componente imaginaria de I_2 . En cambio, la admitancia de enlace del circuito equivalente es igual a la admitancia de transferencia en cortocircuito correspondiente, cambiada de signo; luego, la admitancia de enlace Y_{12} tiene una conductancia *positiva* y una susceptancia *negativa* y puede, por tanto, representarse físicamente

por un elemento de impedancia que comprende una resistencia y una bobina con autoinducción.

En el caso de un transformador multicircuito, si están cortocircuitados todos los devanados menos el excitado, las corrientes que circulan en la mayoría de los devanados cortocircuitados están en oposición de fase con la corriente que circula por el devanado excitado cuando se toman los sentidos positivos de las corrientes en el mismo sentido respecto al flujo en el núcleo, como en la figura 1. No obstante, a causa de las relaciones que pueden existir entre los flujos de fuga en algunas disposiciones de los devanados, puede invertirse la corriente en uno o más devanados cortocircuitados, con lo que se invierten los signos de las conductancias y susceptancias asociadas a este circuito. En estas circunstancias, el circuito equivalente contendría enlaces que tendrían conductancias *negativas* y susceptancias *positivas*. A frecuencia constante, la susceptancia positiva puede representarse por una capacidad; pero, aun cuando la conductancia negativa no introduce ninguna dificultad en el tratamiento matemático del problema, no existe ninguna manera sencilla de representarla mediante elementos físicos. Luego, si se quiere representar un transformador multicircuito en un analizador de redes * por medio de su circuito equivalente, o deberán suprimirse las conductancias negativas —lo cual es permisible muchas veces, dado su pequeño valor— o debe cambiarse el circuito equivalente a una forma que permita la combinación de los elementos de resistencia *negativa* en serie con resistencias positivas de circuitos exteriores de manera que den una resistencia total positiva que pueda representarse en el analizador de redes ⁴.

Se puede determinar la magnitud de cada conductancia o susceptancia mutua empleando watímetros conectados adecuadamente. Así, si es P_{jk} la indicación de un watímetro cuyo devanado de intensidad está conectado en serie con el devanado j cortocircuitado y cuyo devanado de tensión está en paralelo con la tensión V_k aplicada al devanado excitado k ,

$$G_{jk} = \pm \frac{P_{jk}}{V_k^2} \quad (42)$$

La susceptancia mutua viene dada entonces por

$$B_{jk} = \pm \sqrt{\left(\frac{I_{(k)}}{V_k}\right)^2 - G_{jk}^2} \quad (43)$$

El signo de la conductancia mutua se puede determinar si se comparan las polaridades de las conexiones del watímetro para desviación positiva con sus polaridades

* Un analizador de redes es un dispositivo consistente en un gran número de resistencias, bobinas de inducción, condensadores y generadores de tensión alterna que pueden conectarse fácilmente de muchas maneras diferentes, y que dispone de montajes para medir convenientemente la intensidad de la corriente, tensión y potencia en un punto cualquiera de la red. En el estudio de sistemas de potencia complicados, donde serían necesarios cálculos laboriosos si se emplearan métodos analíticos, suele ser más económico realizar experimentalmente la labor representando el sistema de potencia en un analizador de potencia sobre una base por fase y a una escala reducida conveniente.

Para un estudio más extenso de las conductancias negativas y otras formas del circuito equivalente, véase F. M. STARR, «An Equivalent Circuit for the Four-winding Transformer», *G. E. Rev.*, 36 (marzo, 1933), 150-152; L. F. BLUME, editor, *Transformer Engineering* (New York: John Wiley & Sons, 1938), 103-107, 122.

para un sentido conocido de circulación de la potencia. Recuérdese que el signo de la conductancia G_{jk} en el circuito equivalente es el opuesto de la conductancia de transferencia en cortocircuito G_{jk} . En cambio, el watímetro no da indicación alguna del signo de la susceptancia mutua.

El signo algebraico de la susceptancia mutua puede determinarse utilizando un fasímetro o un contador para potencia reactiva, conectados en forma adecuada. No obstante, es fácil cometer errores de experimentación, tales como la inversión accidental de una conexión, especialmente cuando se utilizan transformadores para instrumentos. Otro método para determinar los signos de las susceptancias —que deberá utilizarse siempre para comprobar los resultados de otras medidas— aprovecha el hecho de que la corriente de excitación en cortocircuito es muy débil. Es decir, la fuerza magnetomotriz resultante de todas las corrientes es casi nula, de donde, para los sentidos positivos de las corrientes indicados en la figura 1, la suma vectorial de las corrientes referidas al mismo circuito es casi nula. Como las corrientes se hallan muy aproximadamente en concordancia o en oposición de fase, la suma *algebraica* de las intensidades es, también, aproximadamente nula. Así, si se excita el circuito k ,

$$I_{k(k)} \approx - [\pm I_{1(k)} \pm \dots \pm I_{j(k)} \pm I_{l(k)} \pm \dots \pm I_{n(k)}], \quad (44)$$

donde las I son los valores absolutos de las intensidades de las corrientes referidas. Los signos pueden determinarse por tanteo de manera que se satisfaga la ecuación (44). La mayoría de las corrientes en los devanados cortocircuitados deben estar en oposición de fase con la corriente que circula por el devanado excitado, con lo cual el signo menos colocado ante el segundo miembro de la ecuación (44), hace que la mayoría de los términos dentro del corchete serán positivos. Para esta relación normal de fase la susceptancia de la admitancia de enlace asociada en el circuito equivalente es *negativa* —y el signo de la susceptancia de transferencia correspondiente en las ecuaciones (20-23) es *positivo*. Estos signos son los mismos que para el transformador de dos circuitos de la figura 4. Si cualesquiera de las corrientes tuvieran fase opuesta a la normal —usualmente las corrientes débiles— el hecho de que deba dárseles signos negativos dentro del corchete de la ecuación (44) revela la inversión de fase. Los signos de las susceptancias mutuas asociados a estas corrientes invertidas están también invertidos.

Como comprobación final de los resultados puede utilizarse la forma generalizada de la ecuación (36), la cual establece que la admitancia de entrada en cortocircuito de un circuito cualquiera es aproximadamente igual a la suma de las admitancias complejas de enlace asociadas a dicho circuito. Así, para las conductancias y susceptancias serán ciertas con mucha aproximación las siguientes sumas algebraicas:

$$G_{kk} = G_{1k} + G_{2k} + \dots + G_{jk} + G_{lk} + \dots + G_{nk} \quad (45)$$

$$B_{kk} = B_{1k} + B_{2k} + \dots + B_{jk} + B_{lk} + \dots + B_{nk}. \quad (46)$$

La conductancia de entrada en cortocircuito G_{kk} es siempre positiva y la susceptancia de entrada en cortocircuito B_{kk} es siempre negativa.

3a. *Relaciones de las admitancias con la teoría del transformador de dos circuitos.* El estudio anterior indica que los valores de las admitancias de enlace en el circuito equivalente del transformador de n circuitos pueden determinarse a partir de los re-

sultados de ensayos en los que en cada uno de ellos se excita un devanado distinto a tensión reducida teniendo cortocircuitados *todos* los devanados restantes. También podrían calcularse las admitancias de enlace a partir de los resultados de un cierto número de ensayos en cada uno de los cuales se excita un devanado diferente teniendo cortocircuitado *otro*. Por ejemplo, si se excita el devanado j estando cortocircuitado el devanado k y los demás en circuito abierto, la presencia de estos devanados en circuito abierto no ejerce influencia alguna sobre las corrientes. Así, la impedancia $Z_{j(k)}$ vista desde los terminales del devanado excitado es la impedancia en cortocircuito o impedancia equivalente de los devanados j y k considerados como de un transformador de dos circuitos, y es muy aproximadamente igual a la suma de las impedancias de fuga de ambos devanados, uno respecto al otro *. Este estudio del transformador de n circuitos mediante la teoría del de dos circuitos es útil cuando deban determinarse las admitancias del circuito equivalente a partir de fórmulas de diseño, ya que la impedancia equivalente de un par cualquiera de devanados se puede calcular mediante fórmulas de diseño conocidas para transformadores de dos circuitos **.

El número de impedancias equivalentes independientes de un transformador de n circuitos es igual al número de combinaciones binarias que pueden formarse con n devanados. El circuito equivalente (despreciando la corriente de excitación) comprende n terminales con una admitancia de enlace entre cada par de terminales, y por tanto el número de admitancias de enlace independientes es también igual al de combinaciones binarias de n elementos. Así pues, al despreciar la corriente de excitación, el número de impedancias equivalentes independientes es igual al número de parámetros independientes que se precisan para especificar por completo las características del transformador como elemento de circuito.

Las expresiones de las admitancias de enlace en función de las impedancias equivalentes son bastante complicadas y no se deducirán aquí ⁵. Sin embargo, se dará a continuación una explicación del método de deducción a fin de hacer resaltar el hecho de que las admitancias de enlace del circuito equivalente están íntimamente relacionadas con las impedancias de fuga del transformador. El breve estudio que sigue podrá también servir de base para estudios ulteriores.

Las relaciones entre las impedancias equivalentes y las admitancias de enlace pueden verse claramente mediante el circuito equivalente del transformador de n circuitos que se tiene cuando éste actúa como transformador de dos circuitos cortocircuitado. Por ejemplo, consideremos un transformador de cuatro circuitos con el devanado 2 excitado y el 1 cortocircuitado, estando los demás en circuito abierto. En estas condiciones, el circuito equivalente de la figura 2c se reduce al de la

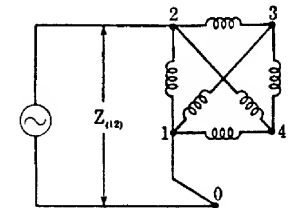


FIG. 5. La impedancia equivalente Z_{12} es igual a la impedancia de la red 1234, entre los terminales 1 y 2.

* La notación $Z_{j(k)}$, con los subíndices entre paréntesis, se utiliza para designar la impedancia en cortocircuito o equivalente de los devanados j y k actuando como transformador de dos circuitos, pretendiendo con el paréntesis dar la idea de que los dos devanados se consideran como un par de devanados.

** Por ejemplo, véase el apartado 9 del capítulo XIII.

⁵ Para una deducción completa de estas relaciones véase L. F. BLUME, editor, *Transformer Engineering* (New York: John Wiley & Sons, 1938), 118-120.

figura 5. El examen de la figura 5 indica que la impedancia equivalente $Z_{(12)}$ de los devanados 1 y 2 es igual a la impedancia de la red 1234 entre los terminales 1 y 2. Cuando se refieren todas las impedancias a una base común y es despreciable la corriente de excitación, se obtendría el mismo resultado si se excitara el circuito 1 y se cortocircuitara el 2. Así pues, es posible escribir una ecuación que exprese a cada una de las seis impedancias equivalentes de dos circuitos $Z_{(12)}$, $Z_{(13)}$, $Z_{(14)}$, $Z_{(23)}$, $Z_{(24)}$, $Z_{(34)}$ en función de las seis admitancias de enlace del circuito equivalente. Entonces, de estas ecuaciones pueden despejarse las seis admitancias de enlace en función de las seis impedancias equivalentes. Las expresiones son bastante largas, por lo que el procedimiento del apartado 3 resulta ser una manera más sencilla de determinar las admitancias de enlace mediante ensayos. Sin embargo, el diseñador puede verse obligado a utilizar el procedimiento más complicado que acabamos de indicar.

4. RESUMEN DE LA TEORÍA DEL TRANSFORMADOR MULTICIRCUITO

Los puntos importantes puestos de manifiesto en el anterior estudio de los transformadores multicircuito pueden resumirse de la manera siguiente:

Algunos de los problemas principales del empleo de los transformadores multicircuito se refieren a la regulación de tensión, corrientes de cortocircuito, división de carga entre circuitos y comportamiento de los transformadores multicircuito en paralelo con otros transformadores.

Salvo cuando hay conexiones cruzadas entre las fases *, los problemas en que intervienen montajes polifásicos de transformadores o autotransformadores multicircuito en circuitos polifásicos equilibrados pueden resolverse sobre una base por fase mediante la teoría del transformador monofásico de n circuitos.

Cuando se desprecian los efectos de las capacidades de los devanados, el transformador de n circuitos puede analizarse como circuito de n mallas o de n nudos.

Las ecuaciones intensidad-tensión pueden expresarse en forma conveniente en función de las admitancias de entrada y transferencia en cortocircuito y, si se conocen los valores de estas admitancias en cortocircuito, mediante las ecuaciones (16-19) ó (20-23) podrá calcularse el funcionamiento como elemento de circuito de un transformador de n circuitos.

Otro método para expresar las características de un transformador de n circuitos es por medio de un circuito equivalente que comprende un cierto número de impedancias de enlace simples. Las principales ventajas del circuito equivalente son que a menudo ayuda a ver el problema y que para la solución de redes complicadas puede representarse el transformador en un analizador de redes por medio de su circuito equivalente.

Cuando se pueda considerar conectado un terminal de cada devanado a los terminales correspondientes de todos los demás, el transformador de n circuitos podrá representarse por un circuito equivalente de $n + 1$ terminales y un enlace entre cada terminal y cada uno de los demás.

La corriente de excitación suele ser débil y cuando se desprecia, el circuito equivalente se reduce a una red de n terminales y un enlace entre cada terminal y cada uno de los demás. Esta red contiene el número mínimo de ramas y terminales ac-

* Véase nota *** en la página 597.

cesibles necesarios para representar un transformador de n circuitos con corriente de excitación despreciable y es, pues, el circuito equivalente más sencillo que puede encontrarse. Sin embargo, no es único. Pueden deducirse otros circuitos equivalentes que pueden ser más útiles en determinadas circunstancias (véase pág. 611).

Los valores de las admitancias de entrada y de transferencia en cortocircuito y de las admitancias de enlace del circuito equivalente pueden determinarse a partir de los resultados de un cierto número de ensayos en los que se van excitando, uno por uno, a tensión reducida, cada devanado teniendo cortocircuitados *todos* los demás.

También pueden evaluarse las admitancias en función de las impedancias equivalentes de pares de devanados.

5. TRANSFORMADORES DE TRES CIRCUITOS

Los transformadores multicircuitos más corrientes son los que tienen tres circuitos independientes —un primario un secundario y un terciario. Al principio de este capítulo se han mencionado algunas de las aplicaciones de estos transformadores de tres circuitos en circuitos monofásicos y trifásicos.

El transformador monofásico de tres circuitos puede analizarse por medio de la teoría general de los transformadores monofásicos de n circuitos desarrollada en los apartados anteriores de este capítulo, teoría que puede aplicarse sobre una base por fase al análisis de problemas trifásicos *. El transformador de tres circuitos puede tratarse también por métodos no aplicables a los casos en que intervienen más de tres circuitos independientes. Vamos a presentar a continuación ambos métodos de análisis.

5a. *A partir de la teoría del transformador multicircuito.* Según la teoría general de los transformadores de n circuitos, el transformador de tres circuitos puede representarse por un circuito equivalente de cuatro terminales con un enlace entre cada terminal y cada uno de los demás. Esto presupone que pueden considerarse

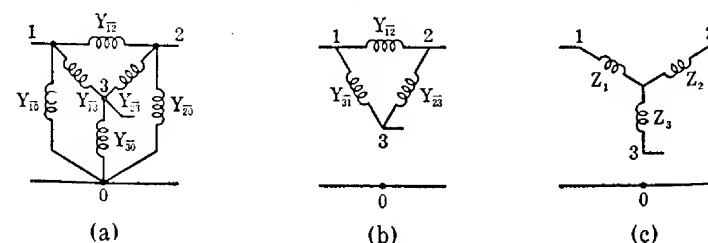


Fig. 6. Circuitos equivalentes para transformadores de tres circuitos. El circuito equivalente «exacto» a), se reduce a los aproximados b) y c), al despreciar la corriente de excitación

conectados tres terminales de la misma polaridad relativa. Así, el circuito de cuatro terminales y seis ramas de la figura 6a será un circuito equivalente «exacto» del transformador de tres circuitos. Los circuitos exteriores se conectan entre los terminales 1, 2, 3 y el terminal común 0. Este circuito puede representar o un trans-

* Para comentarios acerca de situaciones en que existen interconexiones entre las fases, véase nota *** en la página 597.

formador monofásico de tres circuitos en un circuito monofásico, o una fase de un banco trifásico de transformadores de tres circuitos.

Según se vio en el estudio de los transformadores de n circuitos, los enlaces del circuito equivalente que terminan en el terminal común 0 representan a las características de excitación del transformador y, como la corriente de excitación suele ser débil, las admitancias de estos enlaces suelen ser pequeñas. Por tanto, casi siempre se suprimirán y el circuito equivalente se reduce entonces al montaje simple en triángulo de la figura 6b.

Como todo montaje en triángulo de elementos de circuito lineales puede siempre sustituirse por un montaje equivalente en estrella, el circuito equivalente en triángulo de la figura 6b podrá sustituirse por el circuito en estrella de la figura 6c. De acuerdo con las conocidas fórmulas de transformación de triángulo a estrella, las relaciones entre las impedancias Z_1, Z_2, Z_3 del circuito equivalente conectado en estrella (figura 6c) y las admitancias Y_{12}, Y_{23}, Y_{31} de los enlaces del circuito equivalente en triángulo (fig. 6b) son:

$$Z_1 = \frac{Y_{23}}{Y_{12}Y_{23} + Y_{23}Y_{31} + Y_{31}Y_{12}} \quad (47)$$

$$Z_2 = \frac{Y_{31}}{Y_{12}Y_{23} + Y_{23}Y_{31} + Y_{31}Y_{12}} \quad (48)$$

$$Z_3 = \frac{Y_{12}}{Y_{12}Y_{23} + Y_{23}Y_{31} + Y_{31}Y_{12}} \quad (49)$$

Así pues, un transformador de tres circuitos podrá representarse por un circuito equivalente simple que comprenda tres impedancias en serie con los tres circuitos exteriores, como en el montaje en estrella de la figura 6c. En este aspecto, el transformador de tres circuitos se diferencia del de cuatro o más circuitos independientes en que un transformador de n circuitos se caracteriza por más de n admitancias independientes cuando n es mayor que tres y en consecuencia dicho transformador no podrá representarse por una estrella de n puntas.

5b. *El transformador de tres circuitos como red de tres terminales.* Los circuitos equivalentes simples de tres terminales que representan a un transformador de tres circuitos pueden, también, deducirse sin el auxilio de la teoría de los de n circuitos. Consideremos el transformador de tres circuitos de la figura 7a. A los terminales 11', 22', 33' se conectan los circuitos exteriores. A las frecuencias de los sistemas de potencia, las corrientes a través de las capacidades de los devanados son despreciables, por lo que las condiciones del circuito quedarán inalteradas si se consideran conectados los terminales 1', 2' y 3', formando un terminal común 0, según indican las conexiones en líneas de trazos de la figura 7a*. Los circuitos exteriores pueden, entonces, considerarse conectados entre los terminales libres 1, 2 y 3 y el terminal común 0. Así pues, el transformador de tres circuitos es equivalente a un elemento de circuito que tenga cuatro terminales accesibles o puntos de entrada, según se indica en la caja rectangular de la figura 7b.

Sean I_1, I_2, I_3 los vectores representativos de las corrientes que penetran por los tres terminales de polaridad correspondiente, según indican los puntos de polaridad

y las flechas en la figura 7a. Estas corrientes son, también, las que penetran por los terminales 1, 2 y 3 de la figura 7b y por tanto la corriente que sale de la caja rectangular por el terminal común 1'2'3' debe ser igual a la suma vectorial $I_1 + I_2 + I_3$ de las corrientes que penetran por los terminales libres, según se indica en la figura 7b.

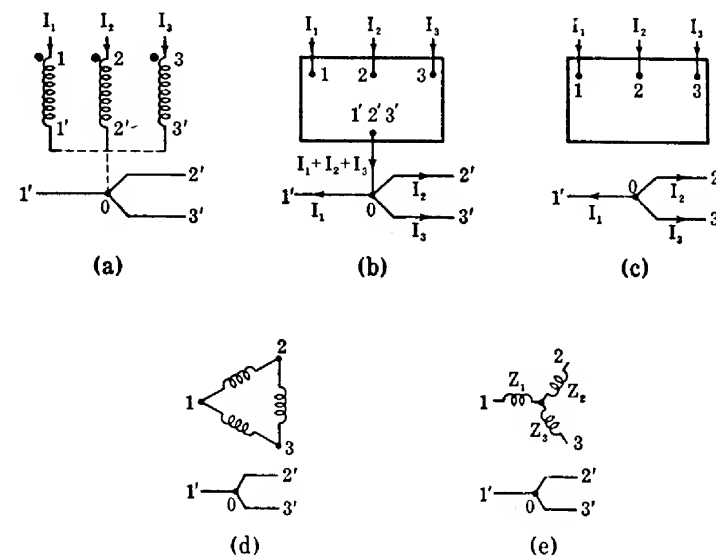


Fig. 7. Esquema de transformador de tres circuitos a, y pasos sucesivos en la deducción de los circuitos equivalentes aproximados d) y e)

Como la corriente de excitación suele ser muy débil, casi siempre se desprecia; es decir, la fuerza magnetomotriz resultante de todas las corrientes se supone nula casi siempre. Así pues, si se toman los sentidos positivos de las corrientes en el mismo sentido respecto al núcleo, como indican las flechas y puntos de polaridad en la figura 7a, y si se refieren todas las corrientes a una base común, su suma vectorial es nula, o sea,

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0. \quad (50)$$

En esta hipótesis, pues, no circula corriente alguna por la conexión entre el terminal común 1'2'3' y el punto de unión 0 de los circuitos exteriores. Por tanto, cuando se refieren todas las corrientes a una base común, puede suprimirse el terminal 1'2'3' y el transformador de tres circuitos es equivalente al elemento de circuito de tres terminales indicado por la caja de la figura 7c.

Exceptuando los fenómenos de excitación, el transformador con núcleo de hierro se comporta como elemento de circuito esencialmente lineal, y por tanto la red de tres terminales interior a la caja de la figura 7c es una red de impedancias esencialmente lineales. Por lo que respecta a sus características exteriores, toda red lineal que tenga tres terminales accesibles o puntos de entrada es equivalente a un triángulo o a una estrella de impedancias.

* Para un estudio más detallado de este punto, véase la página 598.

► Por tanto, cuando se desprecia la corriente de excitación y se refieren todas las corrientes y tensiones a una base común, el transformador de tres circuitos podrá representarse o por un circuito equivalente en triángulo (fig. 7d), o por una estrella (fig. 7e). Corrientemente, es más útil el circuito equivalente en estrella de la figura 7e, ya que las impedancias que representan al transformador pueden entonces combinarse en serie con las impedancias de los circuitos exteriores. ◀

► Obsérvese que estos circuitos equivalentes conectados en triángulo o estrella representan las relaciones entre tensiones y corrientes en los tres circuitos de un transformador monofásico de tres circuitos. No representan circuitos equivalentes trifásicos montados en triángulo o estrella. ◀

5c. *Determinación de los parámetros del circuito equivalente.* Según se vio en la parte a) de este apartado el circuito equivalente constituido por mallas de un transformador de n circuitos se reduce, para un transformador de tres circuitos, al triángulo de la figura 6b; es decir, el triángulo de la figura 6b no es más que un caso particular de la teoría del transformador de n circuitos. Las admitancias de enlace del circuito equivalente en triángulo podrán, pues, determinarse por los mismos métodos que se aplican, en general, a los transformadores de n circuitos. Sus valores, pues, podrán determinarse experimentalmente mediante ensayos en cortocircuito en los que vaya aplicándose una tensión reducida a los devanados, uno por uno, estando los otros dos cortocircuitados. En el apartado 3 se describen detalladamente estos ensayos. Las impedancias de la estrella equivalente de la figura 6c podrán calcularse entonces a partir de las admitancias del triángulo por medio de las ecuaciones (47), (48) y (49).

No obstante, para determinar las impedancias del circuito equivalente en estrella resulta más sencillo evaluarlas en función de las impedancias en cortocircuito o equivalentes de cada par de devanados actuando como transformador de dos circuitos. La impedancia equivalente de cada par de devanados puede calcularse mediante fórmulas de diseño conocidas para dos circuitos*, o pueden determinarse experimentalmente por medio de tres simples ensayos en cortocircuito que se describen a continuación.

Por ejemplo, supongamos aplicada una baja tensión al devanado 1 estando cortocircuitado el 2 y en circuito abierto el 3, como en la figura 8a. En estas condiciones, el circuito equivalente de la figura 7e se reduce al de la figura 8b. Sean V_1 , I_1 y P_1 los valores medidos de la tensión, intensidad y potencia suministradas al devanado 1. Entonces, el módulo de la impedancia equivalente o en cortocircuito $Z_{(12)}$ de los devanados 1 y 2 es:

$$Z_{(12)} = \frac{V_1}{I_1}, \quad (51)$$

y sus componentes de resistencia y reactancia son

$$R_{(12)} = \frac{P_1}{I_1^2} \quad (52)$$

$$X_{(12)} = \sqrt{Z_{(12)}^2 - R_{(12)}^2}. \quad (53)$$

* Por ejemplo, véase el apartado 9 del capítulo XIII.

Los subíndices asociados a la impedancia equivalente y a sus componentes de resistencia y reactancia están encerrados entre paréntesis para indicar que los dos devanados designados actúan como un par. El orden de los subíndices es indiferente. Así pues, si se refieren a una base común las corrientes y tensiones, prescindiendo de los efectos de la debilísima corriente de excitación de cortocircuito, se obtendría el mismo valor de la impedancia equivalente si se excitara el devanado 2 y se cortocircuitara el 1.

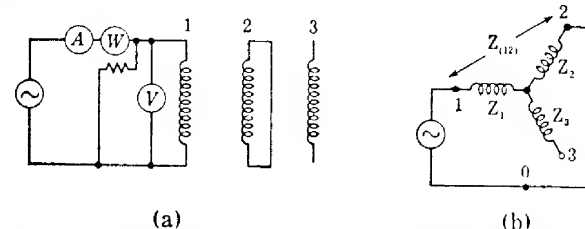


Fig. 8. Ensayo en cortocircuito para medir las impedancias equivalentes; a), esquema de circuito y b), circuito equivalente correspondiente

Examinando la figura 8b se ve que con el devanado 1 excitado y el 2 cortocircuitado, la impedancia en cortocircuito $Z_{(12)}$ es la combinación serie de las dos impedancias de rama Z_1 y Z_2 del circuito equivalente en estrella. Por tanto,

$$Z_{(12)} = Z_1 + Z_2. \quad (54)$$

Análogamente, las relaciones entre las impedancias en cortocircuito $Z_{(23)}$ y $Z_{(31)}$ y las impedancias Z_1 , Z_2 , Z_3 del circuito equivalente son:

$$Z_{(23)} = Z_2 + Z_3 \quad (55)$$

$$Z_{(31)} = Z_3 + Z_1. \quad (56)$$

De las ecuaciones (54), (55) y (56) pueden despejarse las impedancias Z_1 , Z_2 , Z_3 de las ramas del circuito equivalente en estrella en función de las impedancias en cortocircuito $Z_{(12)}$, $Z_{(23)}$, $Z_{(31)}$ obteniéndose las siguientes expresiones:

$$Z_1 = \frac{1}{2} [Z_{(12)} + Z_{(31)} - Z_{(23)}] \quad (57)$$

$$Z_2 = \frac{1}{2} [Z_{(12)} + Z_{(23)} - Z_{(31)}] \quad (58)$$

$$Z_3 = \frac{1}{2} [Z_{(31)} + Z_{(23)} - Z_{(12)}] \quad (59)$$

Obsérvese la forma de estas expresiones; por ejemplo, la impedancia que representa el circuito 1 en el circuito equivalente en estrella de la figura 7e es igual a la mitad de la siguiente cantidad: suma vectorial de las dos impedancias equivalentes del circuito 1 tomado con cada uno de los otros dos circuitos, menos (vectorialmente) la impedancia equivalente de los circuitos 2 y 3.

► Así pues, las tres impedancias del circuito equivalente en estrella pueden determinarse a partir de los valores medidos o calculados de las tres impedancias equivalentes o en cortocircuito de cada par de devanados actuando como transformador de dos circuitos. ◀

Aun cuando las impedancias equivalentes $Z_{(12)}$, $Z_{(23)}$, $Z_{(31)}$ deben todas tener resistencias positivas y reactancias también positivas (es decir, inductivas), es perfectamente posible que para ciertos montajes de los devanados una de las impedancias Z_1 , Z_2 , Z_3 del circuito equivalente pueda tener una reactancia negativa⁶. Por ejemplo, si el montaje de los devanados es tal que la reactancia equivalente $X_{(12)}$ de los devanados 1 y 2 sea mayor que la suma de las reactancias equivalentes $X_{(21)}$ y $X_{(23)}$, entonces, por la ecuación (58), la reactancia X_2 de la impedancia Z_2 es negativa. Una de las ramas del circuito equivalente puede, en realidad, tener resistencia negativa, pero hay que tener en cuenta que el circuito equivalente sólo representa el comportamiento *externo* del transformador y una resistencia negativa en una rama del circuito equivalente *no* significa una pérdida negativa en la carga de uno de los devanados. El circuito equivalente da la pérdida total correcta en la carga para condiciones de carga cualesquiera, pero *no* indica la manera en que se distribuyen entre los devanados las pérdidas en la carga.

Aun cuando las impedancias negativas no presentan dificultades al tratamiento analítico, su presencia hace difícil representar un transformador de tres circuitos en un analizador de redes * mediante su circuito equivalente. Una reactancia negativa puede representarse (a frecuencia constante) por una capacidad, pero la reactancia suele ser muy pequeña y por tanto debería utilizarse una capacidad demasiado grande. Una resistencia negativa presenta dificultades aún mayores, ya que no puede representarse por elementos físicos sencillos. Las dificultades suelen evitarse combinando la impedancia negativa de la rama del circuito equivalente con las impedancias positivas de los circuitos exteriores conectados al transformador. Como la impedancia negativa del circuito equivalente suele ser pequeña, la combinación serie suele ser una impedancia positiva.

5d. *Circuitos equivalentes que incluyen a la corriente de excitación.* Si se prescinde de las peculiaridades de los fenómenos de excitación originados por las características magnéticas no lineales del núcleo, el circuito equivalente de cuatro terminales y seis ramas de la figura 6a constituye un equivalente exacto del transformador de tres circuitos. Sin embargo, muy rara vez será suficientemente importante la corriente de excitación para que sea preciso el empleo de dicho circuito equivalente relativamente complicado.

Aun cuando se quisiera utilizar este circuito equivalente, resultaría muy difícil obtener valores precisos de las tres admitancias de excitación Y_{10} , Y_{20} , Y_{30} de la figura 6a. Teóricamente, pueden determinarse los valores de estas admitancias a partir de los resultados de tres ensayos en circuito abierto —es decir, midiendo primeramente la corriente de excitación del lado del primario, después la del secundario, y por último la del terciario. Si a partir de los resultados de ensayos en cortocircuito se conocen las admitancias de enlace Y_{12} , Y_{23} , Y_{13} de la figura 6a, los tres ensayos en circuito abierto dan, en teoría, suficiente información acerca de las tres admitancias que se quiere calcular. Sin embargo, ordinariamente, cuando se refieren a una base común las tensiones y corrientes de excitación, los tres valores de la corriente de excitación para la misma tensión aplicada resultan ser iguales dentro de la precisión de las medidas. Es decir, en lugar de dar tres datos independientes de información,

⁶ Para un estudio de estas impedancias negativas, véase L. F. BLUME, editor, *Transformer Engineering* (New York: John Wiley & Sons, 1938), 103-107.

* Véase nota de pie de página 611.

los tres ensayos en circuito abierto sólo dan, en realidad, uno. Puede decirse, pues que por ser las admitancias en cortocircuito Y_{12} , Y_{13} , Y_{23} de la figura 6a mucho mayores que las admitancias de excitación, todos los ensayos en circuito abierto miden esencialmente la misma admitancia, cual es la resultante de Y_{10} , Y_{20} , Y_{30} en paralelo y resulta imposible determinar, a partir de este único valor medido, los valores separados de cada una de las componentes. Lo mejor que puede hacerse es suponer iguales las admitancias Y_{10} , Y_{20} , Y_{30} y que cada una de ellas es igual a un tercio de la admitancia en circuito abierto.

Otro método mucho más sencillo de incluir en forma aproximada los efectos de la corriente de excitación es el indicado en la figura 9, donde se ha modificado el circuito equivalente de la figura 7e conectando una admitancia igual a la admitancia en circuito abierto Y_{oc} entre el punto de unión de las impedancias en estrella Z_1 , Z_2 , Z_3 y el terminal común 0 de los circuitos exteriores. En realidad, el circuito equivalente de la figura 9 constituye, probablemente, una representación tan precisa del transformador como el circuito equivalente «exacto» de la figura 6a, ya que, por lo general, no pueden determinarse los valores exactos de las admitancias de excitación de la figura 6a.

5e. *Resumen de la teoría del transformador de tres circuitos.* El anterior estudio de la teoría del transformador de tres circuitos puede resumirse de la manera siguiente:

Los problemas en los que intervienen los efectos de un transformador de tres circuitos como elemento de impedancia —tales como los referentes a la regulación de tensión, corrientes de cortocircuito y división de la carga entre circuitos o entre transformadores en paralelo— pueden resolverse con ayuda de un circuito equivalente. En los problemas en los que intervienen redes complicadas, el transformador de tres circuitos puede representarse en un analizador de redes * por medio de su circuito equivalente.

Cuando pueda considerarse conectado un terminal de cada devanado a los terminales correspondientes de los otros dos devanados, el transformador de tres circuitos puede representarse por un circuito equivalente de cuatro terminales y seis ramas, como en la figura 6a.

Cuando se desprecia la corriente de excitación, el circuito equivalente del transformador de tres circuitos se reduce a una red de tres terminales que puede representarse por un montaje triángulo o estrella de elementos de circuito. El montaje en estrella es, generalmente, el más útil, ya que las impedancias que representan al transformador se hallan entonces en serie con las impedancias de los circuitos exteriores y pueden combinarse con ellas fácilmente.

A diferencia del transformador de tres circuitos, un transformador con cuatro o más circuitos no podrá representarse por una impedancia en serie con cada uno de los circuitos exteriores, sino que precisa de una red más complicada para ser representado.

Las impedancias del circuito equivalente conectado en estrella del transformador de tres circuitos pueden determinarse fácilmente a partir de las impedancias equi-

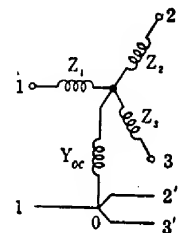


FIG. 9. Circuito equivalente que tiene en cuenta, aproximadamente, la corriente de excitación

* Véase nota al pie de la página 611.

valentes o en cortocircuito de cada par de terminales considerado como transformador de dos circuitos, según se indica en las ecuaciones (57), (58) y (59).

Los efectos de las corrientes de excitación pueden tenerse en cuenta, en forma aproximada, conectando la admitancia en circuito abierto entre el centro de la estrella y el punto de unión de los circuitos exteriores, como se indica en la figura 9.

5f. *Ejemplo de cálculo de un transformador de tres circuitos.* Se quiere utilizar un transformador trifásico de tres devanados y valores nominales 5 000 kVA, 60 Hz, 14 400 : 2 400 : 575 V como transformador de central que alimente los servicios auxiliares de turbina y calderas en una central generadora. Al devanado de 14 400 V corresponde una potencia nominal de 5 000 kVA; a los devanados de 2 400 y 575 V corresponde, a cada uno, una potencia nominal de 2 500 kVA. Los tres devanados están conectados en triángulo.

A fin de evitar un régimen de interrupción demasiado intenso en los interruptores de 575 V, se diseña el transformador de manera que un cortocircuito firme, trifásico, simétrico, directamente entre los terminales del devanado de 575 V, manteniéndose la tensión nominal en el devanado de 14 400 V, origine corrientes permanentes de intensidad limitada a 25 000 A en las líneas que parten de los terminales del devanado de 575 V. Cuando se diseña el transformador para que reúna estos requisitos, la reactancia en cortocircuito de los devanados 14 400 : 2 400 V resulta ser del 6,0 % sobre una base de 5 000 kVA y la reactancia en cortocircuito de los devanados 2 400 : 575 V es del 10,0 % sobre una base de 2 500 kVA. Las resistencias de los devanados son suficientemente pequeñas para poderlas despreciar en este problema.

A causa de estas condiciones especiales, es conveniente determinar si las tensiones a plena carga de las barras de 575 V y 2 400 V resultan ser demasiado bajas. Estas tensiones deben calcularse para cargas de 2 500 kVA con factor de potencia inductivo de 0,85 en cada sistema de barras y con la tensión nominal de 14 400 V aplicada al devanado de alta.

Solución: Hay que hallar primeramente las constantes del circuito equivalente. Numeremos con 1, 2 y 3, respectivamente, a los devanados de 14 400 V, 2 400 V y 575 V. Entonces, en tanto por uno sobre una base de 2 500 kVA,

$$X_{(12)} = 0,06 \times \frac{2\,500}{5\,000} = 0,03 \quad (60)$$

$$X_{(32)} = 0,10. \quad (61)$$

Sobre una base de 2 500 kVA, la intensidad en las líneas de 575 V, es, en tanto por uno

$$\frac{2\,500 \times 1\,000}{\sqrt{3} \times 575}, \text{ o sea, } 2\,510 \text{ A.}$$

Luego, la intensidad de 25 000 A, de la corriente en cortocircuito es:

$$\frac{25\,000}{2\,510}, \text{ o sea, } 9,96 \text{ por uno}$$

y

$$X_{(31)} = \frac{1}{9,96} = 0,1003. \quad (62)$$

Por ser despreciables las resistencias de los devanados, de las ecuaciones (57), (58) y (59), resulta,

$$X_1 = \frac{1}{2}(0,03 + 0,1003 - 0,10) = 0,0151 \quad (63)$$

$$X_2 = \frac{1}{2}(0,03 + 0,10 - 0,1003) = 0,0149 \quad (64)$$

$$X_3 = \frac{1}{2}(0,1003 + 0,10 - 0,03) = 0,0851. \quad (65)$$

En la figura 10 se da el circuito equivalente del transformador, en la cual se presentan también las condiciones del problema. El examen de la figura 10 indica que en la solución directa del problema habría que tomar como incógnitas las corrientes del transformador y plantear un sistema de ecuaciones terrible, siendo cuadráticas algunas de ellas. A fin de evitar una solución tan laboriosa y posiblemente de poca precisión, adoptaremos un método de aproximaciones sucesivas.

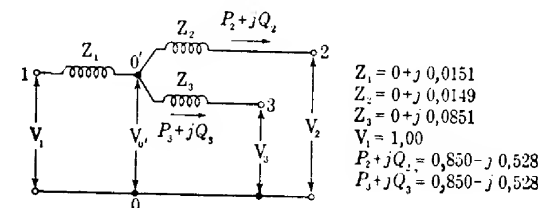


Fig. 10. Circuito equivalente para el transformador de tres devanados del apartado 5f, indicándose las condiciones del problema. Todas las unidades se expresan en tanto por uno sobre una base de 2 500 kVA.

Admitiendo que todos los devanados conducen corrientes aproximadamente iguales a sus corrientes nominales, puede estimarse en primera aproximación una caída de tensión del 1,5 % en Z_1 y del 8,5 % en Z_3 . La intensidad de la corriente que circula por Z_1 es aproximadamente doble de la corriente unitaria (sobre la base de 2 500 kVA), y por tanto, la caída de tensión en Z_1 es aproximadamente del 3 %. Las caídas de tensión se restan vectorialmente de la tensión nominal aplicada al devanado 1, y en consecuencia las tensiones en terminales de los devanados 2 y 3 son algo mayores que las diferencias aritméticas entre la tensión aplicada V_1 y las caídas de tensión. No obstante, pueden obtenerse valores aproximados de las tensiones en terminales V_2 y V_3 ignorando las relaciones vectoriales; así,

$$V_2 \approx 1,00 - 0,03 - 0,01 = 0,96 \quad (66)$$

$$V_3 \approx 1,00 - 0,03 - 0,08 = 0,89. \quad (67)$$

Sobre esta base, las intensidades de las corrientes que circulan por los devanados son:

$$I_2 \approx \frac{1,00}{0,96} = 1,04, \quad (68)$$

$$I_3 \approx \frac{1,00}{0,89} = 1,12, \quad (69)$$

y

$$I_1 \approx 1,04 + 1,12 = 2,16. \quad (70)$$

Puede ahora estimarse la potencia de entrada al devanado 1 si se añade a las potencias de salida de los devanados 2 y 3 la potencia reactiva inductiva (I^2X) absorbida por las reactancias de fuga del transformador. La potencia reactiva absorbida por las reactancias de fuga es:

$$\Sigma I^2 X = I_1^2 X_1 + I_2^2 X_2 + I_3^2 X_3 \quad (71)$$

$$\approx (2,16)^2 (0,0151) + (1,04)^2 (0,0149) + (1,12)^2 (0,0851) \quad (72)$$

$$\approx 0,19. \quad (73)$$

Por convenio, el signo algebraico asociado a la potencia reactiva inductiva es negativo, y por tanto, la potencia $P_1 + jQ_1$ de entrada al devanado 1 es:

$$P_1 + jQ_1 = P_2 + jQ_2 + P_3 + jQ_3 - j\sum I^2 X \quad (74)$$

$$\approx 2(0,850 - j 0,528) - j 0,19 \quad (75)$$

$$\approx 1,70 - j 1,25. \quad (76)$$

A partir de esta entrada puede formularse una solución para V_2 y V_3 , obteniéndose valores que, comparados con los anteriormente estimados, sirvan de guía para una segunda aproximación, si fuera necesaria. Como V_1 es igual al 1,00 por uno, la corriente I_1 del devanado 1 expresada en tanto por uno será igual a la potencia $P_1 + jQ_1$ en tanto por uno cuando es V_1 el vector de referencia. Así,

$$I_1 = 1,70 - j 1,25. \quad (77)$$

El vector V_0' representativo de la tensión del punto común 0' de la figura 10 es:

$$V_0' = V_1 - jI_1 X_1 \quad (78)$$

$$= 1,00 + j 0 - j 0,0151 (1,70 - j 1,25) \quad (79)$$

$$= 0,981 - j 0,0256. \quad (80)$$

Ahora pueden determinarse los vectores representativos de las tensiones en los terminales de los devanados 2 y 3.

$$V_2 = V_0' - jI_2 X_2 \quad (81)$$

$$= 0,981 - j 0,0256 - j 0,0149 \left(\frac{1,70 - j 1,25}{2} \right) \quad (82)$$

$$= 0,972 - j 0,0383. \quad (83)$$

El módulo de V_2 es:

$$V_2 = 0,972 \text{ por uno, o sea, } 2\,330 \text{ V.} \quad (84)$$

El vector tensión V_3 es:

$$V_3 = V_0' - jI_3 X_3 \quad (85)$$

$$= 0,981 - j 0,0256 - j 0,0851 \left(\frac{1,70 - j 1,25}{2} \right) \quad (86)$$

$$= 0,928 - j 0,0979 \quad (87)$$

El módulo de V_3 es:

$$V_3 = 0,930 \text{ por uno, o sea, } 535 \text{ V.} \quad (88)$$

Repetiendo este proceso con estas tensiones como segundas aproximaciones se llega a resultados casi iguales. Las tensiones a plena carga del transformador son, pues, 2 330 V y 535 V.

PROBLEMAS

1. Un transformador de cuatro circuitos tiene devanados cuyos valores nominales son los siguientes:

Devanado	Tensión	Capacidad
1	76 800 V	30 000 kVA
2	38 500	15 000
3	6 350	20 000
4	6 350	20 000

Una serie de ensayos realizados con un devanado excitado y todos los demás cortocircuitados da los datos tabulados a continuación. Todos los datos se dan en tanto por uno sobre una base de 30 000 kVA a tensión nominal.

Devanado excitado	Tensión aplicada	Circuito de corriente en el devanado	Intensidad	Indicación del watímetro
1	0,0478	1	1,00	0,00733
1	0,0478	2	0,980	0,00710
1	0,0478	3	0,041	0,000458
1	0,0478	4	0,019	0,000137
2	0,0314	1	0,644	0,00306
2	0,0314	2	1,00	0,00483
2	0,0314	3	0,448	0,00217
2	0,0314	4	0,095	0,000434
3	0,0366	1	0,031	0,000268
3	0,0366	2	0,522	0,00295
3	0,0366	3	1,00	0,00495
3	0,0366	4	0,445	0,00174

Determinar los valores de los parámetros para un circuito equivalente del tipo indicado en la figura 2c.

2. Hallar la impedancia en cortocircuito entre los dos devanados de alta tensión del transformador del problema 1.

3. Si se ajusta la tensión del primario del transformador del problema 1 de manera que el devanado 2 alimente la carga total a la tensión nominal y factor de potencia unidad cuando los devanados 3 y 4 no alimenten carga alguna, ¿qué tanto por ciento de la tensión nominal aparecerá entre los terminales del devanado 2 cuando del 3 se tome la corriente de plena carga con factor de potencia unidad? Depréciense las resistencias equivalentes del transformador.

4. En la figura 11a se presenta un circuito equivalente para un transformador de cuatro devanados, en el cual las Z incluyen resistencia y reactancia.

a) Determinar los valores de las impedancias del circuito de la figura 11a en función de las impedancias en cortocircuito de cada par de devanados.

b) En la figura 11b se presenta una modificación del circuito de la figura 11a que es conveniente para utilizarla en un analizador de redes. Determinar los valores de los parámetros del circuito de la figura 11b en función de las impedancias en cortocircuito de cada par de devanados. ¿Cuáles son las ventajas del circuito de la figura 11b?

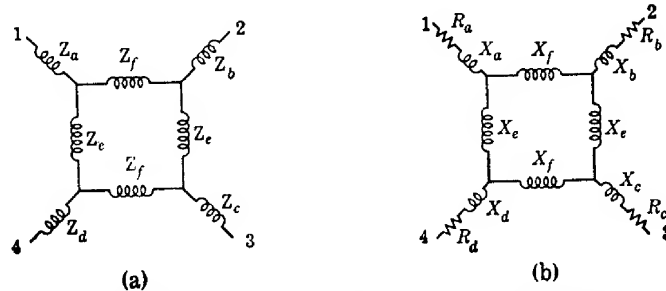


FIG. 11. Circuitos equivalentes para el transformador de 4 circuitos del problema 4

5. Los siguientes datos corresponden a un transformador de potencia de tres circuitos:

VALORES NOMINALES

Devanado	Capacidad	Tensión
1	10 000 kVA	63 500 V
2	6 667	11 000
3	5 000	7 580

DATOS EN CORTOCIRCUITO

(Intensidad nominal en el devanado cortocircuitado)

Devanado cortocircuitado	Tensión aplicada al devanado	Tensión	Potencia
2	1	4 490 V	46 100 W
3	2	588	35 000
3	1	5 800	35 800

DATOS EN CIRCUITO ABIERTO

Devanado excitado	Tensión aplicable	Intensidad	Potencia
1	63 500 V	1,12 A	17 900 W

a) Determinar los valores de los parámetros para un circuito equivalente del tipo indicado en la figura 9. Expresar todos los valores en tanto por ciento sobre una base de 10 000 kVA a la tensión nominal.

b) Determinar los valores de los parámetros para un circuito equivalente del tipo indicado en la figura 6a. Expresar todos los valores en tanto por ciento sobre una base de 10 000 kVA a la tensión nominal y supóngase que las admitancias de excitación Y_{10} , Y_{20} , Y_{30} son iguales.

6. Tres transformadores iguales al del problema 5 constituyen un banco trifásico que reduce la tensión de una línea de transmisión trifásica de 110 000 V. Los devanados 2, conectados en triángulo, alimentan una carga inductiva equilibrada de 18 000 kVA a un factor de potencia de 0,80. Los devanados 3, conectados en estrella, alimentan una carga inductiva equilibrada de 10 000 kVA a un factor de potencia de 0,90.

a) ¿Cuál debe ser la tensión entre línea y línea de los primarios para que se mantenga la tensión nominal en la carga de 18 000 kVA?

b) Para la condición de la parte a), ¿cuál sería la tensión en la carga de 10 000 kVA?

c) Para la condición de la parte a), ¿cuál sería el rendimiento del transformador?

7. Un transformador monofásico de distribución de 5 kVA tiene un devanado de 2 400 V y dos devanados iguales distribuidos simétricamente de 240 V que, en funcionamiento normal, se conectan en paralelo. La impedancia equivalente con los dos devanados de baja en paralelo es de $16,0 + j 23,2$ ohm referida al lado de alta tensión.

El transformador se utiliza para alimentar dos pequeños motores monofásicos, estando conectado directamente a cada motor un devanado de baja tensión. Si un motor consume 2 kVA a un factor de potencia de 0,75 y el otro 2 kVA a un factor de potencia de 0,85, ¿cuáles son las tensiones en los terminales de los motores cuando es de 2 400 V la tensión en los terminales del primario? Enúnciense todas las hipótesis que se hagan en la solución.

8. Tres transformadores iguales de tres circuitos cuyos valores nominales y características son los especificados en el problema 5 se conectan con sus dos sistemas de devanados de baja tensión en triángulo y sus devanados de alta tensión en estrella.

Si a los devanados de alta tensión se aplican tensiones trifásicas equilibradas de 110 000 V entre línea y línea y aparece un cortocircuito en el devanado de 11 000 V de uno de los transformadores, ¿cuál será la intensidad de la corriente en cortocircuito?

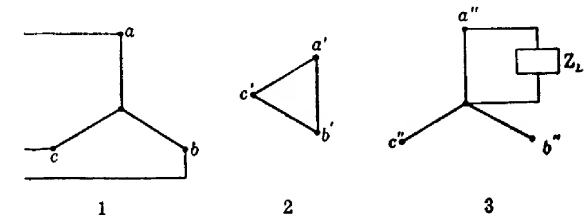


FIG. 12. Conexión trifásica de transformadores de tres circuitos, problema 9

9. Se conectan en estrella-triángulo-estrella tres transformadores iguales de tres circuitos en la forma indicada en la figura 12. A un sistema de devanados conectados en estrella con el neutro no puesto a tierra se aplican las tensiones de una línea trifásica equilibrada. Entre línea y neutro del otro sistema conectado en estrella se conecta una carga monofásica. Hallar el valor de la intensidad de la corriente de carga en función de la tensión aplicada, las impedancias del circuito equivalente del transformador y la impedancia de la carga referida a una base común.

Conexiones de los transformadores para la transformación de fases

En muchas ocasiones se desea transformar la potencia de un sistema polifásico en potencia de otro de diferente número de fases. Por ejemplo, aun cuando la generación, transmisión y distribución trifásicas son las normales en los sistemas de potencia modernos, todavía existen muchas de las redes de distribución bifásicas utilizadas antiguamente, debido a que los gastos de modernización y conversión en trifásica de la distribución, resultan demasiado elevados. Así, pues, muchas compañías suministradoras que disponen de centrales generadoras y sistemas de distribución trifásicos deben distribuir una gran cantidad de potencia en forma bifásica. Estas redes bifásicas suelen estar alimentadas por un sistema trifásico a través de un banco de transformadores adecuadamente conectados.

Además, en otras aplicaciones puede desearse potencia hexafásica o dodecafásica, especialmente en subcentrales que convierten la corriente alterna en continua mediante convertidores sincrónicos o rectificadores electrónicos. Al aumentar el número de fases de la corriente alterna que penetra en un rectificador electrónico se disminuyen los armónicos nocivos en la entrada de corriente alterna y da una onda de tensión más lisa en el lado de salida de la corriente continua. Existen en funcionamiento muchos rectificadores hexafásicos y algunas de las instalaciones mayores están alimentadas por potencia dodecafásica. Con el convertidor sincrónico o rotatorio —máquina rotativa que combina en un inducido las funciones de motor sincrónico de corriente alterna y generador de corriente continua¹— el tamaño disminuye y el rendimiento aumenta cuando se eleva el número de fases de la corriente alterna de alimentación. No obstante, un número de fases elevado requiere un inducido complicado y presenta otras características poco recomendables, por lo que la mayoría de los convertidores sincrónicos están alimentados con potencia hexafásica, aun cuando existan algunas máquinas grandes dodecafásicas.

Rara vez será económicamente posible alimentar rectificadores o convertidores sincrónicos mediante líneas de transmisión hexa —o dodecafásicas pero, en cambio, resulta muy sencillo convertir en potencia hexa —o dodecafásica mediante un banco transformadores la potencia recibida de un sistema trifásico.

1. CONEXIÓN TRIFÁSICA A HEXAFÁSICA SIMÉTRICAS

Un sistema equilibrado de tensiones hexafásicas consiste en seis tensiones de igual magnitud defasadas en $360/6 = 60^\circ$ cada dos fases consecutivas tomadas en orden cíclico.

¹ Los convertidores sincrónicos se estudian en la mayoría de textos que tratan de maquinaria eléctrica; p. e., R. R. LAWRENCE, *Principles of Alternating-Current Machinery* (tercera edición; New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1940), 417-467.

Para transformar la potencia trifásica en hexafásica se utilizan comúnmente varios dispositivos. El más sencillo consiste en un transformador trifásico —o un banco de tres transformadores monofásicos— que tenga por cada fase un devanado primario y dos devanados secundarios independientes. Los primarios trifásicos, que pueden conectarse en estrella o en triángulo, tienen a veces efectos importantes sobre los fenómenos de armónicos, según se ve en la parte e) de este apartado. Los secundarios pueden conectarse de varias maneras.

1a. *Conexión en estrella hexafásica.* Consideremos un banco de transforma-

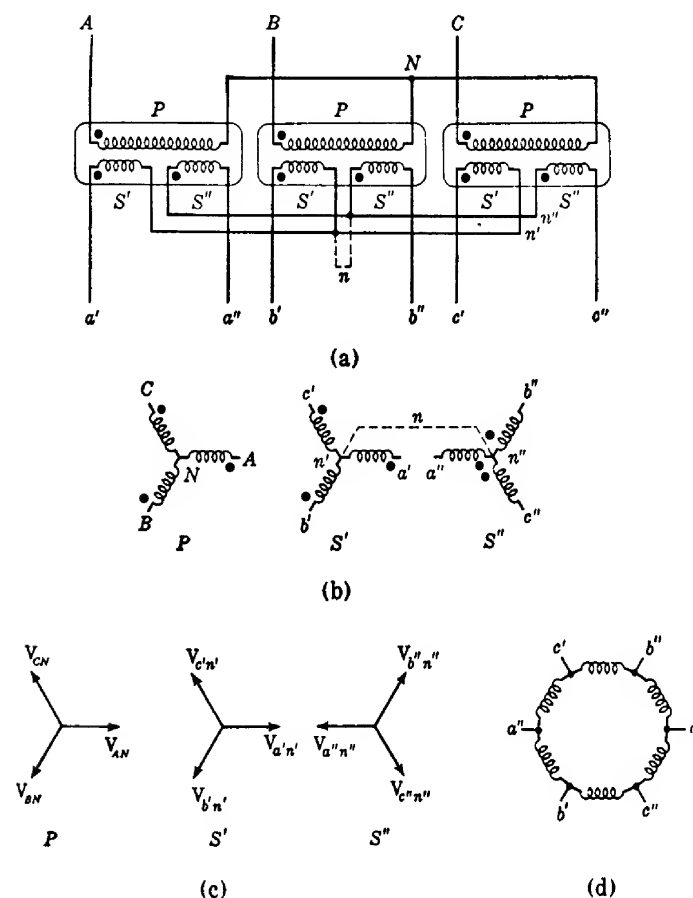


FIG. 1. Conexión estrella trifásica a doble estrella hexafásica, y diagramas vectoriales de las tensiones. Cuando se unen los puntos neutros n' y n'' mediante la conexión n en línea de trazos, la conexión en doble estrella se convierte en la estrella hexafásica de la figura 2. En (d), puede verse una carga hexafásica equilibrada.

dores que comprenda tres transformadores, cada uno de los cuales fenga un primario único y dos secundarios iguales. La disposición real de los transformadores es la de la figura 1a, y las conexiones pueden verse en forma simplificada en la figura 1a, y las conexiones pueden verse en forma simplificada en la figura 1b, en la cual se han dibujado paralelos entre sí todos los devanados de un mismo transformador. Los primarios se conectan a un generador trifásico equilibrado. Los secundarios se conectan en estrella en dos grupos, S' y S'' de polaridad opuesta; es decir el punto neutro n' del grupo S' está formado por la unión de los terminales sin marca de los tres secundarios, mientras el punto neutro n'' del grupo S'' está formado por los terminales marcados con punto, reunidos.

Los diagramas vectoriales de las tensiones en terminales (despreciando las caídas de tensión en las impedancias de fuga) están indicados en la figura 1c, en la cual las V representan caídas de potencial en los sentidos indicados por el orden de los subíndices. Las tensiones en los secundarios del grupo S' están en concordancia de fase con las tensiones en los primarios correspondientes, mientras las del grupo S'' están en oposición. Así pues, entre los sistemas trifásicos de tensiones obtenidos de los dos grupos de secundarios existe un desfase de 60° . Por tanto, si se unen los dos neutros n' y n'' , como indica las líneas de trazos n de las figuras 1a y 1b, de los secundarios podrán obtenerse tensiones hexafásicas. Esta interconexión de los dos neutros equivale a superponer las dos estrellas de secundarios según se indica en la figura 2a, de manera que formen una estrella de seis puntas. En la figura 2a, los terminales de los secundarios se designan por a, b, c, d, e, f para corresponder al orden cíclico de las tensiones hexafásicas. En la figura 2b pueden verse los diagramas vectoriales de las tensiones hexafásicas respecto al neutro y de las corrientes de línea suministradas a una carga hexafásica equilibrada a un factor de potencia unidad. Como en la conexión en estrella hexafásica se unen todos los terminales no marcados del grupo S' de secundarios a los terminales marcados del grupo S'' , las conexiones reales de los secundarios se pueden realizar como en la figura 2c, en la cual la línea de trazos n de conexión forma el punto neutro de la estrella hexafásica. No es necesario, por tanto, que sean accesibles los cuatro terminales de los secundarios de cada transformador, siendo suficiente para la conexión en estrella hexafásica un único devanado secundario con toma central.

Si se conecta el banco de transformadores a un convertidor sincrónico que suministre potencia a un sistema de tres hilos por su lado de corriente continua, el punto neutro n de los secundarios conectados en estrella hexafásica podrá utilizarse para obtener el neutro del sistema de corriente continua.

Las tensiones de los secundarios de la conexión en estrella hexafásica forman un verdadero sistema hexafásico; es decir, entre cada terminal de línea y todos los demás terminales de línea existen tensiones definidas. A continuación se describirán otros varios montajes que dan tensiones hexafásicas equilibradas sólo cuando se conectan los devanados de los transformadores a una carga hexafásica equilibrada.

1b. Conexión diametral. Si se conectan los terminales de los secundarios del montaje en estrella hexafásica de la figura 2c a una carga hexafásica equilibrada, tal como el inducido de convertidor sincrónico indicado esquemáticamente en la figura 2d, las corrientes hexafásicas suministradas a la carga están equilibradas, según indica el diagrama vectorial de la figura 2b. Consideremos los secundarios de uno de los transformadores —por ejemplo, aquel cuyos secundarios alimentan las

fases a y d del sistema hexafásico. Las corrientes I_{na} e I_{nd} se indican con flechas situadas junto a los devanados secundarios en la figura 2c. Del diagrama vectorial de la figura 2b resulta que las corrientes I_{na} e I_{nd} tienen igual intensidad eficaz pero están en oposición de fase y por tanto su suma vectorial, que es igual a la corriente que penetra en la toma central por la conexión neutra en línea de trazos de la figura 2c, es nula. Es decir, por ambos secundarios circulan corrientes iguales en el mismo sentido. En consecuencia, podrá suprimirse la conexión neutra en línea de trazos de la figura 2c sin que se perturbe el circuito. Cuando se suprime la conexión neutra de la estrella hexafásica, el montaje recibe el nombre de conexión diametral, porque cada

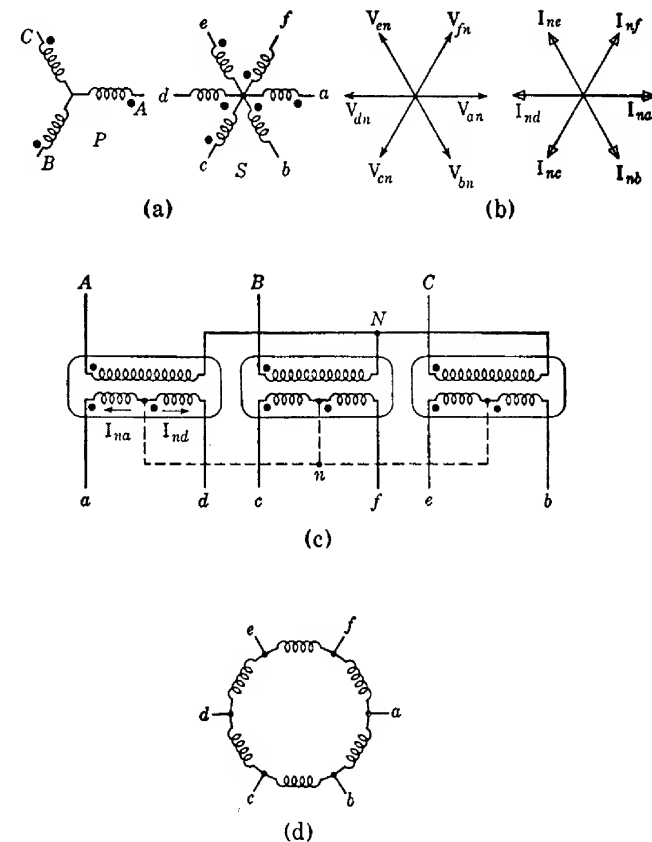


FIG. 2. Conexión de estrella trifásica a estrella hexafásica y diagramas vectoriales de tensiones y corrientes hexafásicas equilibradas. Cuando se suprime en (c) la conexión neutra representada en línea de trazos, la estrella hexafásica se convierte en la conexión diametral. En (d) puede verse una carga hexafásica equilibrada.

secundario está conectado a puntos diametralmente opuestos de la carga hexafásica, según indican las letras de los terminales en las figuras 2c y 2d.

Obsérvese que si se desconectan de la carga los terminales de los secundarios, no existirán tensiones definidas entre uno y otro sistema de secundarios y el montaje se descompone en tres sistemas monofásicos independientes que no están en concordancia de fase. Sólo cuando las fases están interconectadas a través de una carga hexafásica equilibrada dará la conexión diametral tensiones hexafásicas equilibradas.

1c. *Conexión en doble estrella.* Consideremos el montaje en doble estrella de las figuras 1a y 1b. Si está equilibrada la carga hexafásica, cada grupo de secundarios conectados en estrella suministra corrientes trifásicas equilibradas. Por lo que respecta a los armónicos fundamentales, la suma vectorial de tres corrientes trifásicas equilibradas es nula, y por tanto por la conexión neutra n , indicada en línea de trazos en las figuras 1a y 1b, que une los neutros de las dos estrellas, no circula corriente alguna. Puede, pues, suprimirse esta conexión, dejando independientes entre sí las dos estrellas salvo en lo que respecta a su interconexión a través de la carga. Sin embargo, el aislamiento de los dos puntos neutros puede tener efectos importantes sobre los fenómenos de armónicos descritos en la parte e) de este apartado.

Obsérvese que, al igual que la conexión simétrica, la conexión en doble estrella sólo da tensiones hexafásicas equilibradas cuando los dos grupos de secundarios montados en estrella están adecuadamente conectados a una carga hexafásica equilibrada, tal como el inducido de un convertidor sincrónico, indicada esquemáticamente en la figura 1d. La manera como hay que realizar las conexiones se indica mediante las letras de los terminales de las figuras 1a y 1d.

La conexión en doble estrella se emplea frecuentemente en circuitos rectificadores electrónicos, estando entonces conectados los neutros de las estrellas a través de un autotransformador o de una bobina de reacción con toma central, conocido por el nombre de transformador interfase.

1d. *Conexión en doble triángulo.* Cuando se conectan en triángulo cada uno de los dos grupos de secundarios, siendo opuesta la polaridad de un grupo a la del otro, como se indica con los esquemas de conexiones de la figura 3, se obtienen dos sistemas de tensiones trifásicas defasados 60° . A este montaje se le llama conexión en doble triángulo. Al igual que en la conexión en doble estrella, si se conectan adecuadamente los dos sistemas trifásicos a una carga hexafásica equilibrada, se obtienen tensiones hexafásicas equilibradas; no obstante, si se desconecta la carga, los secundarios no dan tensiones hexafásicas, sino que sólo dan dos sistemas trifásicos independientes. La conexión en doble triángulo se utiliza, a veces, para suministrar potencia hexafásica a convertidores sincrónicos cuando no se precisa una conexión hexafásica neutra.

1e. *Efectos de las conexiones de los primarios.* En ciertas condiciones, las conexiones de los primarios pueden tener efectos importantes sobre el funcionamiento del circuito, a causa del comportamiento peculiar de los terceros armónicos de corrientes y tensiones en los sistemas trifásicos *. Los terceros armónicos de las corrientes o de las tensiones pueden existir o a causa de las características de excitación de los transformadores, o porque estén originados por la carga. Podemos enunciar de la manera siguiente el principio básico de esas situaciones en las que son importantes los fenómenos de armónicos.

* Véase el capítulo XXIII.

Si los devanados primarios están conectados en triángulo, por ellos pueden circular terceros armónicos de las corrientes pero, si los primarios están conectados en estrella con el neutro aislado, no podrán existir terceros armónicos equilibrados de las corrientes de los primarios. Por tanto, no deberá utilizarse la conexión en estrella con neutro aislado cuando los circuitos secundarios no proporcionan un camino para los terceros armónicos de las corrientes de excitación necesarios para crear un flujo sinusoidal, o cuando la carga exige la presencia de terceros armónicos en los primarios. Por ejemplo, en algunos montajes, las corrientes que circulan por los secundarios de un banco de transformadores que suministre potencia a un rectificador electrónico hexafásico pueden contener terceros armónicos intensos y, si los primarios no están conectados en triángulo de manera que permitan la existencia

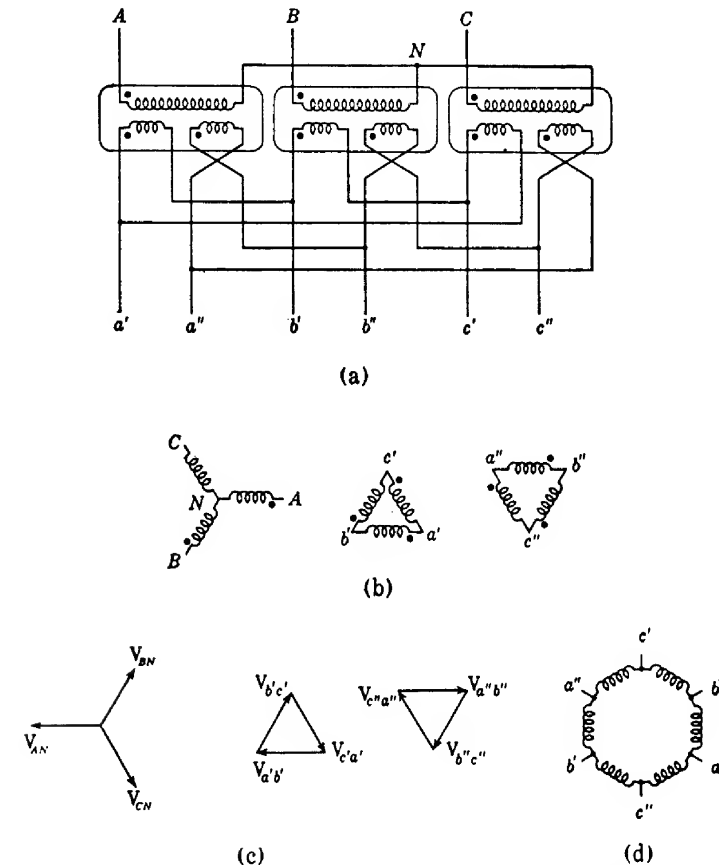


FIG. 3. Conexión de estrella trifásica a doble triángulo hexafásico y diagramas vectoriales de las tensiones. En (d) se presenta una carga hexafásica equilibrada

según indica el diagrama vectorial de la figura 5b. Obsérvese que la tensión hexafásica entre línea y neutro es $\sqrt{3}$ veces mayor que la tensión en un devanado secundario.

La conexión en doble zigzag se emplea a menudo para suministrar potencia hexafásica a un rectificador electrónico.

2b. *Conexión en cuádruple zigzag.* De un sistema trifásico puede obtenerse un sistema de tensiones dodecafásicas si cada uno de los tres transformadores tiene seis secundarios independientes interconectados en la forma indicada en la figura 6. Los devanados paralelos entre sí se hallan arrollados sobre el mismo núcleo magnético. Están indicadas las polaridades de los devanados. El neutro del sistema dodecafásico es n y los terminales de las líneas son a, b, c, \dots, l . Los primarios de los tres transformadores (no indicados en la figura 6), pueden conectarse en triángulo o en estrella. Puede demostrarse que para una salida dodecafásica equilibrada, habrá en cada uno de los doce secundarios menores un número de espiras igual al producto de 0,366 por el número de espiras de uno de los seis secundarios conectados en estrella.

Para suministrar potencia dodecafásica a un rectificador electrónico se emplea frecuentemente un montaje análogo a este.

3. TRANSFORMACION DE TRES A DOS FASES

Un sistema de tensiones bifásicas equilibradas comprende dos tensiones de igual magnitud defasadas en 90° . En la figura 7, pueden verse tres montajes corrientes

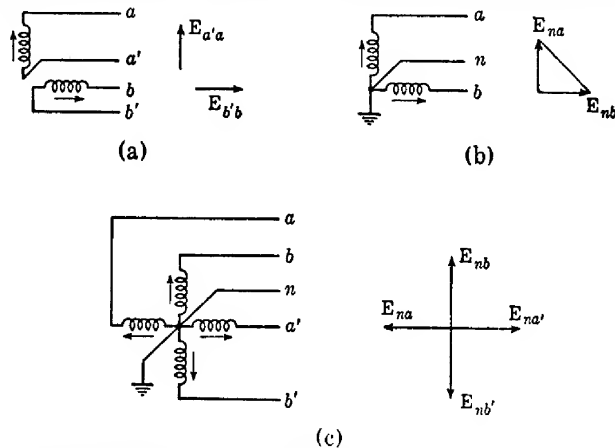


FIG. 7. Tres montajes corrientes de sistemas bifásicos; a), de 4 hilos; b), de 3 hilos; c), de 5 hilos. El montaje c) de 5 hilos puede también considerarse como sistema tetrafásico conectado en estrella.

de sistemas bifásicos en los que las bobinas representan devanados de generador o transformador cuyas fuerzas electromotrices inducidas (elevaciones de potencial) en los sentidos de las flechas están defasadas 90° . En el sistema bifásico de cuatro hilos de la figura 7a, los circuitos de las dos fases son independientes entre sí. Si se conectan los devanados por un extremo se obtiene el sistema de tres hilos de la figura 7b; y si se unen los devanados por sus puntos medios, como en la figura 7c, resulta un sistema de cinco hilos. El montaje de la figura 7c, puede describirse más precisamente como sistema tetrafásico pero, según se acostumbra a hacer, todos los sistemas de la figura 7 suelen considerarse como bifásicos.

Para cambiar la potencia trifásica en bifásica, se dispone de una gran cantidad de montajes de transformador, algunos de los cuales son adaptables a autotransformadores². Algunos de estos circuitos pueden montarse de manera que suministren, simultáneamente, potencia bifásica, trifásica y monofásica, en tres hilos. A continuación se describirán algunos montajes corrientes.

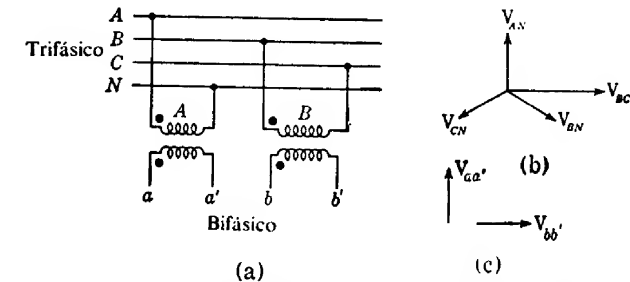


FIG. 8. Conexiones de transformadores para obtener potencia bifásica de un sistema trifásico de 4 hilos

3a. *Trifásico de cuatro hilos a bifásico.* Como la tensión V_{BC} entre línea y línea está en cuadratura con la tensión V_{AN} entre línea y neutro de un sistema trifásico equilibrado conectado en estrella, podrán obtenerse tensiones bifásicas de los secundarios de dos transformadores cuyos primarios se conecten en la forma indicada en la figura 8a. En este esquema, los secundarios son independientes entre sí, pero si se desea pueden conectarse para dar una salida bifásica de tres o de cinco hilos. En las figuras 8b y 8c, pueden verse los diagramas vectoriales de las tensiones de los primarios y de los secundarios, deduciéndose que la tensión del primario del transformador B, es $\sqrt{3}$ veces mayor que la del transformador A, para salida bifásica equilibrada. Los principales inconvenientes de este montaje son que se requiere un circuito trifásico de cuatro hilos y que las corrientes trifásicas están muy desequilibradas.

Se hallan en uso diversas variantes de este montaje. Por ejemplo, si la tensión entre línea y línea o la tensión entre línea y neutro es igual a la tensión bifásica buscada, puede suprimirse uno de los transformadores y sustituirse el otro por un autotransformador.

² Para una descripción de un gran número de estos montajes véase L. F. BLUME, editor *Transformer Engineering* (New York: John Wiley & Sons, 1938), 219-230 y 252-256; véase también, J. B. GIBBS, *Transformer Principles and Practice* (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1937), 82-86 y 92-98.

3b. *Conexión Scott.* El circuito de la figura 9a, es probablemente, el más empleado para la transformación de potencia de un sistema trifásico a uno bifásico. Fue ideado por F. C. SCOTT, y se conoce con el nombre de conexión Scott. Consiste en dos transformadores, como se indica en la figura 9a. El transformador *M* —lla-

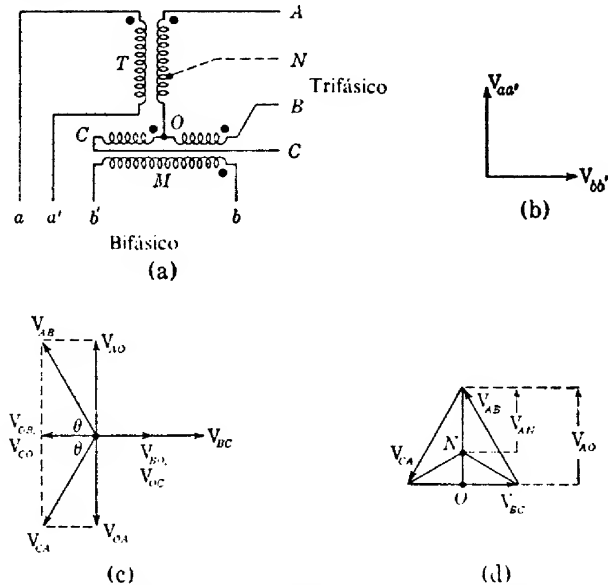


FIG. 9. Conexión Scott para la transformación de 3 a 2 fases y diagramas vectoriales de las tensiones

mado transformador «principal»— tiene un devanado único en su lado bifásico *bb'*, y un devanado con toma central *BOC* en su lado trifásico, mientras el transformador *T* —llamado «excitador»— tiene un solo devanado a cada lado. Según se verá en lo que sigue, los dos transformadores tienen razones de transformación diferentes.

Aun cuando el sentido usual de circulación de la potencia es del sistema trifásico al bifásico, es más sencillo explicar el funcionamiento del transformador suponiendo que los devanados bifásicos *aa'* y *bb'* son los primarios. Si se aplican a los devanados bifásicos tensiones bifásicas equilibradas $V_{aa'}$, y $V_{bb'}$, (Fig. 9b), y se desprecian las caídas de tensión en las impedancias de fuga, los vectores representativos de las tensiones en los tres devanados del lado trifásico son los indicados por V_{AO} , V_{BO} y V_{OC} en la figura 9c, donde los vectores representan caídas de potencial en los sentidos indicados por el orden de los subíndices. Según las marcas de polaridad, V_{AO} está en fase con $V_{aa'}$, y V_{BO} , V_{OC} están en fase con $V_{bb'}$, según se ve en la figura 9a. Obsérvese que en la figura 9a, las tensiones entre línea y línea del lado trifásico son:

$$V_{AB} = V_{AO} + V_{OB} \quad (1)$$

$$V_{BC} = V_{BO} + V_{OC} \quad (2)$$

$$V_{CA} = V_{CO} + V_{OA} \quad (3)$$

Por tanto, estos vectores tensión son como los indicados en la figura 9c. Si han de formar un sistema trifásico equilibrado, los ángulos θ de la figura 9c, deben ser de 60° y por tanto,

$$\frac{V_{AO}}{V_{AB}} = \sin 60^\circ = 0,866. \quad (4)$$

► En su lado trifásico, el transformador «excitador» *T* opera al 86,6 % de la tensión trifásica entre línea y línea. Por tanto, si los transformadores «principal» y «excitador» tienen iguales números de espiras en sus devanados bifásicos, el número de espiras del devanado trifásico *AO* deberá ser igual al producto de 0,866 por el número de espiras del devanado completo *BC* del transformador «principal». ◀

Del diagrama vectorial, que puede dibujarse como triángulo equilátero según se indica en la figura 9d, puede verse que la tensión V_{AO} del «excitador» está en fase con la tensión entre la fase *A* y el neutro de un sistema simétrico de tensiones en estrella, y por tanto se podrá obtener un neutro trifásico simétrico si en el devanado trifásico del transformador *T* se localiza un punto *N* de toma tal que las tensiones V_{AN} , V_{BN} , V_{CN} sean iguales. Como de la ecuación (4),

$$V_{AO} = \frac{\sqrt{3}}{2} V_{línea}, \quad (5)$$

y como para un sistema trifásico equilibrado,

$$V_{AN} = \frac{1}{\sqrt{3}} V_{línea}. \quad (6)$$

se tiene,

$$\frac{V_{AN}}{V_{AO}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}. \quad (7)$$

En consecuencia, si se practica una toma en un punto *N* del devanado trifásico del transformador «excitador» *T* tal que entre los puntos *A* y *N* de la figura 9a, se hallen las dos terceras partes del número de espiras, el punto *N* es el neutro de un sistema trifásico equilibrado.

3c. *Conexión en T.* Si los lados de primario y de secundario se montan como en el lado trifásico de la conexión Scott, se transformará potencia trifásica en trifásica. Este montaje, llamado conexión en T, constituye un medio de transformar potencia trifásica con dos transformadores. Puede emplearse igualmente con autotransformadores que con transformadores que tengan separados los devanados primario y secundario. Al igual que en la conexión en triángulo abierto*, sus principales inconvenientes son que es asimétrica y que su factor de utilización es menor que el de un montaje simétrico. Aun cuando la conexión de T a T no cambia el número de fases, como hacen los demás montajes descritos en este capítulo, se estudiará ahora a causa de su semejanza con la conexión Scott.

* Véase el apartado 5 del capítulo XXI.

Cuando primario y secundario se conectan en T, las tensiones de primario y secundario del transformador «principal» son iguales a las tensiones trifásicas entre línea y línea de primario y secundario, mientras que las tensiones de primario y secundario del transformador «excitador» son iguales al producto de 0,866 por las tensiones de línea de primario y secundario (véase ec. 4). Este montaje se diferencia de la conexión Scott en que las razones de transformación de los dos transformadores han de ser iguales. Las corrientes que circulan por ambos transformadores son las corrientes de la línea trifásica. El transformador «excitador» puede tener las mismas intensidades y tensiones nominales que el transformador «principal», pero debería entonces funcionar al 86,6 % de su tensión nominal. Es preferible emplear un transformador «excitador» diseñado para funcionar al 86,6 % de la tensión trifásica de línea nominal, pero entonces no podrán intercambiarse los dos transformadores.

La expresión de la potencia aparente trifásica de una carga trifásica equilibrada es $\sqrt{3} V_{línea} I_{línea}$, y por tanto, si son V_2 e I_2 la tensión e intensidad nominales del transformador «principal», la potencia nominal trifásica del banco será $\sqrt{3} V_2 I_2$. El factor de utilización es la razón de la potencia nominal trifásica del banco a la suma de las potencias nominales de los transformadores*. Si el transformador «excitador» tuviera las mismas intensidad y tensión nominales que el transformador «principal», la suma de las potencias nominales de los transformadores sería $2 V_2 I_2$ y el factor de utilización sería:

$$\frac{\sqrt{3} V_2 I_2}{2 V_2 I_2} = 0,866. \quad (8)$$

que es igual al factor de utilización de un banco en triángulo abierto. No obstante, si se diseña el transformador «excitador» para funcionar al 86,6 % de la tensión trifásica de línea, el factor de utilización se mejora algo, y es:

$$\frac{\sqrt{3} V_2 I_2}{V_2 I_2 + 0,866 V_2 I_2} = \frac{\sqrt{3}}{1 + 0,866} = 0,928. \quad (9)$$

La conexión T a T no se emplea muy frecuentemente porque, si son intercambiables los transformadores, no tiene ventaja alguna sobre el montaje en triángulo abierto.

4. RESUMEN

Aun cuando en este capítulo sólo se han descrito unos pocos de los numerosos montajes de transformadores existentes para la transformación de fases, se han citado suficientes ejemplos para presentar los principios generales. Los principales puntos que se han puesto de manifiesto en el estudio anterior pueden resumirse de la manera siguiente:

Combinando dos sistemas trifásicos de polaridades opuestas puede obtenerse un sistema hexafásico de tensiones.

* Véase la ecuación 32 del capítulo XXI.

Combinando las tensiones de los secundarios de dos transformadores cuyas tensiones de primarios estén defasadas, puede obtenerse una tensión que tenga cualquier magnitud y ángulo de fase. Así, es posible transformar potencia polifásica de un número cualquiera de fases en potencia polifásica de cualquier otro número de fases empleando un banco de transformadores que tenga un número suficiente de secundarios interconectados. Las conexiones en doble y cuádruple zigzag de las figuras 5 y 6, son ejemplos de dichos montajes.

La transformación de trifásica en bifásica puede realizarse aprovechando el hecho de que la tensión V_{AN} entre línea y neutro de un sistema trifásico equilibrado está en cuadratura con la tensión V_{BC} entre línea y línea (véase Fig. 8).

De un sistema trifásico pueden obtenerse dos tensiones en cuadratura de fase por medio de la conexión en T de la figura 9a. Así, pues, para la transformación de trifásica en bifásica puede utilizarse la conexión en T, como se hace en la conexión Scott de la figura 9.

Si se conectan en T los primarios y secundarios de un banco de dos transformadores, podrán transformarse tensiones trifásicas sin alterar el número de fases.

PROBLEMAS

1. Un convertidor sincrónico hexafásico requiere 1 000 kVA a 212 V. El convertidor está alimentado a través de un banco de transformadores monofásicos, por una línea de transmisión trifásica de 6 600 V. ¿Cuáles deben ser las tensiones e intensidades nominales de los transformadores para cada una de las conexiones siguientes?

- Triángulo a doble triángulo,
- triángulo a doble estrella,
- triángulo a diametral.

2. A una línea trifásica de tensiones equilibradas se conectan tres transformadores monofásicos iguales montados en triángulo. Los secundarios están montados en cuádruple zigzag para proporcionar un sistema dodecafásico. Si la tensión respecto al neutro del sistema dodecafásico debe ser de 2 400 V, ¿cuál debe ser la tensión nominal de cada secundario?

3. Tres transformadores iguales, cada uno de 2 300 : 424 V, 60 Hz y 100 kVA, se conectan con sus primarios en triángulo a una línea trifásica con tensiones equilibradas entre línea y línea de 2 300 V. El secundario de cada transformador tiene una toma central y se conectan los secundarios de manera que den un sistema hexafásico con 212 V entre terminales adyacentes de las líneas. Los datos en cortocircuito de uno de estos transformadores con el devanado de alta tensión excitado y uno de los terminales del secundario en cortocircuito con la toma central son: 104 V; 21,5 A; 375 W, 60 Hz.

Si entre un par de terminales hexafásicos adyacentes se conecta una carga monofásica inductiva de 470 A y factor de potencia 0,80, ¿cuál será la tensión aplicada por la fase cargada?

4. Tres transformadores monofásicos iguales de cuatro devanados para 60 Hz se montan conectando en triángulo sus primarios y en doble zigzag sus secundarios. Cuando se cortocircuitan los terminales de salida hexafásica, se precisa una tensión trifásica equilibrada del 5,2 % para hacer circular la corriente de intensidad nominal. En esta condición de cortocircuito el factor de potencia es 0,29.

El banco de transformadores debe alimentar a una carga hexafásica equilibrada* de 300 kVA con una tensión entre líneas adyacentes de 230 V. La tensión entre línea y línea de los primarios es de 2 300 V.

a) Suponiendo ideales los transformadores, hallar los valores nominales de tensión e intensidad para cada devanado.

b) Hallar para una carga inductiva de factor de potencia 0,90, qué tensiones equilibradas de los primarios hay que aplicar para mantener la tensión de salida a 230 V.

5. Demostrar que cuando se emplean dos transformadores montados en conexión Scott para transformar potencia trifásica en bifásica, una carga bifásica equilibrada haría circular por la línea trifásica corrientes equilibradas. Supóngase ideales los transformadores.

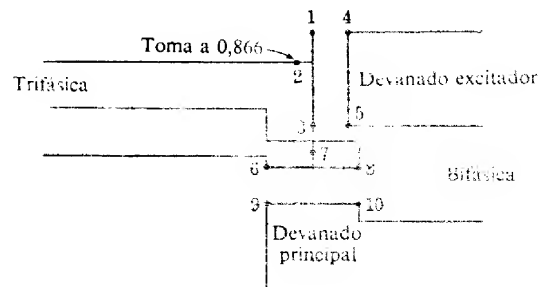


FIG. 10. Conexión Scott, problema 6

6. En la conexión Scott de la figura 10 deben emplearse dos transformadores monofásicos de 10 kVA, 2 400 : 240 V, 60 Hz. De ellos se obtuvieron los siguientes datos:

TRANSFORMADOR A

Conexión: Terminales 4 y 5 cortocircuitados, 2 y 3 excitados.

Datos: Potencia = 76,0 W; tensión = 57,8 V; intensidad = 4,16 A.

TRANSFORMADOR B

Conexión: Terminales 9 y 10 cortocircuitados; 6 y 8 excitados.

Datos: Potencia = 80,2 W; tensión = 60,3 V; intensidad = 4,16 A.

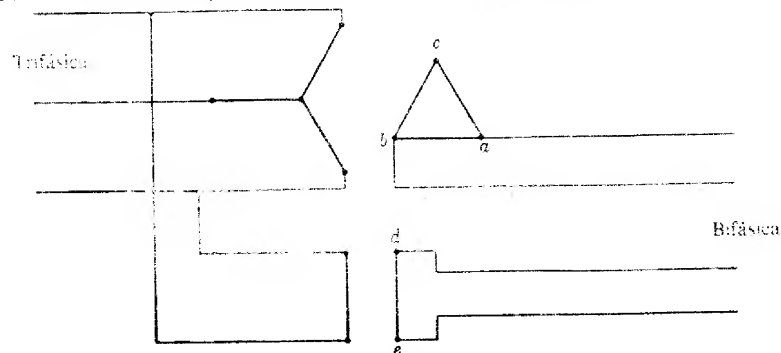


FIG. 11. Conexión trifásica a bifásica, problema 7

TRANSFORMADOR B

Conexión: Terminales 6 y 8 unidos; 6 y 7 excitados.

Datos: Potencia = 4,52 W; tensión = 4,80 V; intensidad = 4,16 A.

Si la tensión trifásica entre línea y línea se mantiene a 2 400 V, determinar el tanto por ciento de regulación de tensión para cada una de las siguientes condiciones de carga:

a) En los terminales 9 y 10, para una carga inductiva monofásica de 6 kVA a un factor de potencia 0,75 entre dichos terminales, estando en circuito abierto el secundario del transformador excitador.

b) En los terminales 4 y 5, para una carga inductiva monofásica de 6 kVA a un factor de potencia 0,75 entre dichos terminales, estando en circuito abierto el secundario del transformador principal.

c) En ambos pares de terminales de los secundarios si se aplican simultáneamente las cargas de las partes a) y b).

7. En la figura 11 puede verse un método para la transformación de trifásica en bifásica. Para esta conexión:

a) Especificar las razones de transformación que den tensiones bifásicas entre línea y línea iguales a las tensiones entre línea y línea del sistema trifásico. Demostrar que V_{ab} y V_{de} están en cuadratura.

b) Demostrar que una carga bifásica equilibrada haría circular por la línea trifásica corrientes equilibradas. Supónganse ideales los transformadores.

Funcionamiento de transformadores en paralelo

Los transformadores se dice que están conectados en paralelo cuando lo están sus devanados primarios por una parte y los secundarios por otra. Funcionan frecuentemente en paralelo en combinaciones monofásicas y también en grupos trifásicos, porque cuando una carga va en aumento, puede ser necesario incrementar la capacidad de potencia aparente del banco existente mediante la adición de nuevos transformadores en paralelo con él, o porque pueda convenir alimentar una carga importante mediante varios grupos de transformadores a fin de mantener la continuidad de servicio en el caso de avería de uno de los transformadores o de sus circuitos asociados.

El principal problema que se presenta referente al funcionamiento de transformadores en paralelo es la determinación de la manera en que se reparte la carga entre las distintas unidades. Los mejores resultados se obtienen cuando se divide la carga entre las unidades proporcionalmente a sus potencias nominales, y cuando la corriente que circula por el secundario de cada transformador está en concordancia de fase con la que circula por la carga. Si se divide la carga entre las unidades de otra manera, la capacidad del banco a plena carga es menor que la suma de las potencias nominales de las unidades.

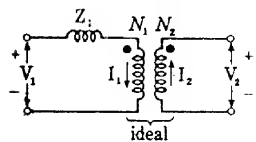


Fig. 1. Circuito equivalente de un transformador simple

1. FUNCIONAMIENTO EN PARALELO EN CIRCUITOS MONOFÁSICOS

En el análisis que sigue se desprecian las corrientes de excitación, por lo que el circuito equivalente de un transformador cualquiera será de la forma indicada en la figura 1. Así, pues, la relación vectorial entre las tensiones en terminales de primario y secundario será:

$$V_1 - I_1 Z_1 = a V_2, \quad (1)$$

donde,

V_1 y V_2 son los vectores representativos de las tensiones entre terminales.
 I_1 es el vector representativo de la corriente que circula por el primario del transformador,

Z_1 es la impedancia equivalente compleja referida al primario.

a es la razón N_1/N_2 de los números de espiras.

De otra manera, la ecuación de la tensión referida al secundario es:

$$\frac{V_1}{a} - I_1 Z_1 = V_2, \quad (2)$$

donde,

I_1 es el vector representativo de la corriente que circula por el secundario,
 Z_2 es la impedancia equivalente compleja referida al secundario.

Los sentidos positivos de las tensiones y corrientes son los indicados en la figura 1. Para estos sentidos positivos,

$$I_2 = a I_1 \quad (3)$$

cundo se desprecia la corriente de excitación.

Cuando funcionan en paralelo los transformadores, las tensiones entre terminales de todos los primarios son iguales, y análogamente ocurre con las tensiones entre terminales de los secundarios. La corriente total de los primarios que circula por el grupo es la suma vectorial de las corrientes que circulan por cada uno de los primarios, y la corriente total que circula por la carga es la suma vectorial de las distintas corrientes que circulan por los secundarios. Estos hechos, junto con las ecuaciones (1), (2) y (3) constituyen la base del análisis de todos los problemas referentes al funcionamiento de transformadores en paralelo.

Si no fueran iguales las razones de transformación de dos transformadores, las tensiones inducidas en los secundarios serían diferentes cuando los primarios estuvieran alimentados por un mismo generador y por tanto, si se conectan en paralelo sus secundarios, existirá una corriente circulante, incluso a carga nula. Como esto no es conveniente, los transformadores que funcionan en paralelo deberán tener razones de transformación iguales.

1a. *Razones de transformación iguales.* Cuando son iguales las razones de transformación de los transformadores en paralelo, sus tensiones entre terminales de primario son iguales, sus tensiones entre terminales de secundario referidas a los primarios también lo son, y por tanto, los vectores representativos de sus caídas de tensión en las impedancias equivalentes también deberán serlo. Es decir, de la ecuación 1, resulta

$$V_1 - a V_2 = I_1' Z_1' = I_1'' Z_1'' = I_1''' Z_1''' \dots, \quad (4)$$

donde los acentos indican a cada uno de los distintos transformadores. El circuito equivalente que representa a estas condiciones es el de la figura 2.

► Por tanto, cuando son iguales las razones de transformación, las corrientes que circulan por los transformadores en paralelo están relacionadas entre sí como las corrientes que circulan por impedancias conectadas en paralelo. ◀

► De la ecuación (4), se deduce que si los transformadores en paralelo deben repartirse la carga proporcionalmente a sus potencias nominales, sus caídas de tensión en las impedancias equivalentes, deberán ser iguales a plena carga. Es decir, los

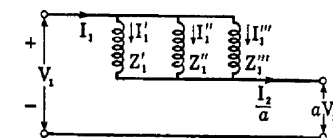


Fig. 2. Circuito equivalente para tres transformadores de igual razón de transformación, conectados en paralelo

transformadores deberán tener todos la misma impedancia equivalente *expresada en tanto por uno*. O sea, que puede decirse que los valores *óhmicos* de sus impedancias equivalentes deben ser inversamente proporcionales a sus potencias nominales. ◀

Además, para tener los mejores resultados, todos los transformadores deberían tener la misma razón de la reactancia equivalente a la resistencia equivalente. Los efectos de las desigualdades entre estas razones pueden verse examinando la figura 3, donde se muestra el diagrama vectorial de dos transformadores que funcionan en paralelo. Las impedancias equivalentes de ambos transformadores son de igual magnitud y por tanto, las corrientes I_1' e I_1'' que por ellos circulan tienen la misma intensidad. No obstante, las corrientes no estarán en fase a menos que sean iguales las razones de la reactancia equivalente a la resistencia equivalente de ambos transformadores. El ángulo entre las corrientes es:

$$\angle I_1' I_1'' = \arctg \frac{X_1'}{R_1'} - \arctg \frac{X_1''}{R_1''}. \quad (5)$$

Como las corrientes no están en concordancia de fase, la que circula por cada transformador tiene una intensidad mayor que la mitad de la intensidad de la corriente total, por lo que la potencia aparente de salida del par es inferior a la suma de las potencias aparentes de salida de los transformadores. Así, pues, la capacidad a plena carga de la combinación es menor que la suma de las potencias nominales de las unidades.

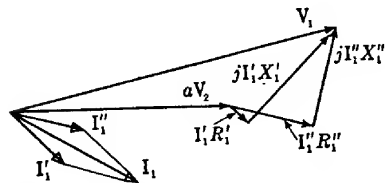


FIG. 3. Diagrama vectorial para dos transformadores en paralelo, pudiendo verse los efectos de la desigualdad de razones de reactancia equivalente a resistencia equivalente. Las caídas de tensión se han exagerado mucho

No obstante, el requisito de que sean iguales las razones de la reactancia a la resistencia equivalentes de los transformadores en paralelo tiene una importancia secundaria frente al requisito de que sean iguales las impedancias equivalentes al expresarlas en tanto por uno. Por ejemplo, consideremos dos transformadores que tengan impedancias equivalentes de igual magnitud pero que sus razones de reactancia a resistencia sean bien diferentes: 10 y 3. La diferencia entre los argumentos de estas impedancias es igual a la diferencia de fase entre las corrientes que circulan por los transformadores (ec. 5) y es:

$$\arctg 10 - \arctg 3 = 12,7^\circ \quad (6)$$

El cociente entre el módulo de la suma vectorial y la suma de las intensidades de las corrientes es:

$$\cos \frac{12,7^\circ}{2} = 0,994. \quad (7)$$

Así pues, las corrientes que circulan por los transformadores suelen estar tan aproximadamente en concordancia de fase que su suma vectorial es sustancialmente igual a su suma numérica.

▶ Por tanto, cuando se conectan en paralelo transformadores de igual razón de transformación, para determinar el reparto de la carga entre los transformadores suelen ser importantes los *módulos* de las impedancias equivalentes. Los argumentos de estas impedancias equivalentes suelen tener relativamente poca importancia, a menos que sea necesario conocer los valores complejos verdaderos de las corrientes que circulan por los transformadores. ◀

La división de la corriente entre un cierto número de ramas en paralelo se determina mejor en función de las admitancias, siendo la intensidad de la corriente que circula por cada rama directamente proporcional a la admitancia de la misma. Si es I_1 la intensidad total de la corriente suministrada a los transformadores por sus primarios, las intensidades de las corrientes que circulan por cada transformador son:

$$I_1' = \frac{Y_1'}{Y_1} I_1 \quad \text{▶(8)}$$

$$I_1'' = \frac{Y_1''}{Y_1} I_1 \quad \text{▶(9)}$$

$$I_1''' = \frac{Y_1'''}{Y_1} I_1 \quad \text{▶(10)}$$

.....

donde,

I_1 es la intensidad total,
 $I_1', I_1'', I_1''' \dots$, son las intensidades de las corrientes que circulan por cada uno de los transformadores,
 $Y_1', Y_1'', Y_1''' \dots$, son los recíprocos de sus impedancias equivalentes,
 Y_1 es la admitancia de la combinación en paralelo; es decir,

$$Y_1 = Y_1' + Y_1'' + Y_1''' \dots, \quad (11)$$

En un análisis exacto, las ecuaciones (8-11), deben interpretarse como relaciones vectoriales, pero si sólo se precisa conocer las intensidades de las corrientes, suele ser suficientemente preciso considerar las anteriores relaciones como algébricas.

Si no son iguales las caídas de tensión a plena carga en las impedancias equivalentes de los transformadores, éstos no se reparten la carga proporcionalmente a sus potencias nominales. Por ejemplo, consideremos un cierto número de transformadores conectados en paralelo. Sean $(IZ)_\#', (IZ)_\#'', (IZ)_\#''', \dots$, las magnitudes de las caídas de tensión en la impedancia equivalente de cada transformador a su intensidad nominal. Las caídas de tensión en las impedancias a plena carga pueden expresarse en volt, en tanto por ciento, o en tanto por uno. Ordenemos las caídas en orden creciente de magnitudes, siendo $(IZ)_\#'$ la menor. Sean $(kVA)', (kVA)'', (kVA)''', \dots$, las potencias nominales de los distintos transformadores. Cuando se conectan los transformadores en paralelo, sus caídas de tensión en la impedancia equivalente deben ser iguales. Cuando se incrementa la salida de la combinación paralelo, la caída de tensión en la impedancia equivalente de cada transformador

aumenta proporcionalmente y por último se hace igual a la tensión $(IZ)'_R$ en la impedancia equivalente del primer transformador a plena carga. En tal caso, el primer transformador suministra su potencia nominal de salida $(kVA)'$. Como la potencia de salida de un transformador y su caída de tensión en la impedancia equivalente son directamente proporcionales, la potencia de salida del segundo transformador es:

$$\frac{(IZ)'_R}{(IZ)''_R} (kVA)'.$$

La potencia total de salida $(kVA)_L$ del grupo es sustancialmente igual a la suma numérica de las distintas salidas y es:

$$(kVA)_L = (kVA)' + \frac{(IZ)'_R}{(IZ)''_R} (kVA)'' + \frac{(IZ)'_R}{(IZ)'''_R} (kVA)''' + \dots \quad (12)$$

Si se eleva la potencia total de salida más allá de este valor, aumenta la tensión en la impedancia equivalente común y la potencia de salida del primer transformador supera a su potencia nominal. Así pues, el valor $(kVA)_L$ de la ecuación (12), es la máxima carga que se puede suministrar por los transformadores sin sobrecargar el transformador cuya tensión en la impedancia equivalente es la más baja. Puede ocurrir que se alimente una carga de salida mayor suprimiendo del circuito este transformador.

Los transformadores pueden ajustarse de manera que se repartan la carga adecuadamente añadiendo impedancias en serie con los transformadores que tengan menor impedancia expresada en tanto por uno. Teóricamente, es necesario ajustar tanto la resistencia añadida como la reactancia de manera que la caída de tensión en la impedancia equivalente de cada transformador, sus conductores terminales y su impedancia añadida, sea vectorialmente la misma cuando cada transformador tenga su valor nominal. Sin embargo, los argumentos de las impedancias son, corrientemente, poco importantes y todo cuanto se necesita es una bobina de reacción adecuadamente ajustada. En el caso de transformadores de baja tensión y gran intensidad de corriente, suele tenerse una reactancia suficiente si uno de los conductores de baja tensión se halla rodeado simplemente de un núcleo de hierro adecuadamente laminado.

También puede lograrse una división adecuada de la carga entre dos transformadores utilizando un pequeño autotransformador conectado en la forma indicada en la figura 4. La corriente en la carga I_L está obligada a dividirse entre los dos devanados del autotransformador de manera que sea nula la fuerza magnetomotriz total que actúa sobre su núcleo. Por tanto, las componentes I'_L e I''_L de la corriente de carga son inversamente proporcionales a los números de espiras de los dos devanados del autotransformador y el ajuste de estos números de espiras dividirá adecuadamente a la corriente de carga. Además de las componentes de carga I'_L e I''_L , por el autotransformador circula una débil corriente de excitación e imana su núcleo de manera que las tensiones del autotransformador se sumen a la tensión de salida del transformador principal cuya tensión de secundario tiende a ser menor, y se resta de la tensión de salida del otro transformador principal.

1b. *Razones de transformación desiguales.* Aun cuando los transformadores conectados en paralelo deban tener idealmente la misma razón de transformación, a veces deben funcionar en paralelo transformadores de razones de transformación diferentes, como por ejemplo durante una emergencia, o cuando transformadores dotados de cambiadores de tomas funcionan sobre tomas diferentes.

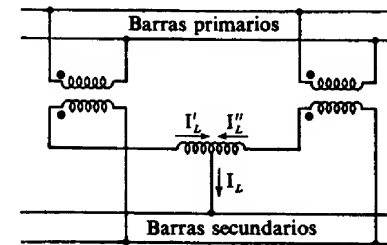


FIG. 4. Circuito que utiliza un autotransformador para obtener una división de carga adecuada entre dos transformadores que funcionen en paralelo

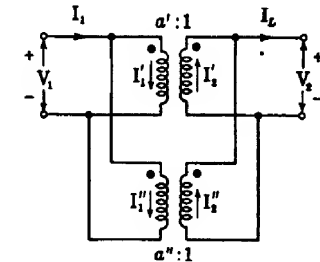


FIG. 5. Dos transformadores de razones de transformación diferentes, funcionando en paralelo

Consideremos dos transformadores que tengan razones de transformación desiguales y estén conectados en paralelo, como indica la figura 5. Cuando se refieren a los lados de secundario las corrientes, tensiones e impedancias, las ecuaciones vectoriales de las tensiones para los dos transformadores son:

$$\frac{V_1}{a'} - I'_2 Z'_2 = V_2 \quad (13)$$

$$\frac{V_1}{a''} - I''_2 Z''_2 = V_2; \quad (14)$$

de donde,

$$\frac{V_1}{a'} - I'_2 Z'_2 = \frac{V_1}{a''} - I''_2 Z''_2, \quad (15)$$

donde,

I'_2, I''_2 son los vectores representativos de las corrientes de los secundarios, Z'_2, Z''_2 son las impedancias equivalentes complejas referidas a los lados de los secundarios.

a', a'' son las razones de transformación N_1/N_2 .

► Obsérvese que las caídas de tensión en la impedancia equivalente no son iguales, como lo serían si lo fueran las razones de transformación, y por tanto la corriente total no se divide entre los transformadores como si se tratara de impedancias en paralelo. ◀

La división de la corriente entre los transformadores puede determinarse de la manera siguiente: de la ecuación 15 resulta,

$$I_2' Z_2' = I_2'' Z_2'' + \frac{V_1}{a'} - \frac{V_1}{a''}. \quad (16)$$

Si sumamos $I_2' Z_2''$ a los dos miembros de la ecuación (16),

$$I_2'(Z_2' + Z_2'') = (I_2' + I_2'') Z_2'' + \frac{V_1}{a'} - \frac{V_1}{a''}. \quad (17)$$

En esta ecuación, $I_2' + I_2''$ es la intensidad de la corriente total suministrada a la carga y por tanto la expresión de la corriente I_2' del secundario en el primer transformador en función de la corriente total I_L suministrada a la carga es:

$$I_2' = \frac{I_L Z_2''}{Z_2' + Z_2''} + \frac{V_1}{a'} - \frac{V_1}{a''}. \quad (18)$$

La expresión de la corriente I_2'' del secundario del otro transformador puede escribirse intercambiando las primas por las segundas; así,

$$I_2'' = \frac{I_L Z_2'}{Z_2' + Z_2''} + \frac{V_1}{a''} - \frac{V_1}{a'}. \quad (19)$$

De las ecuaciones (18) y (19) resulta que las intensidades de las corrientes que circulan por los transformadores pueden expresarse en la forma,

$$I_2 = I_L' + I_L'' \quad (20)$$

$$I_2' = I_L' + I_{nl}', \quad (21)$$

de donde,

$$I_L' = \frac{I_L Z_2''}{Z_2' + Z_2''} \quad (22)$$

$$I_L'' = \frac{I_L Z_2'}{Z_2' + Z_2''} \quad (23)$$

$$I_{nl}' = \frac{V_1}{a'} - \frac{V_1}{a''} \quad (24)$$

$$I_{nl}'' = \frac{V_1}{a''} - \frac{V_1}{a'}. \quad (25)$$

En estas expresiones, cada corriente de secundario es la suma de dos componentes. Las primeras componentes I_L' e I_L'' son inversamente proporcionales a las impedancias equivalentes de los transformadores y son iguales a las intensidades de las corrientes de secundario que circularían si fueran iguales las razones de transformación de ambos transformadores. Las segundas componentes I_{nl}' e I_{nl}'' son independientes de la corriente de carga I_L y dependen de la desigualdad entre las razones de transformación. Estas son las intensidades de las corrientes que circularían por los secundarios incluso en el caso de que el banco no alimentara carga alguna. Como

$$I_{nl}' = -I_{nl}'' \quad (26)$$

esta corriente en vacío no hace más que circular por los dos secundarios en serie. Debido a que la impedancia que se opone a esta corriente circulante es la relativamente pequeña de la combinación serie de las impedancias equivalentes de los dos transformadores, una desigualdad relativamente pequeña de las dos razones de transformación puede originar una corriente circulante relativamente intensa. Generalmente, se considera poco conveniente hacer funcionar en paralelo transformadores

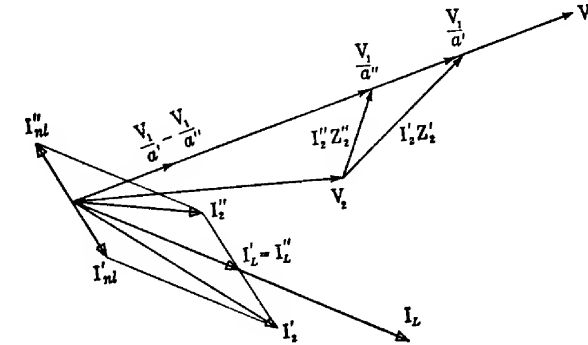


Fig. 6. Diagrama vectorial para dos transformadores en paralelo cuyas impedancias equivalentes son iguales en todo, pero cuyas razones de transformación son diferentes

cundo la corriente circulante en uno u otro supere el diez por ciento de su intensidad nominal; en consecuencia, las razones de transformación deben ser muy aproximadamente iguales.

En la figura 6 puede verse el diagrama vectorial correspondiente a dos transformadores en paralelo cuyas impedancias equivalentes óhmicas son vectorialmente iguales, pero cuyas razones de transformación son diferentes. Cuando las impedancias equivalentes son vectorialmente iguales, las componentes de carga I_L' e I_L'' son iguales cada una de ellas a la mitad de la corriente total de carga I_L y se hallan en fase con ella, según puede verse en la figura 6. Si las razones de transformación fueran iguales, I_L' e I_L'' serían las intensidades de las corrientes que circulan por los secundarios de los transformadores. Las corrientes circulantes debidas a razones desiguales son I_{nl}' e I_{nl}'' , y sus ángulos de fase dependen del argumento de la com-

binación serie de las impedancias equivalentes: así, pues, I'_m está retrasada respecto a la diferencia de potencial $(V_1/a') - (V_1/a'')$ en un ángulo igual al argumento de la impedancia, según puede verse en la figura 6. Según las ecuaciones (20) y (21), las intensidades verdaderas de las corrientes que circulan por los secundarios son I'_2 e I'_2' . El examen de la figura 6 indica que los efectos de las corrientes circulantes dependen del factor de potencia de la carga y son mayores para factores de potencia de retraso que para factores de potencia próximos a la unidad.

2. FUNCIONAMIENTO DE GRUPOS TRIFÁSICOS EN PARALELO

Los grupos trifásicos de transformadores pueden funcionar en paralelo en los dos lados de primario y secundario con tal que tengan la misma razón de tensiones entre línea y línea de primario a secundario, y con tal que las correspondientes tensiones de línea de secundario de los grupos se hallen en concordancia de fase cuando se conecten los grupos en paralelo por la parte de sus primarios solamente. Así pues, grupos triángulo-triángulo podrán funcionar en paralelo con otros grupos triángulo-triángulo o con grupos estrella-estrella.

► No obstante, un grupo triángulo-triángulo o estrella-estrella no podrá conectarse en paralelo con un grupo triángulo-estrella o estrella-triángulo, ya que éstos dan un desfase mínimo de 30° entre las tensiones de línea de los primarios y los secundarios * ◀

2a. *Montajes simétricos en circuitos equilibrados.* En el estudio que sigue se supondrá que los transformadores de cualquier grupo trifásico son iguales, pero que los transformadores de un grupo pueden ser diferentes de los transformadores de otro grupo conectado en paralelo. También se supone que las corrientes y tensiones trifásicas de los circuitos conectados a los transformadores están equilibradas.

Consideremos dos grupos de transformadores conectados en paralelo tanto por el lado de los primarios como por el de los secundarios. Supongamos que las conexiones de los dos grupos son las mismas. Si se conectan en triángulo los primarios de los dos grupos, cada transformador estará conectado entre un par de terminales de línea y por tanto los devanados de los dos transformadores conectados a fases correspondientes, están en paralelo. Análogamente, si se conectan en triángulo los secundarios, estarán en paralelo los conectados a fases correspondientes. Si se conectan en estrella los primarios, las tensiones respecto al neutro de las fases correspondientes de los dos grupos son iguales vectorialmente, ya que se suponen condiciones de equilibrio, y por tanto los neutros de las dos estrellas estarán a un mismo potencial. En consecuencia, los neutros de las dos estrellas pueden considerarse interconectados aun cuando no se hallen realmente conectados el uno al otro. Cuando están conectados los puntos neutros, los primarios de los dos transformadores conectados a fases correspondientes están en paralelo. Análogamente, si se conectan en estrella los secundarios, los puntos neutros de los secundarios puede considerarse que están conectados cuando está equilibrado el circuito y por tanto, los secundarios de los dos transformadores conectados a las fases correspondientes están en paralelo.

* Véase el apartado 4 del capítulo XXI.

Por tanto, cuando funcionan en paralelo en primario y secundario, grupos trifásicos simétricos de transformadores conectados análogamente, cada transformador se halla en paralelo con los transformadores correspondientes de los demás grupos. En consecuencia, la corriente total de una fase cualquiera se divide entre los transformadores de dicha fase de igual manera que si se tratara de un circuito monofásico.

► Así, pues, para condiciones de equilibrio, el comportamiento de grupos trifásicos simétricos en paralelo puede determinarse por análisis de una fase cualquiera como en un problema monofásico. Para lograr los mejores resultados en su funcionamiento, los transformadores deberán tener razones de transformación iguales y sus impedancias equivalentes expresadas en tanto por uno deberán ser iguales vectorialmente. ◀

2b. *Grupos triángulo-triángulo asimétricos.* En el caso de que sea necesario quitar uno o más transformadores de un cierto número de grupos triángulo-triángulo en paralelo, la división de corriente entre los transformadores restantes puede determinarse en la forma que se indica en el ejemplo siguiente. Supongamos que se quita un transformador de tres grupos en paralelo de transformadores iguales cada uno de los cuales tiene una impedancia equivalente Z referida a su lado de secundario. La impedancia equivalente resultante de un lado del triángulo es $Z/2$, y la de cada uno de los otros dos lados es $Z/3$. Las corrientes de carga se dividen entre las tres ramas del triángulo como lo harían entre tres transformadores conectados en triángulo-triángulo que tuvieran por impedancias equivalentes $Z/2$, $Z/3$, $Z/3$.

En la ecuación (37) del capítulo XXIV se ve que en un grupo triángulo-triángulo desequilibrado, la relación entre la corriente I_{ba} que circula por una rama del triángulo y las corrientes I_b e I_a que circulan por las líneas conectadas a dicha rama es:

$$I_{ba} = \frac{I_a Z_{ca} - I_b Z_{bc}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}}, \quad (27)$$

donde Z_{ab} , Z_{bc} , Z_{ca} son las impedancias equivalentes. Si es ab la rama que contiene dos transformadores,

$$Z_{ab} = \frac{Z}{2} \quad (28)$$

$$Z_{bc} = Z_{ca} = \frac{Z}{3}; \quad (29)$$

de donde,

$$\begin{aligned} I_{ba} &= \frac{(I_a - I_b) \frac{Z}{3}}{\frac{Z}{2} + \frac{Z}{3} + \frac{Z}{3}} \\ &= \frac{2}{7} (I_a - I_b). \end{aligned} \quad (30)$$

Si están equilibradas las corrientes trifásicas de línea I_a e I_b y es abc el orden de fases, de un diagrama vectorial de las corrientes de línea puede verse que:

$$I_a - I_b = \sqrt{3} I_a / 30^\circ. \quad (31)$$

Por tanto, de la ecuación (30), resulta:

$$I_{ba} = \frac{2\sqrt{3}}{7} I_a / 30^\circ. \quad (32)$$

Así, pues, la relación entre la intensidad eficaz $I_{línea}$ de las corrientes de línea y la intensidad eficaz de la corriente que circula por la fase ba del triángulo es:

$$I_{línea} = \frac{7}{2\sqrt{3}} I_{ba}. \quad (33)$$

Si es I_2 la intensidad nominal a plena carga de la corriente que circula por el secundario de cada transformador, la intensidad a plena carga de I_{ba} será $2I_2$, ya que esta fase comprende dos transformadores en paralelo. En consecuencia, la máxima intensidad de la corriente de línea que puede suministrarse sin sobrecargar los dos transformadores de la fase ba es:

$$I_{línea} = \frac{7}{2\sqrt{3}} \times 2I_2 = \frac{7}{\sqrt{3}} I_2. \quad (34)$$

Los voltampere de esta carga máxima equilibrada son:

$$\sqrt{3} V_{línea} I_{línea} = 7 V_2 I_2, \quad (35)$$

donde $V_{línea}$ es la tensión de línea y es igual a la tensión V_2 del secundario de los transformadores. Por tanto, para una carga equilibrada, la potencia de salida máxima de seguridad de los ocho transformadores es siete veces mayor que la potencia nominal de un transformador, o sea, que el factor de utilización¹ de este montaje asimétrico particular es 7/8.

PROBLEMAS

1. Se han tomado los siguientes datos de dos transformadores monofásicos de 11 000 : 2 300 V, 60 Hz:

Transformador	Potencia nominal	Datos en cortocircuito		
		Tensión	Intensidad	Potencia
A	100 kVA	265 V	9,1 A	1 000 W
B	500	345	45,5	3 370

¹ Para un estudio más amplio de los montajes asimétricos triángulo-triángulo, véase L. F. BLUME, editor, *Transformer Engineering* (New York: John Wiley & Sons, 1938), 172-177.

Si funcionan en paralelo esos transformadores para alimentar una carga inductiva a un factor de potencia de 0,80 desde un circuito de 11 000 V, 60 Hz:

a) ¿Cuál es la carga máxima en kilowatt que pueden alimentar sin que las tensiones de los secundarios caigan por debajo de 2 250 V?

b) A esta carga total, ¿qué potencia aparente (en kVA) suministra cada transformador?

2. Dos transformadores de 500 kVA, 11 000 : 2 200 V, 25 Hz dan los siguientes datos cuando funcionan a su intensidad nominal con sus secundarios cortocircuitados:

Transformador	Tensión	Potencia
A	265 V	3 300 W
B	945	3 980

Si funcionan en paralelo estos dos transformadores y se ajusta la tensión de primario de manera que se mantenga a 2 200 V la tensión de secundario,

a) ¿Cuál es la carga máxima a factor de potencia unidad que puede aplicarse a los dos transformadores en paralelo sin sobrecargar ninguno de ellos?

b) En las condiciones de a) ¿cuál es la tensión de primario?

3. Los valores nominales y datos en cortocircuito de un grupo de transformadores monofásicos son los siguientes:

Transformador	Potencia nominal	Tensión	Datos en cortocircuito		
			Tensión	Intensidad	Potencia
A	100 kVA	2 300 : 230 V	119 V	45,0 A	1 000 W
B	100	2 300 : 230	154	40,0	1 300
C	200	2 300 : 230	106	80,0	1 580
D	300	2 300 : 230	132	125,0	3 100

a) ¿Qué par de estos transformadores funcionan mejor en paralelo?

b) Si la carga a alimentar a 230 V fuera de 400 kVA a un factor de potencia unidad y se dispusiera de todos los transformadores antes citados para ser utilizados formando un banco de transformadores en paralelo que alimentara la carga, ¿qué transformadores serían recomendables? ¿Por qué? ¿Qué datos adicionales se necesitarían para determinar por completo la elección?

4. Dos bancos iguales de transformadores, conectados en V cada uno de ellos, se conectan en paralelo en los lados de alta y de baja tensión, pero con los lados abiertos de las V situados entre fases diferentes de una alimentación trifásica equilibrada. ¿Cuál es la máxima potencia trifásica de salida equilibrada que puede tomarse de los dos bancos de transformadores comparada con la salida que uno u otro pueden dar por sí solos?

5. Demostrar que es posible poner en paralelo un banco de transformadores conectados en triángulo-estrella con otro banco estrella-triángulo y lograr un funcionamiento satisfactorio. Indicar cómo deben relacionarse las razones de transformación y las constantes.

6. Dos bancos triángulo triángulo de transformadores monofásicos se conectan en paralelo para alimentar una carga equilibrada consistente en tres resistencias no inductivas conectadas en estrella a los terminales de baja tensión del sistema. Cada resistencia es de 0,088 ohm. Los valores nominales de cada uno de los seis transformadores monofásicos son 100 kVA, 11 500 : 230 V, y 60 Hz.

Los transformadores de cada banco pueden considerarse exactamente iguales, con impedancias en cortocircuito dadas por los siguientes datos:

Banco	Tensión	Intensidad	Potencia
A	300 V	8,7 A	1,2 kW
B	450	8,7	1,1

Si a los primarios se aplican tensiones trifásicas equilibradas de valor igual al nominal:

- ¿Cuáles son las intensidades de las corrientes que circulan por la carga?
- ¿Cuáles son las intensidades de las corrientes de los primarios que circulan por cada banco de transformadores?

7. Dos cargas trifásicas equilibradas se alimentan de una línea de transmisión de alta tensión a través de un banco estrella-triángulo-triángulo de tres transformadores monofásicos de tres circuitos. A cada uno de dichos transformadores pueden aplicarse los siguientes datos:

VALORES NOMINALES

Devanado	Capacidad	Tensión
1	10 000 kVA	63 500 V
2	5 000	6 600
3	7 500	13 200

DATOS EN CORTOCIRCUITO

Devanados	Impedancia sobre una base de 10 000 kVA a la tensión nominal
1-2	11 %
2-3	10
3-1	13

El pico de carga suministrado por los secundarios de 6 600 V es de 4 000 kVA por fase a un factor de potencia inductivo de 0,80 y el pico de carga suministrado por los terciarios de 13 200 V es de 7 000 kVA al factor de potencia unidad.

Se espera que la demanda de carga sobre el circuito de 6 600 V aumente a 6 000 kVA por fase a un factor de potencia inductivo de 0,80 y se decide instalar un banco estrella-triángulo de transformadores monofásicos de dos devanados, en paralelo con los primarios y secundarios del transformador de tres devanados.

¿Cuáles deberán ser las potencias nominales de los transformadores del banco auxiliar, y cuáles deberán ser sus impedancias equivalentes en tanto por ciento?

Valores nominales preferidos para transformadores de potencia y de distribución

Las tablas I, II y III presentan listas de valores nominales preferidos para transformadores de potencia. Representan las normas americanas recopiladas por el American Institute of Electrical Engineers, la National Electrical Manufacturers Association, el Electric Light and Power Group y la Association of American Railroads, bajo el patrocinio de la American Standards Association¹.

En las tablas II y III aparece la expresión *tensión nominal del circuito*. A fin de fijar un valor utilizable en el diseño y ensayo de aparatos eléctricos, se define la tensión nominal del circuito como la tensión nominal más elevada de los aparatos que lo alimentan. Se espera que la tensión de funcionamiento de los aparatos conectados a un circuito de una clase determinada no supere normalmente a la tensión nominal del circuito recomendada para dicha clase.

En las tablas II y III aparecen en las columnas de tensiones valores nominales correspondientes a montajes en estrella, los cuales se distinguen por llevar añadida una Y que es la letra que más se asemeja a una estrella de tres puntas. Así, por ejemplo, 2 400/4 160 Y. Esto indica que el devanado que tiene dicho valor nominal es adecuado para ser utilizado en una fase de un transformador o banco conectado en estrella que tenga entre línea y línea la tensión indicada por el valor nominal en Y; en dicho transformador, el devanado está aislado para la tensión Y. Así, pues, una tensión nominal 2 400/4 160-Y supone una tensión normal de 2 400 V en el devanado, pero éste y los pasatapas deben estar aislados para 4 160 V.

TABLA I

POTENCIAS NOMINALES, EN KVA, PREFERIDAS PARA TRANSFORMADORES MONOFÁSICOS Y TRIFÁSICOS

Monofásicos				Trifásicos			
1,5	75	833	6 667	10	200	2 000	12 000
3	100	1 000	8 333	15	300	2 500	15 000
5	150	1 250	10 000	25	450	3 000	20 000
7,5	200	1 667	12 500	37,5	600	3 750	25 000
10	250	2 000	16 667	50	750	5 000	30 000
15	333	2 500	20 000	75	1 000	6 000	37 500
25	500	3 333	25 000	100	1 200	7 500	50 000
37,5	667	4 000	33 333	150	1 500	10 000
50	5 000

¹ «American Engineering and Industrial Standards», núm. C57: *Proposed American Standards; Transformers, Regulators, and Reactors* (New York: American Standards Association, 1940).

TABLA II
VALORES NOMINALES PREFERIDOS PARA TRANSFORMADORES MONOFÁSICOS
DE NO MÁS DE 500 kVA

Empleados principalmente para rebajar la tensión desde la de una línea de transmisión o tensión de distribución
a la tensión de utilización

Tensión nominal del circuito, V	Potencia nominal máxima y mínima, kVA	Alta tensión			Baja tensión		
		Tensión nominal	Tomas potencia nominal	Toma potencia reducida	Tensión nominal	Tensión nominal	Tensión nominal
480	1,5-100	480	456	432	120/240	120/240	120/240
600	1,5-100	600	570	540	120/240	120/240	120/240
2 400 y	1,5- 50	2 400/ 4 160 Y	2 280	2 160	120/240	120/240	120/240
4 160	75-500	2 400/ 4 160 Y	2 280	2 160	120/240	120/240	120/240
4 800	1,5-100	2 400/ 4 800	2 280	2 160	120/240	120/240	120/240
	150-500	2 400/ 4 800	2 280	2 160	120/240	120/240	120/240
7 200 y	1,5-500	7 200/12 470 Y	6 875	6 545	120/240	120/240	120/240
12 000	5-500	7 200/12 470 Y	6 840	6 480	120/240	120/240	120/240
	3-500	12 000	11 400	10 800	120/240	120/240	120/240
	5-500	12 000	11 400	10 800	120/240	120/240	120/240
13 800	1,5-500	7 620/13 200 Y	7 240	6 860	120/240	120/240	120/240
	5-500	7 620/13 200 Y	7 240	6 860	120/240	120/240	120/240
	3-500	13 200	12 540	11 880	120/240	120/240	120/240
	5-500	13 200	12 540	11 880	120/240	120/240	120/240
23 000	9-500	22 000	20 900	19 800	120/240	120/240	120/240
	10-500	12 700/22 000 Y	12 070	11 430	120/240	120/240	120/240
34 500	15-500	33 000	31 350	29 700	120/240	120/240	120/240
	15-500	19 050/33 000 Y	18 100	17 150	120/240	120/240	120/240
46 000	25-500	44 000	41 800	39 600	120/240	120/240	120/240
	25-500	25 500/44 000 Y	24 140	22 860	120/240	120/240	120/240
69 000	50-500	66 000	62 700	59 400	120/240	120/240	120/240
	50-500	38 100/66 000 Y	36 200	34 290	120/240	120/240	120/240

TABLA III
VALORES NOMINALES PREFERIDOS PARA TRANSFORMADORES TRIFÁSICOS DE NO MÁS DE 450 kVA
Empleados principalmente para rebajar la tensión desde la de una línea de transmisión o tensión de distribución
a la tensión de utilización

Tensión nominal del circuito, V	Potencia nominal máxima y mínima, kVA	Alta tensión			Baja tensión		
		Tensión nominal	Tomas potencia nominal	Toma potencia reducida	Tensión nominal	Tensión nominal	Tensión nominal
2 400 y	10-150	2 400/4 160 Y	2 280	2 160	240/480	240/480	240/480
4 160	200-450	2 400/4 160 Y	2 280	2 160	240/480	240/480	240/480
4 800	10-450	4 800 Y	4 560	4 320	240/480	240/480	240/480
7 200	10-450	7 200 Y	6 840	6 480	240/480	240/480	240/480
	10-450	7 200 Y	6 840	6 480	240/480	240/480	240/480
	10-450	7 200 Δ	6 840	6 480	240/480	240/480	240/480
12 000	10-450	12 000	11 400	10 800	240/480	240/480	240/480
	10-450	12 000	11 400	10 800	240/480	240/480	240/480
	10-450	12 000	11 400	10 800	240/480	240/480	240/480
13 800	15-450	13 200 Y	12 540	11 880	240/480	240/480	240/480
	15-450	13 200 Δ	12 540	11 880	240/480	240/480	240/480
23 000	25-450	22 000 Y	20 900	19 800	240/480	240/480	240/480
	25-450	22 000 Δ	20 900	19 800	240/480	240/480	240/480
34 500	50-450	33 000 Y	31 350	29 700	240/480	240/480	240/480
	50-450	33 000 Δ	31 350	29 700	240/480	240/480	240/480
46 000	50-450	44 000 Y	41 800	39 600	240/480	240/480	240/480
	50-450	44 000 Δ	41 800	39 600	240/480	240/480	240/480
69 000	150-450	66 000 Y	62 700	59 400	240/480	240/480	240/480
	150-450	66 000 Δ	62 700	59 400	240/480	240/480	240/480

Marcas normalizadas para los terminales de los transformadores de potencia y distribución

Cuando se conectan en paralelo o formando grupos polifásicos los devanados de los transformadores, las conexiones deben realizarse con las polaridades relativas correctas. A fin de simplificar la realización de estas conexiones, la American Standard Association ha adoptado ciertas marcas normalizadas para los terminales¹ con las que deben familiarizarse cuantos utilicen transformadores de potencia y de distribución.

En la figura 1 pueden verse las marcas normalizadas para transformadores de potencia y de distribución de dos devanados. Los terminales de alta tensión están rotulados H_1 , H_2 y los de baja X_1 , X_2 , donde H_1 y X_1 son terminales para los cuales las polaridades de las tensiones inducidas por el flujo resultante en el núcleo son las mismas; es decir, si se desprecian las caídas de tensión en la impedancia de fuga, el terminal H_1 es positivo respecto al H_2 durante el intervalo de tiempo que el terminal X_1 es positivo respecto al X_2 . Por ejemplo, recorriendo los devanados de la figura 1 desde sus terminales de la izquierda hasta los de la derecha, ambos devanados rodean al núcleo en el mismo sentido; luego las tensiones inducidas por el flujo resultante en el núcleo están en concordancia de fase en los sentidos señalados por los signos más y menos en la figura 1. Los terminales de la izquierda son, pues, de igual polaridad relativa, según indican los puntos, y deberán rotularse H_1 y X_1 , como en la figura 1.

Los conductores terminales suelen sacarse por lados opuestos de la cubierta, o por la parte superior del tanque o a través de la tapa, según se indica en la figura 2. En la figura 2a, los terminales de alta y baja tensión de igual polaridad relativa son adyacentes, con lo que si se conectan terminales adyacentes de primario y secundario —p. ej. H_2 y X_2 — con uno u otro devanado excitado por una tensión alterna adecuada, la tensión entre los terminales H_1 y X_1 es muy aproximadamente igual a la diferencia entre las tensiones eficaces V_H y V_X de los lados de alta y de baja tensión. La disposición de los terminales exteriores indicada en la figura 2a se llama, en consecuencia, *polaridad externa sustractiva*. En la figura 2b, cuando se conectan los terminales adyacentes de alta y baja tensión H_2 y X_1 , la tensión entre los terminales H_1 y X_2 es muy aproximadamente igual a la suma de las tensiones eficaces V_H y V_X , por lo que a la disposición exterior de los terminales de la figura 2b se le da el nombre de *polaridad externa aditiva*. Si se desconoce la polaridad externa, puede determinarse ensayando el transformador en la forma indicada en la figura 2.

¹ «American Engineering and Industrial Standards», núm. C6: *American Standard Rotation, Connections, and Terminal Markings for Electric Power Apparatus* (New York: National Electric Manufacturers Association, 1936).

La tensión debe aplicarse al devanado de alta tensión y debe ser relativamente baja; es decir, unos 110 V, en razón de la seguridad del operario y para permitir el empleo de voltímetros ordinarios.

Si es aditiva o sustractiva la polaridad externa se determina únicamente por la manera en que están conectados a los terminales exteriores los conductores procedentes de los devanados, y es totalmente independiente de la disposición interna de los devanados. Las marcas exteriores de los terminales contienen toda la información que precisa el encargado de la línea para conectar correctamente un transformador en su circuito. Sin embargo, a los diseñadores de transformadores interesa

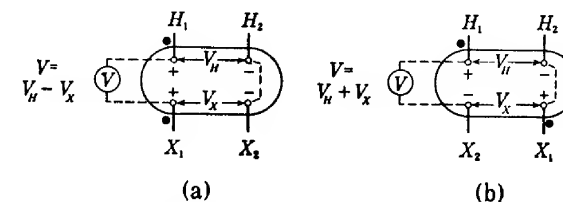


FIG. 2. Plano que muestra la situación de los terminales sobre la tapa, para a), polaridad sustractiva y b), polaridad aditiva

también la *polaridad interna* de los devanados²; es decir, si la tensión entre partes adyacentes de los devanados de alta y baja tensión es la suma o la diferencia de las tensiones en los devanados. La polaridad interna está determinada por la disposición y método de devanado de las bobinas y sólo puede alterarse rebobinando el transformador. La polaridad externa puede cambiarse invirtiendo las conexiones en el interior del tanque entre los conductores de primario o secundario y sus terminales externos.

Los transformadores de distribución utilizados para alimentar cargas domésticas suelen tener dos secundarios de 120 V que pueden conectarse en serie o en paralelo. En la figura 3 pueden verse las marcas normalizadas para estos secundarios divididos. Los terminales de un secundario son X_1 , X_2 y los del otro son X_3 , X_4 , donde X_1 y X_3

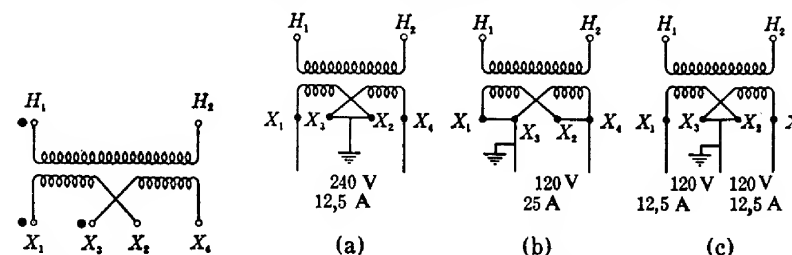


FIG. 3. Marcas normalizadas de los terminales para secundarios divididos

FIG. 4. Conexiones de secundarios de 120 V; a), en serie; b), en paralelo; c), de tres hilos. Las intensidades nominales corresponden a un transformador de 3 kVA.

² J. B. GIBBS, *Transformer Principles and Practice* (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1937), capítulo VII, 48-54.

son terminales de polaridad correspondiente. A veces se sacan de la cubierta los cuatro terminales de los secundarios y se realizan fuera del transformador las conexiones entre los secundarios. Sin embargo, muchos diseños modernos sitúan dentro del tanque un cuadro de terminales en el cual se realizan las conexiones apropiadas entre los devanados, con lo cual sólo se necesitan tres pasatapas de secundarios para alimentar un servicio de tres hilos. Obsérvese que los conductores que van a los terminales X_2 y X_3 están en cruz dentro del tanque. Con esta disposición de los terminales de los secundarios, los dos devanados secundarios pueden conectarse en serie o en paralelo por conexión de los pares apropiados de terminales adyacentes de secundarios como se ve en la figura 4. Con un cuadro de terminales interior, estas conexiones pueden realizarse convenientemente con eslabones de conexión adecuados.

Para tener información acerca de las marcas normalizadas de los terminales de transformadores que tengan disposiciones más complicadas de los devanados, consúltese la referencia dada en la nota de pie de página número 1. Dichos transformadores suelen tener, junto con la placa indicadora, un esquema explicativo de las conexiones.

Bibliografía

Esta lista de referencias complementa a la serie de referencias dadas en notas de pie de página intercaladas en el texto. Aun cuando esta bibliografía no debe considerarse, en modo alguno, como exhaustiva, es suficientemente extensa y variada para permitir la adquisición de un vasto conocimiento del tema. Muchos de los trabajos citados contienen nuevas referencias, con lo que se puede recopilar fácilmente una bibliografía completa tomando como base el material de la lista.

En las notas de pie de página se han empleado las siguientes abreviaturas para las publicaciones.

<i>A. I. E. E. Trans.</i>	American Institute of Electrical Engineers <i>Transactions</i>
<i>B. S. T. J.</i>	Bell System Technical <i>Journal</i>
<i>Brit. I. R. E. J.</i>	British Institution of Radio Engineers <i>Journal</i>
<i>Bul. Nat. Bur. Stand.</i>	National Bureau of Standards <i>Bulletin</i>
<i>Circ. Nat. Bur. Stand.</i>	National Bureau of Standards <i>Circular</i>
<i>E. E.</i>	<i>Electrical Engineering</i>
<i>Elec. J.</i>	<i>Electric Journal</i>
<i>Elec. W.</i>	<i>Electrical World</i>
<i>E. u. M.</i>	<i>Elektrotechnik und Maschinenbau</i>
<i>E. T. Z.</i>	<i>Elektrotechnische Zeitschrift</i>
<i>G. E. Rev.</i>	<i>General Electric Review</i>
<i>Gen. Rad. Exp. Instrs.</i>	<i>General Radio Experimenter Instruments</i>
<i>I. E. E. J.</i>	Institution of Electrical Engineers <i>Journal</i>
<i>I. R. E. Proc.</i>	Institute of Radio Engineers <i>Proceedings</i>
<i>J. O. S. A. and R. S. I.</i>	<i>Journal of Optical Society of America and Review of Scientific Instruments</i>
<i>J. Res. Nat. Bur. Stand. M. E.</i>	National Bureau of Standards <i>Journal of Research Mechanical Engineering</i>
<i>Philips Tech. Rev.</i>	<i>Philips Technical Review</i>
<i>Phil. Trans.</i>	<i>Philosophical Transactions</i>
<i>Phys. Rev.</i>	<i>Physical Review</i>
<i>R. G. E.</i>	<i>Revue Générale de l'Électricité</i>
<i>R. S. I.</i>	<i>Review of Scientific Instruments</i>
<i>Sci. Paper Nat. Bur. Stand.</i>	National Bureau of Standards <i>Scientific Paper</i> .

1. TEORIA DEL MAGNETISMO (CAPITULO I)

R. M. BOZORTH, «Present Status of Ferromagnetic Theory», *A. I. E. E. Trans.*, 54 (1935), 1251-1261. Estudio de la estructura de los átomos, moléculas y cristales de los metales de transición; evidencia experimental que sostiene la teoría de los dominios.

R. M. BOZORTH, «The Physical Basis of Ferromagnetism», *B. S. T. J.*, 19 (1940), 1-39. Comparación de las teorías del magnetismo de Ewing y de Weiss y descripción de algunos experimentos fundamentales del ferromagnetismo.

L. B. LOEB, *Atomic Structure* (New York: John Wiley & Sons, 1938). Excelente tratado de introducción que presenta el desarrollo histórico del átomo de Bohr y los últimos conceptos del átomo basados en la Mecánica Ondulatoria y las Matemáticas.

K. K. DARROW, «Spinning Atoms and Spinning Electrons», *B. S. T. J.*, 16 (1937), 319-336. Descripción de cómo el momento cinético y el momento magnético determinan las propiedades magnéticas de átomos y moléculas.

F. BITTER, *Introduction to Ferromagnetism* (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1927). Este libro presenta un estudio de las teorías del magnetismo y los métodos para preparar materiales magnéticos que son, o pueden ser, útiles comercialmente.

W. SHOCKLEY, «The Quantum Physics of Solids -I», *B. S. T. J.*, 18 (1939), 645-723. Empezando con una descripción clara de los niveles de energía de los electrones en los átomos, el autor guía al lector a través de un estudio de las moléculas diatómicas y por último le lleva al concepto de bandas de energía en los cristales.

2. PROPIEDADES DE LOS MATERIALES FERROMAGNÉTICOS (CAPÍTULO I)

Allegheny Steel Company, Brackenridge, Pa., *Magnetic Core Materials Practice* (1937). Curvas de imanación normal y de pérdidas en núcleos representativas para las distintas calidades de chapa de acero, con un estudio de aplicaciones y métodos normalizados de ensayo.

Carnegie-Illinois Steel Corporation, Pittsburgh, Pa., *Electrical Steel Sheets, Technical Bulletin* N.º 2 (1941). Recopilación de las curvas de imanación normal, ciclos de histéresis y curvas de pérdida para muchas calidades de chapa de acero. Se incluyen aplicaciones y métodos normalizados de ensayo.

V. E. LEGG, «Survey of Magnetic Materials and Applications in the Telephone System», *B. S. T. J.*, 18 (1939), 438-464. Se evalúan los materiales magnéticos con relación a aplicaciones en aparatos, especialmente en sistemas de comunicación.

G. W. ELMEN, «Magnetic Alloys of Iron, Nickel and Cobalt», *A. I. E. E. Trans.*, 54 (1935) 1292-1299.

V. E. LEGG y F. J. GIVEN, «Compressed Powdered Molybdenum Permalloy for High-Quality Inductance Coils», *B. S. T. J.*, 19 (1940), 385-406.

W. F. RANDALL, «Nickel-Iron Alloys of High Permeability with Special Reference to Mumetal», *I. E. E. J.*, 80 (1937), 647-667.

L. R. JACKSON y H. W. RUSSELL, «Temperature-Sensitive Magnetic Alloys and Their Uses», *Instr.*, 11 (1938), 280-282.

General Electric Company, *The Story of the G. E. Spirakore Transformer*, GES-2038 (octubre, 1938); *Chapter Two in the Story of the G. E. Spirakore Transformer*, GES-2447 (enero, 1941). Descripción de un método ingenioso de ensamblamiento del núcleo que ahorra espacio y utiliza la orientación preferida del grano.

Westinghouse Electric & Manufacturing Company, *Distribution Transformers with Hipsil Cores* R-992 (abril, 1941); *Hipsil Transformers*, B-2287 (abril, 1941). Estos folletos especiales indican la aplicación de materiales que tienen propiedades magnéticas especialmente convenientes en la dirección del laminado.

J. H. GOSS, «Permanent Magnets», *Metals and Alloys*, 15 (1942), 576-582. Nuevos diseños y técnicas de fabricación para la producción de imanes Alnico.

F. G. BAILEY, «The Hysteresis of Iron and Steel in a Rotating Magnetic Field», *Phil. Trans.*, 187 (1896), 715-746.

F. BRALLSFORD, «Rotational Hysteresis Loss in Electrical Sheet Steels», *I. E. E. J.*, 83 (1938), 566-575. Este artículo describe un método de medida, consigna datos y contiene una buena bibliografía.

J. Q. ADAMS, «Alnico - Its Properties and Possibilities», *G. E. Rev.*, 41 (1938), 518-523.

B. JONAS y H. J. MEERKAMP VAN EMBDEN, «New Kinds of Steel of High Magnetic Power», *Philips Tech. Rev.*, 6 (1941), 8-11. Resumen de los progresos en aleaciones para

imanes permanentes desde el acero al cobalto. Se incluye una curva de $(BH)_{max}$ desde 1890 hasta 1940.

W. E. RUDER, «New Magnetic Materials», *I. R. E. Proc.*, 30 (1942), 437-440. Breve resumen de los materiales magnéticos blandos y duros, incluyendo el Alnico V.

3. DISEÑO DE DISPOSITIVOS MAGNÉTICOS (CAPÍTULOS III, IV, V)

HERBERT C. ROTERS, *Electromagnetic Devices* (New York: John Wiley & Sons, 1942). Libro sobresaliente que trata del diseño de dispositivos magnéticos.

S. EVERSHEED, «Permanent Magnets in Theory and Practice», *I. E. E. J.*, 58 (1920), 780-837, y 63 (1925), 725-821. Tratamiento clásico del diseño de circuitos de imanes permanentes.

A. J. CORSON, «Magnetic Materials», *G. E. Rev.*, 45 (1942), 573-575. Este artículo describe el desarrollo de nuevos instrumentos indicadores de corriente continua y de alterna que utilizan las nuevas aleaciones magnéticas.

A. S. LANGSDORF, *Principles of Direct-Current Machines* (5a ed., New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1940), 401-419. Un capítulo acerca del cálculo de la curva de imanación de un dinamo a partir de los datos de diseño.

R. G. KLOEFFLER, J. L. BRENNEMAN y R. M. KERCHNER, *Direct-Current Machinery* (New York: The Macmillan Company, 1934), 54-65. Estudio de la curva de imanación de un dinamo.

F. MASSA, *Acoustic Design Charts* (Philadelphia: The Blakiston Company, 1942). Diagramas con ejemplos numéricos que indican el método a emplear para el diseño de dispositivos acústicos.

4. ENSAYOS MAGNÉTICOS (CAPÍTULOS I, V)

THOMAS SPOONER, *Properties and Testing of Magnetic Materials* (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1927). Consideraciones fundamentales para un gran número de ensayos magnéticos con esquemas de circuitos e instrucciones para realizar los ensayos).

R. L. SANFORD, «Magnetic Testing», *Circ. Nat. Bur. Stand.*, C415 (1937). Se describe el ensayo de muestras de materiales magnéticos en forma de anillo y de barra. Se dan esquemas de circuitos.

«Standard Methods of Test for Magnetic Properties of Iron and Steel», *Standards of the American Society for Testing Materials*, A-34 (1940). Este folleto contiene las definiciones y ensayos normalizados de materiales magnéticos.

B. J. BABBITT, «An Improved Permeameter for Testing Magnet Steel», *J. O. S. A. and R. S. I.*, 17 (1928), 47-58.

R. L. SANFORD y E. G. BENNETT, «An Apparatus for Magnetic Testing at High Magnetizing Forces», *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, 10 (1933), 567-573.

R. L. SANFORD y E. G. BENNETT, «An Apparatus for Magnetic Testing at Magnetizing Forces up to 5 000 Oersteds», *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, 23 (1939), 415-425.

D. E. FOSTER y A. E. NEWLON, «Measurement of Iron Cores at Radio Frequencies», *I. R. E. Proc.*, 29 (1941), 266-276. Método para medir el factor de pérdida y la permeabilidad eficaz del hierro a radiofrecuencias; se dan cálculos sobre muestras.

A. E. KETTNER, «Magnetic Measurements», *G. E. Rev.*, 45 (1942), 633-636. Resumen de métodos modernos de ensayo comercial con fotografías de aparatos.

B. M. SMITH, «Alnico, Properties and Equipment for Magnetization and Test», *G. E. Rev.*, 45 (1942), 210-213. Se describen y presentan imágenes de electroimanes para imantar Alnico, un permeámetro de saturación y un histéresígrafo fotoeléctrico. Se dan curvas del Alnico V.

B. M. SMITH y C. CONCORDIA, «Measuring Core Loss at High Densities», *E. E.*, 51 (enero, 1932), 36-38.

G. CAMILLI, «A Flux Voltmeter for Magnetic Tests», *A. I. E. E. Trans.*, 45 (1926) 721-728.

5. BOBINAS CON NÚCLEO DE HIERRO; CARACTERÍSTICAS DE EXCITACIÓN DE TRANSFORMADORES; TEORÍA DE MODELOS (CAPÍTULOS VI, VII)

Las referencias consignadas en esta sección estudian las propiedades generales de bobinas y transformadores con núcleo de hierro, ondas no sinusoidales, problemas de diseño, análisis dimensional, y teoría de modelos.

N. PARTRIDGE, «An Introduction to the Study of Harmonic Distortion in Audio Frequency Transformers», *Brit. I. R. E. J.*, 3 (junio-julio, 1942), 6-21.

E. PETERSON, «Harmonic Production in Ferromagnetic Materials at Low Frequencies and Low Flux Densities», *B. S. T. J.*, 7 (1928), 762-796. Este trabajo trata principalmente de los efectos en circuitos multicanal de comunicaciones.

PHILIP FRANKLIN, «*Differential Equations for Electrical Engineers* (New York: John Wiley & Sons, 1933). En los capítulos II y VIII se estudian las series de Fourier y al final del libro se da una corta bibliografía.

R. E. DOHERTY y E. G. KELLER, *Mathematics of Modern Engineering*, Vol. I (New York: John Wiley & Sons, 1936). 3.^a parte. El capítulo II trata de las series de Fourier y da ejemplos de aplicaciones técnicas. Se incluyen un estudio del análisis de los armónicos de una función dada en forma gráfica.

R. R. LAWRENCE, *Principles of Alternating Currents* (2a. ed., New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1935). En el capítulo IV se estudian las corrientes y tensiones no sinusoidales, su representación mediante series de Fourier, sus valores eficaces, potencia y análisis de armónicos.

J. M. BRYANT, J. A. CORRELL y E. W. JOHNSON, *Alternating-Current Circuits* (3a. ed., New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1939). En el capítulo XVI se estudian las formas de onda no sinusoidales.

J. W. BUTLER y E. B. POPE, «The Effects of Overexciting Transformers on System Voltage Wave Shapes and Power Factor», *A. I. E. E. Trans.*, 60 (1941), 49-53.

L. B. ARGUIMBAU, «Losses in Audio-Frequency Coils», *Gen. Rad. Exp.*, 11, N.º 6 (noviembre, 1936), 1-4. Este trabajo da un circuito equivalente sencillo para una bobina con núcleo de hierro y estudia los efectos de los entrehierros sobre el factor de calidad.

P. K. McELROY y R. F. FIELD, «How Good Is an Iron-Cored Coil?», *Gen. Rad. Exp.*, 16, núm. 10 (marzo 1942), 1-12. Continuación y ampliación del tema estudiado en el trabajo de Arguimbau (véase referencia anterior).

H. A. WHEELER, «Formulas for the Skin Effect», *I. R. E. Proc.*, 30 (septiembre, 1942), 412-424. Parte de este trabajo se refiere a circuitos equivalentes para bobinas con núcleo de hierro.

L. W. CHUBB y T. SPOONER, «The Effect of Displaced Magnetic Pulsations on the Hysteresis Loss of Sheet Steel», *A. I. E. E. Trans.*, 34, 2.^a parte (1915), 2671-2692.

J. D. BALL, «The Unsymmetrical Hysteresis Loop», *A. I. E. E. Trans.*, 34, segunda parte (1915), 2693-2715.

T. SPOONER, «Effect of a Superposed Alternating Field on Apparent Magnetic Permeability and Hysteresis Loss», *Phys. Rev.* 25 (1925), 527-540.

R. F. EDGAR, «Loss Characteristics of Silicon Steel at 60 Cycles with D-C Excitation», *A. I. E. E. Trans.*, 52 (septiembre, 1933), 721-724.

J. MINTON e I. G. MALOFF, «Design Methods for Soft Magnetic Materials in Radio», *I. R. E. Proc.*, 17 (junio, 1929), 1021-1033. Estudia el diseño de transformadores de audiofrecuencia cuyos devanados conducen corriente continua.

D. C. PRINCE, «Direct-Current Reactor Design», *G. E. Rev.*, 27 (junio, 1924), 380-383. Estudia el diseño de bobinas alisadoras para circuitos de salida de rectificadores electrónicos.

A. BOYAJIAN, «Theory of D-C Excited Iron-Core Reactors», *A. I. E. E. Trans.*, 43 (1924), 919-936. Tratado comprensivo de las bobinas de núcleo saturable y un estudio de algunas aplicaciones como dispositivos reguladores. Se incluye un buen estudio de las formas de onda.

C. R. HANNA, «Design of Reactances and Transformers Which Carry Direct Current», *A. I. E. E. Trans.*, 46 (1927), 155-158. Método directo para determinar la longitud de entrehierro óptima en bobinas o transformadores en los que la componente alterna de la inducción magnética es débil.

C. V. AGGERS y W. E. PAKALA, «Direct-Current Controlled Reactors», *Elec. J.*, 34 (febrero 1937), 55-59. Estudia el diseño de bobinas de núcleo saturable de tres ramas.

P. W. BRIDGMAN, *Dimensional Analysis* (ed., revisada, New Haven: Yale University Press, 1931). Estudio general de los principios de semejanza entre sistemas físicos, con ilustraciones de las aplicaciones del análisis dimensional a experimentos con modelos.

E. BUCKINGHAM, «On Physically Similar Systems; Illustrations of the Use of Dimensional Equations», *Phys. Rev.*, 4 (1914), 345-376. Deducción de ciertos teoremas importantes referentes al análisis dimensional, con aplicaciones ilustrativas.

Sir RICHARD GLAZEBOOK, editor, *Dictionary of Applied Physics*, tomo I: *Mechanics, Engineering, Heat* (Londres: Macmillan and Company, Ltd., 1922), 81-96. Estudio de los principios de semejanza dinámica. En la tercera parte de este artículo se estudia la teoría de modelos.

H. B. BROOKS, «Design of Standards of Inductance, and the Proposed Use of Model Reactors in the Design of Air-Core and Iron-Core Reactors», *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, 7 (agosto 1931), 289-328. Trabajo extenso, con ejemplos de la aplicación de la teoría de modelos al diseño de patrones de autoinducción, bobinas limitadoras de la intensidad y bobinas de reacción con núcleo de hierro dotado de entrehierro.

F. EMDE, «Die Berechnung von Eisendrosseln mit grosser Zeitkonstante», *E. u. M.*, 48 (1930), 521-530. Tratado extenso de diseño de bobinas.

H. A. W. KLINKHAMER, «Equivalent Networks with Highly Saturated Iron Cores with Special Reference to Their Use in the Design of Stabilisers», *Philips Tech. Rev.*, 2 (septiembre, 1937), 276-281. Estudia los principios generales de la teoría de modelos aplicada a redes que contienen elementos no lineales y da un ejemplo del diseño de dichas redes.

6. CARACTERÍSTICAS TÉRMICAS DE APARATOS ELÉCTRICOS (CAPÍTULO VIII)

Las referencias pertenecientes a las características térmicas de los transformadores están consignadas en la sección II de esta bibliografía.

F. M. CLARK, «Factors Affecting the Mechanical Deterioration of Cellulose Insulation», *A. I. E. E. Trans.*, 61 (octubre, 1942), 742-749.

J. J. SMITH y J. A. SCOTT, «Temperature Aging of Class A Insulation», *A. I. E. E. Trans.*, 58 (septiembre, 1939), 435-444.

C. F. HILL, «Temperature Limits Set by Oil and Cellulose Insulation», *A. I. E. E. Trans.*, 58 (septiembre, 1939), 484-491.

J. A. SCOTT y B. H. THOMPSON, «Temperature-Aging Tests on Class-A-Insulated Fractional-Horsepower Motor Stators», *A. I. E. E. Trans.*, 61 (julio, 1942), 499-501.

A. D. MOORE, «Dissipation of Heat by Radiation», *A. I. E. E. Trans.*, 49 (enero, 1930), 359-365.

H. C. HOTTEL, «Radiant Heat Transmission», *M. E.*, 52 (julio, 1930), 699-704.

E. GRIFFITHS y A. H. DAVIS, «The Transmission of Heat by Radiation and Convection», *Special Report núm. 9* (Londres: H. M. Stationery Office, 1931).

A. D. MOORE, *Fundamentals of Electrical Design* (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1927). En los capítulos XIV, XV y XVI se estudian los problemas térmicos.

«American Institute of Electrical Engineers Standards», núm. 1: *General Principles upon Which Temperature Limits are Based in the Rating of Electrical Machinery and Apparatus* (New York: American Institute of Electrical Engineers, 1940).

«American Engineering and Industrial Standards», Núm. C50: *American Standards for Rotating Electrical Machinery* (New York: American Standards Association, 1936).

«American Institute of Electrical Engineers Standards», Núm. 11: *American Tentative Standards for Railway Motors and Other Rotating Electrical Machinery* (New York: American Institute of Electrical Engineers, 1937).

R. E. HELLMUND, «Classification and Co-ordination of Short-Time and Intermittent Ratings and Applications», *A. I. E. E. Trans.*, 60 (julio, 1941), 792-798.

P. L. ALGER y T. C. JOHNSON, «Rating of General Purpose Induction Motors», *A. I. E. E. Trans.*, 58 (septiembre, 1939), 445-459.

L. F. HILDEBRAND, «Duty Cycles and Motor Rating», *A. I. E. E. Trans.*, 58 (septiembre, 1939), 478-483.

R. C. FREEMAN y A. U. WELCH, «The Service Factor Rating of Arc-Welding Generators and Transformers», *A. I. E. E. Trans.*, 60 (abril, 1941), 137-141.

7. TEXTOS ACERCA DE TRANSFORMADORES

En esta sección se consignan libros que tratan de la teoría de los transformadores y que estudian la construcción, diseño, funcionamiento y aplicaciones de los transformadores en sistemas de potencia.

R. R. LAWRENCE, *Principles of Alternating-Current Machinery* (tercera ed.; New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1940), capítulos IX al XIX.

J. M. BRYANT y E. W. JOHNSON, *Alternating-Current Machinery* (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1935), capítulos I a XI. Al final de cada capítulo se incluye una bibliografía.

A. S. LANGSDORF, *Theory of Alternating-Current Machinery* (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1937), capítulo IV.

A. F. PUCHSTEIN y T. C. LLOYD, *Alternating-Current Machines* (segunda ed., New York: John Wiley & Sons, 1942), capítulos XI a XX.

L. F. BLUME, editor, *Transformer Engineering* (New York: John Wiley & Sons, 1938). Excelente tratado de problemas técnicos de carácter superior referente a la aplicación y funcionamiento de los transformadores en sistemas de potencia.

S. A. STIGANT y H. M. LACEY, *The J. and P. Transformer Book* (sexta ed.; Londres: Johnson and Phillips Ltd., 1935). Una tecnología práctica del transformador de potencia.

J. L. LACOUR y K. FAYE-HANSEN, *Die Transformatoren* (tercera ed.; Berlín: J. Springer, 1936).

R. RICHTER, *Elektrische Maschinen*. Tomo III: *Die Transformatoren* (Berlín: J. Springer, 1932). Este libro incluye una bibliografía de 167 cuestiones.

E. G. REED, *Essentials of Transformer Practice* (segunda ed.; New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1927). Estudia la teoría, diseño y funcionamiento de los transformadores para sistemas de potencia desde un punto de vista técnico práctico.

J. B. GIBBS, *Transformer Principles and Practice* (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1937). Descripción sin matemáticas de algunos tipos de transformadores para sistemas de potencia y de los principios que fundamentan su funcionamiento.

E. G. REED, *Transformer Construction and Operation* (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1928). No matemático y descriptivo.

J. H. KUHLMANN, *Design of Electrical Apparatus* (segunda ed.; New York: John Wiley & Sons, 1940). Los capítulos del XXII al XXV tratan del diseño de transformadores para sistemas de potencia.

8. ASPECTOS FÍSICOS DE LOS TRANSFORMADORES (CAPÍTULO XI)

K. K. PALUEV, «Power Transformers with Concentric Windings», *A. I. E. E. Trans.*, 55 (junio, 1936), 649-659. Describe el desarrollo de los grandes transformadores de potencia para alta tensión y los transformadores del extremo emisor de la línea Boulder Dam-Los Angeles.

W. G. JAMES y F. J. VOGEL, «Power Transformer for 287.5 Kv Service», *A. I. E. E. Trans.*, 55 (mayo, 1936), 438-444. Describe los transformadores del extremo receptor de la línea Boulder Dam-Los Angeles.

E. D. TREANOR, «The Wound-Core Distribution Transformer», *A. I. E. E. Trans.*, 57 (noviembre, 1938), 622-625. Describe un ingenioso diseño y proceso de fabricación para producir un transformador de distribución con bobinas preformadas rodeadas por dos núcleos consistentes en tiras de acero continuas devanadas.

J. O. FENWICK y D. E. WIEGAND, «New Transformer Lowers Copper Loss, Improves Regulation», *Elec. W.*, 115 (1941), 972-973. Describe un tipo de transformador de distribución hecho con un núcleo preformado de tira continua de acero, y un método para devanar bobinas cilíndricas sobre el núcleo preformado.

J. K. HODNETTE y C. C. HORSTMAN, «Hipersil, a New Magnetic Steel and Its Use in Transformers», *The Westinghouse Engineer*, 1 (agosto, 1941), 52-56.

P. SPORN y H. V. PUTMAN, «A New Transformer for Base-Load Stations», *A. I. E. E. Trans.*, 60 (octubre, 1941), 916-918. Describe mejoras de los grandes transformadores de potencia resultantes del empleo de Hipersil en el material del núcleo.

J. F. PETERS, «High Power Audio Transformers», *A. I. E. E. Trans.*, 55 (enero, 1936), 34-36. Describe un transformador de audiofrecuencia de 7,5 kW y otro de 180 kW construidos para la emisora de radio WLW.

A. G. GANZ y A. G. LAIRD, «Improvements in Communication Transformers», *A. I. E. E. Trans.*, 54 (diciembre, 1935), 1367-1373.

E. M. HUNTER y J. C. PAGE, «Standardized Load-Center Unit Substations for Low-Voltage A-C Systems», *A. I. E. E. Trans.*, 61 (julio, 1942), 519-525.

F. MEYER, «Fluid Filling-Media for Electrical Apparatus», *I. E. E. J.*, 86 (abril, 1940), 313-320.

L. H. BURNHAM y S. T. MAUNDER, «Pyranol Power Transformers», *G. E. Rev.*, 42 (junio, 1939), 236-239.

9. AISLANTES Y FENÓMENOS DE SOBRETENSIONES CORTAS

A. I. E. E. Committee on Electrical Machinery (Transformer Subcommittee), «Protection of Power Transformers against Lightning Surges», *A. I. E. E. Trans.*, 60 (junio, 1941), 568-577. En este artículo se incluye una bibliografía de 25 temas.

Surge Phenomena-Seven Years' Research for the Central Electricity Board (Londres: The British Electrical and Allied Industries Research Association, 1941). La tercera parte de esta extensa relación trata de la distribución de los pulsos fuertes de tensión entre los transformadores.

D. F. MINER, *Insulation of Electrical Apparatus* (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1941). El capítulo VIII, trata de transformadores y bobinas de reacción.

R. RÜDENBERG, «Surge Characteristics of Two-Winding Transformers», *A. I. E. E. Trans.*, 60 (diciembre, 1941), 1136-1144.

L. F. BLUME, editor, *Transformer Engineering* (New York: John Wiley & Sons, 1938). En los capítulos XV, XVII y XVIII, se estudian las características de los materiales aislantes, de las tensiones transitorias en los transformadores y la coordinación del aislamiento.

K. K. PALUEFF, «Effect of Transient Voltages on Power Transformer Design», *A. I. E. E. Trans.*, 48 (julio, 1929), 681-701; «The Behavior of Transformers with Neutral Isolated or Grounded through an Impedance», *A. I. E. E. Trans.*, 49 (julio, 1930), 1179-1190; «Non-Resonating Autotransformer», *A. I. E. E. Trans.*, 50 (junio, 1931), 803-809; K. K. PALUEFF y J. H. HAGENGUTH, «Transition of Lightning Waves from One Circuit to Another Through Transformers», *A. I. E. E. Trans.*, 51 (septiembre, 1932), 601-615.

L. V. BEWLEY, «Transient Oscillations in Distributed Circuits with Special Reference to Transformer Windings», *A. I. E. E. Trans.*, 50 (diciembre, 1931), 1215-1233.

H. L. THOMAS, «Insulation Stresses in Transformers with Special Reference to Surge and Electrostatic Shielding», *I. E. E. J.*, 87 (octubre, 1940), 427-443.

H. O. STEPHENS, «Shielded Concentric Cylindrical Windings in High-Voltage Power Transformers», *G. E. Rev.*, 45 (diciembre, 1942), 705-709.

H. V. PUTMAN, «Surge-Proof Transformers», *A. I. E. E. Trans.*, 51 (septiembre, 1932), 579-584.

10. DISTRIBUCIÓN DEL FLUJO MAGNÉTICO E IMPEDANCIA DE FUGA (CAPÍTULOS XII, XIII Y XIV)

K. B. MCEACHRON, «Magnetic Flux Distribution in Transformers», *A. I. E. E. Trans.*, 41 (1922), 247-261.

O. G. C. DAHL, «Separate Leakage Reactance of Transformer Windings», *A. I. E. E. Trans.*, 44 (1925), 785-791.

A. BOYAJIAN, «Resolution of Transformer Reactance into Primary and Secondary Reactances», *A. I. E. E. Trans.*, 44 (1925), 805-810.

L. F. BLUME, editor, *Transformer Engineering* (New York: John Wiley & Sons, 1938). En el capítulo IV se estudian los cálculos de las impedancias de los transformadores.

B. HAGUE, *Electromagnetic Problems in Electrical Engineering* (Londres: Oxford University Press, 1929). En el capítulo XII se estudia la fuga magnética en los transformadores y se presentan gráficas interesantes del flujo.

A. L. MORRIS, «The Influence of Various Factors upon Leakage Reactance of Transformers», *I. E. E. J.*, 36 (mayo, 1940), 485-495.

H. B. DWIGHT y L. S. SZUNG, «A Formula for the Reactance of the Interleaved Component of Transformers», *A. I. E. E. Trans.*, 56 (noviembre, 1937), 1368-1371.

H. O. STEPHENS, «Transformer Reactance and Losses with Nonuniform Windings», *A. I. E. E. Trans.*, 53 (febrero, 1934), 346-349.

H. L. COLE, «Reactance and Stray Losses in Power Transformers», *A. I. E. E. Trans.*, 53 (febrero, 1934), 338-342.

G. KAPP, «Ein Beitrag zur Vorausberechnung der Streuung in Transformatoren», *E. T. Z.* 19 (1898), 244-246. Este artículo y los artículos de Rogowski, citados a continuación, son clásicos del tema de reactancias de fuga de transformadores.

W. ROGOWSKI y K. SIMONS, «Die Streuung bei Wechselstromtransformatoren und Kommutatormotoren», *E. T. Z.*, 29 (1908), 535-538 y 564-567.

W. ROGOWSKI, «Ueber das Streufeld und den Streuinduktionskoeffizienten eines Transformators mit Scheibenwicklung und geteilten Endspulen», *Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*, 71 (Berlín: J. Springer, 1909).

W. ROGOWSKI, «Ueber die Streuung des Transformators», *E. T. Z.*, 31 (1910), 1033-1036 y 1069-1071.

W. KNAAK, «Beitrag zur Berechnung der Streuung bei symmetrischen Scheibenwicklungen», *E. T. Z.*, 60 (1939), 47-48.

W. KNAAK, «Zusätzliche Verluste durch Streufelder in den Wicklungen von Transformatoren», *E. u. M.*, 57 (1939), 89-93.

E. ROTH, «Étude analytique du Champ de Fuites des Transformateurs et des Efforts mécaniques exercés sur les Enroulements», *R. G. E.*, (1928), 773-787.

11. REGULACIÓN DE TENSIÓN, PÉRDIDAS, VALORES NOMINALES Y CARACTERÍSTICAS TÉRMICAS (CAPÍTULO XIV)

«American Engineering and Industrial Standards», núm. C-57: *Proposed American Standards; Transformers, Regulator, and Reactors* (New York: American Standards Association, 1940). Esta publicación representa las normas seguidas en los Estados Unidos relativas a valores nominales y otras características de los transformadores de potencia y de distribución, transformadores para instrumentos y otros aparatos de inducción. Aun cuando estas normas propuestas no han sido aprobadas por la American Standards Association, constituyen la fuente de información más puesta al día acerca de normas para transformadores, y contienen datos acerca de las normas del American Institute of Electrical Engineers y la National Electrical Manufacturers Association. Se incluyen un Reglamento de Ensayos propuesto y Guías para el funcionamiento de los transformadores.

A. I. E. E. Committee on Electrical Machinery (Transformer Subcommittee), «Interim Report on Guides for Overloading Transformers and Voltage Regulators», *A. I. E. E. Trans.*, 61 (septiembre, 1942), 692-694.

F. J. VOGEL y T. K. SLOAT, «Emergency Overloads for Oil-Insulated Transformers», *A. I. E. E. Trans.*, 61 (septiembre, 1942), 669-673.

F. J. VOGEL y PAUL NARBUTOVSKI, «Hot-Spot Winding Temperatures in Self-Cooled Oil-Insulated Transformers», *A. I. E. E. Trans.*, 61 (marzo, 1942), 133-136.

V. M. MONTSINGER, «Effect of Load Factor on Operation of Power Transformers by Temperature», *A. I. E. E. Trans.*, 59 (noviembre, 1940), 632-636.

H. V. PUTMAN y W. M. DANN, «Loading Transformers by Copper Temperature», *A. I. E. E. Trans.*, 58 (Octubre, 1939), 504-509.

L. F. BLUME, editor, *Transformer Engineering* (New York: John Wiley & Sons, 1938), Capítulo ix.

V. M. MONTSINGER, «Temperature Limits for Short-Time Overloads for Oil-Insulated Neutral Grounding Reactors and Transformers», *A. I. E. E. Trans.*, 57 (enero, 1938), 39-44.

V. M. MONTSINGER, «Loading Transformers by Temperature», *A. I. E. E. Trans.*, 49 (abril, 1930), 776-790.

L. C. NICHOLS, «Effects of Overloads on Transformer Life», *A. I. E. E. Trans.*, 53 (diciembre, 1934), 1616-1621.

12. ECONOMÍA EN LAS APLICACIONES DE LOS TRANSFORMADORES PARA SISTEMAS DE POTENCIA (CAPÍTULO XVI)

D. J. BOLTON, *Electrical Engineering Economics* (Londres: Chapman & Hall, Ltd., 1928). En el capítulo IX se estudian los factores que influyen en la elección económica de los transformadores.

E. G. REED, *Essentials of Transformer Practice* (segunda ed.; New York: D. Van Nostrand Company, Inc., 1927). En los capítulos del XXXII al XXXVI, se estudian los problemas de costo y carga de los transformadores.

J. B. GIBBS, *Transformer Principles and Practice* (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1937). En el capítulo XXII, se estudian las economías que pueden resultar de la sustitución de transformadores viejos por nuevos.

R. L. BROWN, «When Transformers Get Old», *Factory Management and Maintenance*, 96 (1938), 97-99. Estudio de las economías resultantes de la sustitución o reconstrucción de transformadores que tienen grandes pérdidas en el núcleo.

S. LENARD, «L'Évaluation et la Capitalisation des Pertes dans les Transformateurs», *Conférence Internationale des Grands Réseaux Électriques*, 1 (1937), Art. 101, 1-23. Tratamiento matemático de los costos de las pérdidas de los transformadores sobre la base del valor capitalizado, con una extensa bibliografía de la literatura europea.

R. WINFREY, «Statistical Analysis of Industrial Property Retirements», *Iowa State College Engineering Experiment Station Bulletin* 125 (diciembre, 1935).

W. A. SUMNER, «Modern Load Cycles Warrant New Transformer Characteristics», *Elec. W.*, 115 (1941), 1304-1306. Describe características perfeccionadas de los transformadores de distribución resultantes de variar el diseño de la razón de pérdida basándose en el empleo de material del núcleo de elevada inducción magnética de saturación.

M. DEMERIT, «Distribution Transformer Electrical Performance Characteristics», *Electric Light and Power*, 17 (noviembre, 1939), 37-41. Estudia los efectos de los costos energéticos y de demanda y los ciclos de carga sobre los productos de pérdida y cocientes de pérdida más económicos para transformadores de distribución pequeños.

W. A. SUMNER y J. B. HODTUM, «Realigning Transformers with Distribution», *Elec. W.*, 105 (1935), 1586-1588. Estudia las relaciones existentes entre el primer costo, producto de pérdida y otras características de los transformadores.

M. F. BEAVERS, «Selecting Distribution-Transformer Size», *E. E.*, 59 (octubre, 1940), 407-412. Estudia un método para convertir una curva de carga diaria fluctuante en una forma térmicamente equivalente a partir de la cual pueden determinarse las sobrecargas permisibles. En este artículo se incluye una bibliografía de 17 temas.

C. H. LEWIS y E. H. SNYDER, «Distribution Transformer Load Supervising Methods», *Edison Electric Institute Bulletin*, 5 (1937), 329-333.

R. RADER, «Choosing Transformer Sizes for Distribution Circuits», *Elec. W.*, 107 (1937), 272-273.

F. H. FERGUSON, «Distribution Transformer Loading», *Electrical West*, 78 (abril, 1937), 33-35.

13. TRANSFORMADORES PARA COMUNICACIONES (CAPÍTULOS XVII, XVIII Y XX)

E. A. GUILLEMIN, *Communication Networks*. Vol. I: *The Classical Theory of Lumped Constant Networks* (New York: John Wiley & Sons, 1931). El capítulo VIII, secciones 1 y 2, trata de la solución en régimen permanente del problema del transformador y de los circuitos equivalentes de transformadores.

K. S. JOHNSON, *Transmission Circuits for Telephonic Communication* (sexta ed.; New York: D. Van Nostrand Company, Inc., 1939). Los capítulos VI y VII tratan de transformadores.

F. E. TERMAN, *Measurements in Radio Engineering* (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc. 1935). En las páginas 53-58, se estudia la medida de la inductancia incremental y en las páginas 195-202, las medidas de las constantes de los transformadores de audiofrecuencia.

F. E. TERMAN, *Radio Engineering* (segunda ed.; New York: McGraw-Hill Book

Company, Inc., 1937). En la sección 45, páginas 188-202, se estudian los transformadores de entrada e interetapa y los transformadores de salida en la sección 57, páginas 296-301.

F. E. TERMAN y R. E. INGEBRETSEN, «Output Transformer Response», *Electronics*, 9 (enero, 1936), 30-32. Estudio de un diagrama universal de respuesta a las frecuencias para transformadores de salida.

F. E. TERMAN, «Universal Amplification Charts», *Electronics*, 10 (junio, 1937), 34-35. Estudio de diagramas universales de respuesta a las frecuencias para amplificadores acoplados por resistencia-capacidad y para transformadores de entrada e interetapa.

P. W. KLIPSCH, «Design of Audio-Frequency Amplifier Circuits Using Transformers», *I. R. E. Proc.*, 24 (febrero, 1936), 219-232. Artículo que trata del diseño de transformadores interetapa, con un estudio de los efectos de resonancia a alta frecuencia y un análisis de los efectos alisadores de la resistencia conectada en paralelo con el secundario.

GLENN KOEHLER, «The Design of Transformers for Audio-Frequency Amplifiers with Preassigned Characteristics», *I. R. E. Proc.*, 16 (diciembre, 1928), 1742-1770. Este artículo trata aspectos del diseño de transformadores de entrada e interetapa. Se incluye un estudio de los efectos de la interfoliación de los devanados sobre las inductancias de fuga y las capacidades distribuidas.

L. A. KELLEY, «Transformer Design», *Radio Engineering*, 14 (diciembre 1934), 7-11, y 15 (febrero 1935), 16-19. La primera parte de este artículo trata de transformadores que terminan en resistencias y la segunda parte de transformadores cuya función es la transformación de tensión.

R. C. HITCHCOCK y W. O. OSBON, «Design of the Output Transformer», *Electronics*, 1 (1930), 381-383 y 427-429.

J. G. STORY, «Design of Audio-Frequency Input and Intervalve Transformers», *Wireless Engineer*, 15 (febrero 1938), 69-80.

P. W. WILLIAMS, «Low-Frequency Intervalve Transformers», *I. E. E. J.*, 64 (1926), 1065-1083.

B. S. COHEN, A. J. ALDRIDGE y W. WEST, «The Frequency Characteristics of Telephone Systems and Audio-Frequency Apparatus, and Their Measurement», *I. E. E. J.*, 64 (1926), 1023-1050.

W. L. CASPER, «Telephone Transformers», *A. I. E. E. Trans.*, 43 (1924), 443-455.

J. F. PETERS, «High Power Audio Transformers», *A. I. E. E. Trans.*, 55 (enero 1936), 34-36. Describe un transformador de 7,5 kW y otro de 180 kW construidos para la emisora de radio WLW.

C. H. CRAWFORD y E. J. THOMAS, «Silicon Steel in Communication Equipment», *A. I. E. E. Trans.*, 54 (diciembre 1935), 1348-1353. Estudia, entre otras cosas, la selección del material del núcleo para transformadores de audiofrecuencia y los efectos del material del núcleo sobre las características de frecuencia.

A. G. GANZ y A. G. LAIRD, «Improvements in Communication Transformers», *A. I. E. E. Trans.*, 54 (diciembre 1935), 1367-1373. Estudia los efectos del perfeccionamiento de diseños y materiales sobre las características de frecuencia.

C. O. GIBBON, «An Explanation of the Common Battery Anti-Sidetone Subscriber Set», *B. S. T. J.*, 17 (abril 1938), 245-257.

14. TRANSFORMADORES PARA INSTRUMENTOS (CAPÍTULO XIX)

B. HAGUE, *Instrument Transformers* (Londres: Sir Isaac Pitman & Sons Ltd., 1936). *A. I. E. E. Committee on Protective Devices (Current-Transformer Subcommittee)*, «Current and Potential-Transformer Standardization», *A. I. E. E. Trans.*, 61 (septiembre, 1942), 698-706.

A. C. SCHWAGER, «Current-Transformer Performance Based on Admittance-Vector Locus», *A. I. E. E. Trans.*, 61 (enero, 1942), 26-30.

E. C. WENTZ, «A Simple Method for Determination of Ratio Error and Phase Angle in Current Transformers», *A. I. E. E. Trans.*, 60 (octubre, 1941), 949-954.

G. CAMILLI, «New Developments in Current-Transformer Design», *A. I. E. E. Trans.*, 59 (1940), 835-842.

A. T. SINKS, «Computation of Accuracy of Current Transformers», *A. I. E. E. Trans.*, 59 (diciembre, 1940), 663-668.

G. CAMILLI y R. L. TEN BROECK, «A Proposed Method for the Determination of Current-Transformer Errors», *A. I. E. E. Trans.*, 59 (septiembre, 1940), 547-550.

A. C. SCHWAGER y V. A. TREAT, «Shaping of Magnetization Curves and the Zero Error Current Transformer», *A. I. E. E. Trans.*, 52 (marzo, 1933), 45-52.

G. CAMILLI y L. V. BEWLEY, «Surge Protectors for Current Transformers», *A. I. E. E. Trans.*, 55 (marzo, 1936), 254-260.

O. A. KNOPP, «Some Applications of Instrument Transformers», *A. I. E. E. Trans.*, 55 (mayo 1936), 480-489. Describe transformadores para instrumentos de diseño especial para ser utilizados en la calibración de contadores e instrumentos patrón.

J. H. BUCHANAN, «Design, Construction, and Testing of Voltage Transformers», *I. E. E. J.*, 78 (marzo, 1936), 292-309.

A. M. WIGGINS, «Parallel Operation of Current Transformers for Totalizing Two or More Circuits», *Elec. J.*, 26 (agosto, 1929), 379-381.

E. J. BOLAND, «Autotransformer Connections for Varhour Metering», *G. E. Rev.*, 43 (julio, 1940), 298-301.

G. CAMILLI, «Cascade-Type Potential Transformers», *G. E. Rev.*, 39 (febrero, 1936), 95-99.

15. TRANSFORMADORES REGULADORES DE TENSIÓN (CAPÍTULO XIX)

L. F. BLUME, editor, *Transformer Engineering* (New York: John Wiley & Sons, 1938). En los capítulos x, xi y xii se estudian las características de los transformadores de tomas cambiables y aparatos asociados; en el capítulo xiii las aplicaciones del equipo regulador de tensión; y la regulación de fase en el capítulo xiv.

G. H. LANDIS, «Voltage Regulation and Control in the Development of a Rural Distribution System», *A. I. E. E. Trans.*, 57 (septiembre, 1938), 541-547. Estudio de los campos de aplicación de reguladores de tensión por saltos, elevadores de tensión y condensadores para la regulación de tensión de líneas de distribución rurales.

J. E. CLEM, «Equivalent Circuit Impedance of Regulating Transformers», *A. I. E. E. Trans.*, 58 (1939), 871-873.

J. E. HOBSON y W. A. LEWIS, «Regulating Transformers in Power-System Analysis», *A. I. E. E. Trans.*, 58 (1939), 874-883.

W. J. LYMAN y J. R. NORTH, «Application of Large Phase-Shifting Transformer on an Interconnected System Loop», *A. I. E. E. Trans.*, 57 (octubre 1938), 579-587.

L. F. BLUME, «Characteristics of Load Ratio Control Circuits for Changing Transformer Ratio under Load», *A. I. E. E. Trans.*, 51 (diciembre, 1932), 952-956.

A. PALME, «Transformers with Load Ratio Control», *A. I. E. E. Trans.*, 50 (marzo, 1931), 172-177.

H. B. WEST, «Tap Changing under Load for Voltage and Phase-Angle Control», *A. I. E. E. Trans.*, 49 (julio, 1930), 839-845.

L. H. HILL, «Transformer Tap Changing under Load», *A. I. E. E. Trans.*, 46 (1927), 582-589.

L. F. BLUME, «Characteristics of Interconnected Power Systems as Affected by Transformer Ratio Control», *A. I. E. E. Trans.*, 46 (1927), 590-598.

H. C. ALBRECHT, «Transformer Tap Changing under Load», *A. I. E. E. Trans.*, 44 (1925), 581-585.

16. FENÓMENOS DE ARMÓNICOS EN CIRCUITOS TRIFÁSICOS (CAPÍTULO XXIII)

R. R. LAWRENCE, *Principles of Alternating Currents* (2a. ed.; New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1935). En el capítulo xi se estudia la teoría fundamental de los fenómenos de armónicos en circuitos polifásicos.

O. G. C. DAHL, *Electric Circuits, Theory and Applications*. Vol I: *Short-Circuit Calculations and Steady-State Theory* (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1928). En el capítulo viii se estudian los fenómenos de armónicos en sistemas de potencia.

L. F. BLUME, editor, *Transformer Engineering* (New York: John Wiley & Sons, 1938). En los capítulos vii y xvi se estudian los fenómenos de armónicos en bancos trifásicos de transformadores.

O. G. C. DAHL, «Transformer Harmonics and Their Distribution», *A. I. E. E. Trans.*, 44 (1925), 792-805.

T. H. MORGAN, C. A. BAIROS, y G. S. KIMBALL, «The Triple-Harmonic Equivalent Circuit in Three-Phase Power Transformer Banks», *A. I. E. E. Trans.*, 52 (marzo, 1933), 64-71.

T. C. LENNOX, «Circulation of Harmonics in Transformer Circuits», *A. I. E. E. Trans.*, 45 (1926), 708-710.

C. T. WELLER, «Experiences with Grounded-Neutral, Y-Connected Potential Transformers on Ungrounded Systems», *A. I. E. E. Trans.*, 50 (marzo, 1931), 299-316.

A. BOYAJIAN y O. P. McCARTY, «Physical Nature of Neutral Instability», *A. I. E. E. Trans.*, 50 (marzo, 1931), 299-316.

C. W. LA PIERRE, «Theory of Abnormal Line-to-Neutral Transformer Voltages», *A. I. E. E. Trans.*, 50 (marzo, 1931), 328-342.

K. E. GOULD, «Instability in Transformer Banks», *A. I. E. E. Trans.*, 46 (1927), 676-682.

H. S. SHOTT y H. A. PETERSON, «Criteria for Neutral Stability of Transformer Circuits», *A. I. E. E. Trans.*, 60 (noviembre, 1941), 997-1002.

B. G. GATES, «Neutral Inversion in Power Systems», *I. E. E. J.*, 78 (1936), 317-325.

A. BOYAJIAN, «Inversion Currents and Voltages in Auto-Transformers», *A. I. E. E. Trans.*, 49 (abril, 1930), 810-818.

J. L. CANTWELL, «Frequency Tripling Transformers», *A. I. E. E. Trans.*, 55 (Julio, 1936), 784-790.

17. Desequilibrio en Bancos Trifásicos de Transformadores (CAPÍTULO XXIV)

L. F. BLUME, editor, *Transformer Engineering* (New York: John Wiley & Sons, 1938), capítulos vi and vii.

W. V. LYON, *Applications of the Method of Symmetrical Components* (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1937), capítulo v.

C. F. WAGNER y R. D. EVANS, *Symmetrical Components* (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1933), capítulo vi.

O. G. C. DAHL, *Electric Circuits, Theory and Applications*. Vol. I: *Short-Circuit Calculations and Steady-State Theory* (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1928), capítulo iv.

A. N. GARIN, «Zero-phase-sequence Characteristics of Transformers». Part I: «Sequence Impedances of a Static Symmetrical Three-Phase Circuit and of Transformers», *G. E. Rev.*, 43 (Marzo, 1940), 131-136; Part II: «Equivalent Circuits for Transformers», *G. E. Rev.*, 43 (abril, 1940), 174-179.

18. TRANSFORMADORES MULTICIRCUITO (CAPÍTULO XXVII)

L. F. BLUME, editor, *Transformer Engineering* (New York: John Wiley & Sons, 1938), capítulo v.

O. G. C. DAHL, *Electric Circuits, Theory and Applications*. Vol I: *Short-Circuit Calculations and Steady-State Theory* (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1928). En el capítulo ii se estudian los transformadores multicircuitos.

F. M. STARR, «Equivalent Circuits», *A. I. E. E. Trans.*, 51 (junio 1932), 287-298. Trabajo extenso que trata de los circuitos equivalentes de circuitos acoplados inductivamente.

F. M. STARR, «An Equivalent Circuit for the Four-Winding Transformer», *G. E. Rev.*, 36 (marzo 1933), 150-152.

A. BOYAJIAN, «Theory of Three-Circuit Transformers», *A. I. E. E. Trans.*, 43 (1924), 508-528.

A. BOYAJIAN, «Progress in Three-Circuit Theory», *A. I. E. E. Trans.*, 52 (septiembre 1933), 914-917. Trata los bancos trifásicos con interconexiones entre las fases.

A. N. GARIN y K. K. PALUEV, «Transformer Circuit Impedance Calculations», *A. I. E. E. Trans.*, 55 (junio 1936), 717-730. Describe un método general para la determinación de las impedancias en cortocircuito de cualquier montaje de los devanados de los transformadores.

J. E. CLEM, «An Exact Formula for Transformer Regulation», *A. I. E. E. Trans.*, 55 (mayo 1936), 466-471. Da las fórmulas de la regulación de tensión para transformadores de dos y de tres devanados.

R. D. EVANS, «Simplified Computation of Voltage Regulation with Four-Winding Transformers», *E. E.*, 58 (octubre 1939), 420-421.

G. W. BILLS y C. A. MACARTHUR, «Three-Winding Transformer Ring-Bus Characteristics», *A. I. E. E. Trans.*, 61 (diciembre 1942), 848-849. Estudio de una disposición de las barras colectoras para reducir las intensidades de las corrientes de avería y perfeccionar la estabilidad transitoria de un sistema grande de potencia.

D. D. CHASE y A. N. GARIN, «Split Winding Transformers», *A. I. E. E. Trans.*, 53 (junio 1934), 914-922. Estudio de la aplicación y ventajas derivadas del uso de transformadores de devanado dividido para separar las secciones de las barras en los sistemas grandes de potencia.

H. P. ST CLAIR, «The Use of Multiwinding Transformers with Synchronous Condensers for System Voltage Regulation», *A. I. E. E. Trans.*, 59 (1940), 212-217.

19. TRANSFORMACIÓN DE FASES; FUNCIONAMIENTO DE TRANSFORMADORES EN PARALELO (CAPÍTULOS XVIII, XIX)

L. F. BLUME, editor, *Transformer Engineering* (New York: John Wiley & Sons, 1938). En las páginas 219-230 se estudian montajes para la transformación trifásica-bifásica. En las páginas 252-257 se estudian conexiones de autotransformadores para la transformación de fases.

J. B. GIBBS, *Transformer Principles and Practice* (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1937). En el capítulo x se estudia el funcionamiento de transformadores en paralelo y en los capítulos ix y xii la transformación de fases.

M. MACFERRAN, «Parallel Operation of Transformers Whose Ratios of Transformation Are Unequal», *A. I. E. E. Trans.*, 49 (enero, 1930), 125-131.

F. M. STARR, «Operation of Load-Ratio Control Transformers Connected in Parallel in Networks», *A. I. E. E. Trans.*, 60 (1941), 1274-1280.

A. C. SELETZKY, «Load Loci for Transformers in Parallel», *A. I. E. E. Trans.*, 56 (noviembre, 1937), 1379-1384.

F. M. STARR y D. L. BEEMAN, «Load-Balancing Transformers for A-C Secondary Network Systems», *G. E. Rev.*, 43 (Noviembre, 1940), 452-458.

R. C. GHEN y C. F. AVILA, «Balancing Parallel Transformers», *Elec., W.* 116 (1941), 1406-1407.

Índice alfabético

- Aceite para transformadores, 287.
 Acero al cobalto, 37.
 — al silicio, 18.
 Acoplo, coeficiente de, 421, 435.
 ADAMS, J. Q., 37, 95, 664.
 Adaptador super H, 33.
 Admitancia de entrada, 600.
 — del núcleo, 207.
 — de transferencia, 600.
 — tanto por uno de, 365, 366.
 Admitancias, medida de las, 608.
 AGGERS, C. V., 667.
 Aglutinamiento, 39.
 AGNEW, P. G., 125.
 Aislantes, clasificación de los, 234.
 ALBERT, A. L., 453, 458, 596.
 ALBRECHT, H. C., 674.
 ALDRIDGE, A. J., 673.
 Aleaciones Heusler, 15.
 ALGER, P. L., 668.
 Alnico, 37.
 AMPÈRE, 8.
 Ampère-espira, 54.
 Amplificador contrafase, 453.
 Amplitud-frecuencia, característica, 450.
 Analizador de redes, 611.
 Aparato Epstein, 140.
 ARGUMBAU, L. B., 189, 666.
 Armónicos, 169.
 — defasajes entre, 543.
 — quintos, 542.
 — terceros, 541.
 Atomo, 9.
 Autoimpedancia, 421, 432, 599.
 Autoinducción, 423.
 — aparente, 195, 205.
 — incremental, 473.
 Autoinducciones, medida de, 427.
 Autorreacción, 421.
 Autorrefrigeración, 287.
 Autorresistencia, 421.
 Autotransformador, 378, 578.
 — desventajas del, 388.
 — pérdidas de un, 382.
 — rendimiento de un, 382.
 — trifásico, 578, 579.
 — ventajas del, 388.
 Avería de línea a tierra, 570.
 AVILA, C. F., 677.
 BABBITT, B. J., 34, 665.
 BAILEY, F. G., 127, 664.
 BAIROS, C. A., 675.
 BALL, J. D., 126, 190, 666.
 Banco de autotransformadores, 580.
 — estrella-estrella, 511, 528.
 — — triángulo, 549, 550, 556.
 — triángulo-estrella, 513.
 — — triángulo, 528.
 BARBER, I. G., 137.
 Barkhausen, efecto, 14.
 BEAVERS, M. F., 672.
 BEEMAN, D. L., 677.
 BENNET, E. G., 34, 665.
 BEWLEY, L. V., 670, 674.
 BILLS, G. W., 676.
 BITTER, F., 20, 664.
 Blindaje, 297.
 — electrostático, 299.
 BLUME, L. F., 161, 186, 342, 357, 437, 561,
 563, 573, 578, 592, 603, 611, 613, 620,
 637, 654, 668, 670, 671, 674, 675, 676.
 Bobina de inducción, 254, 265, 496.
 — híbrida, 500.
 — repetidora, 265, 498.
 BOLAND, E. J., 674.
 BOLTON, D. J., 671.
 BOYAJIAN, A., 307, 667, 670, 675, 676.
 BOZORTH, R. M., 8, 11, 663.
 BRAILSFORD, F., 127, 664.
 BRENNEMAN, J. L., 86, 665.
 BRIDGMAN, P. W., 667.
 BROOKS, H. B., 667.
 BROWN, R. L., 672.
 BRYANT, J. M., 666, 668.
 BUCHANAN, J. H., 674.
 BUCKINGHAM, E., 667.
 BURNHAM, L. H., 669.
 BUTLER, J. W., 177, 666.
 Calentamiento transitorio, 243.
 Calor, conducción del, 235.
 — transversal del, 236.

Calor, convección del, 240.
 — disipación del, 240, 241.
 — efectos del, 233.
 — radiado, 237.
 CAMILLI, G., 142, 666, 674.
 CAMPBELL, G. A., 253.
 Campo coercitivo, 22, 23.
 — eléctrico en un transformador, 270.
 CANTWELL, J. L., 675.
 Capacidad calorífica específica, 236.
 Capa de pérdida, 108.
 Característica amplitud-frecuencia, 450.
 — de amplitud, 450.
 — de fase, 450, 453, 458, 466, 468.
 — de frecuencia, 449, 453, 458, 466, 468.
 — de tiempo inverso, 296.
 — fase-frecuencia, 450.
 — universal de fase, 463.
 — de frecuencia, 463.
 Características de la excitación en c. a., 181.
 Carga, componente de, 257.
 Cargas monofásicas, 566.
 Carter, coeficiente de, 88.
 — fórmula de, 87.
 CARTER, F. W., 87.
 CASPER, W. L., 673.
 Ciclo de histeresis, 22, 24.
 — asimétrico, 190.
 Circuito abierto, ensayo en, 427.
 — equivalente, 313, 322, 323, 325, 329, 333, 340, 384, 459, 467, 469, 471, 526, 529, 574, 604, 606, 607, 620, 621, 623.
 — fantasma, 265, 499.
 — magnético, 43.
 — simplex, 265, 500.
 — telefónico, 496.
 — triángulo equilibrado, 504.
 Circuitos acoplados, 419.
 — con entrehierros, 64.
 — electrónicos, 253.
 — equivalentes, 187, 437.
 Circulación del calor, 237.
 CLARK, F. M., 667.
 Clasificación de los aislantes, 234.
 CLEM, J. E., 674, 676.
 Coeficiente de acople, 422, 435.
 — de Carter, 88.
 — de dispersión, 86.
 — de emisividad térmica, 238.
 — de fuga, 421, 434.
 Coercitividad, 23.
 COHEN, B. S., 673.
 COLE, H. L., 670.
 Compensador de arranque, 580.
 Componente de carga, 257, 312.
 — de excitación, 257, 312.
 — de pérdida en el núcleo, 175.
 Componentes simétricas, 571.
 CONCORDIA, C., 142, 666.
 Condición cíclica, 22, 23.
 Conducción del calor, 235.
 — transversal del calor, 236.
 Conductancia, 51.
 — de pérdida, 206.
 Conductibilidad calorífica, 235.
 — térmica, 236.
 Conexión de neutros, 508.
 — diametral, 630.
 — en T., 639.
 — en triángulo abierto, 518, 580.
 — — prolongado, 579.
 — en V, 518.
 — en zigzag, 581.
 — estrella, 513, 578.
 — — estrella, 507, 546, 551.
 — — — triángulo, 557.
 — — triángulo, 513, 549.
 — Scott, 638.
 — triángulo, 506, 579.
 — — estrella, 513.
 — — triángulo, 503.
 — trifásica-hexafásica, 628.
 Conexiones trifásicas, 479, 502.
 Constante del polo, 90.
 — de tiempo, 205.
 Convección del calor, 240.
 Corrección de dispersión y pérdidas, 73.
 CORRELL, J. A., 666.
 Corriente de excitación, 156, 179, 269, 383.
 — sinusoidal, 159.
 — magnetizante, 180.
 Corrientes circulantes, 563.
 — de Foucault, 128.
 — — pérdida por, 128.
 — de secuencia cero en los transf. de tres ramas, 591.
 CORSON, A. J., 665.
 Cortacircuito de primario, 297.
 Corto circuito, ensayos en, 431.
 — impedancia en, 431, 433.
 — reactancia en, 433.
 — resistencia en, 433.
 Costos de fabricación, 392.
 — de funcionamiento, 393.
 — de mantenimiento, 406.
 — de un transformador, 392.
 — directos de funcionamiento, 395.
 — — fijos, 393.
 — elementos de los, 392.
 — fijos, 393.
 — indirectos, 405.
 — — fijos, 393.
 CRAWFORD, C. H., 279, 673.
 Cristal, 11.
 — de hierro, 11.
 Cuádruple zigzag, 636.

Curie, punto de, 39.
 Curva de desimación, 97, 98.
 — de imanación de una dinamo, 82.
 — — normal, 23, 25.
 — de primera imanación, 20.
 Curvas de imanación del Fe, 12.
 — del Ni, 12.
 — intrínseca, 56, 57.
 — de pérdida, 143.
 Chapa tipo de campo, 18.
 — de inducido, 18.
 — — dinamo, 20.
 — eléctrico, 19.
 — motor, 19.
 — transformador, 20.
 CHASE, D. D., 676.
 Chlorentol, 289.
 CHUBB, L. W., 666.
 DAHL, O. G. C., 177, 307, 339, 670, 675, 676.
 DANN, W. M., 671.
 DARROW, K. K., 9, 664.
 DAVIS, A. H., 241, 668.
 Decibel, 458.
 Defasajes entre armónicos, 543.
 Demanda, 395.
 — eficaz, 396.
 — — en kVA, 408.
 — máxima, 396.
 DEMERIT, M., 672.
 Desequilibrio en bancos triángulo-triángulo, 563.
 Devanado terciario, 557.
 Devanados, 280.
 Diagrama vectorial, 325, 329, 334, 646, 651.
 — de tensiones, 511, 512, 520.
 Diagramas vectoriales, 321, 323.
 Diamagnetismo, 10.
 Dinamo, 83.
 Dirección de imanación, 11, 12.
 — — difícil, 12.
 — — fácil, 12.
 — — mediana, 12.
 Disipación del calor, 240, 241.
 Dispositivos electrónicos, 251.
 Doble estrella hexafásica, 632.
 — triángulo hexafásico, 632.
 — zigzag, 635.
 DOHERTY, R. E., 666.
 Dominios, 9.
 DWIGHT, H. B., 670.
 Economía del aparato, 521.
 Ecuaciones de tensiones, 304.
 EDGAR, R. F., 666.
 Efecto Barkhausen, 14.
 — cortical, 129, 153.
 — de proximidad, 153.
 — pelicular, 129.
 Efectos del calor, 233.
 — del núcleo, 314.
 Electrón giratorio, 9.
 ELMEN, G. W., 35, 279, 664.
 ELMORE, W. C., 12.
 EMDE, F., 667.
 Emisión, ley de la, 237.
 Emisividad térmica, 237.
 Energía del campo magnético, 110.
 Ensayos en circuito abierto, 337, 427.
 — en corto circuito, 338, 431.
 Entrehierro, 177, 220.
 — recta negativa del, 70.
 — circuitos con, 64.
 — cortos, 67.
 — largos, 79.
 Envejecimiento artificial, 40.
 — magnético, 39.
 Epstein, aparato de, 140.
 Equipo de medida, 481.
 Estabilización de imanes, 108.
 Estrella hexafásica, 629, 631.
 EVANS, R. D., 561, 675, 676.
 EVERSHED, S., 96, 665.
 Excitación, componente de, 257.
 — corriente de, 156, 179, 269, 383.
 — de transformadores trifásicos, 589.
 — en corriente alterna, características de la 181.
 Factor de apilamiento, 58.
 — de calidad de devanado, 217, 219, 220.
 — — del núcleo, 217, 220.
 — de carga, 396.
 — de forma, 142.
 — de potencia aparente, 205.
 — de utilización, 521.
 FARADAY, 445.
 Fase, característica de, 466, 468.
 FAYE-HANSEN, K., 668.
 FENWICK, J. O., 669.
 FERGUSON, F. H., 672.
 Ferromagnetismo, 11.
 Ferromagnéticos, materiales, 7.
 FIELD, R. F., 189, 666.
 FINK, D. G., 449.
 Flujo de fuga, 301, 304, 305.
 — de pérdidas, 66.
 — disperso, 66.
 — magnético, 42.
 — mutuo, 303, 305.
 — pérdida de, 45.
 — sinusoidal, 161, 163.
 — — imanación para, 182.

Flujo sinusoidal, pérdida en el núcleo para, 183.
 — — VAR para, 184.
 — útil, 86.
 Flujos componentes, 308, 310.
 FOSTER, D. E., 665.
 Fourier, series de, 167.
 FOWLE, E., 224.
 FRANKLIN, Ph., 666.
 Frecuencia, características de, 449, 466, 468.
 — resonante, 472.
 — respuesta a la, 449.
 FREEMAN, R. C., 668.
 Fuerza atractiva magnética, 114.
 — electromotriz, 46.
 — magnetomotriz, 47, 51.
 Fuga, coeficiente de, 421, 434.
 — inductancia de, 436.
 Fugas magnéticas, 300.
 — — en un transformador, 268.
 — — en vacío, 300.
 Funcionamiento de emergencia de bancos de transformadores, 521.
 — en paralelo de transformadores, 644.
 Función impar, 168.
 — par, 168.
 Fusibles para transformadores, 296.

GANZ, A. G., 279, 669, 673.
 GARIN, A. N., 675, 676.
 Gastos, 391.
 GATES, B. G., 675.
 GAUSS, 55.
 GIBSON, C. O., 673.
 GIBBS, J. B., 637, 661, 668, 672, 676.
 Gilbert, 55.
 GIVEN, F. J., 35, 664.
 GLAZEBROOK, R., 667.
 GOSS, J. H., 110, 664.
 GOULD, K. E., 675.
 Gradiente de temperatura, 235.
 GRIFFITHS, E., 241, 668.
 GROVER, F. W., 437.
 Grupos trifásicos en paralelo, funcionamiento de, 652.
 GUILLEMIN, E. A., 171, 672.

HAGENGUTH, J. H., 670.
 HAGUE, B., 428, 479, 670, 673.
 HANNA, C. R., 667.
 Hay, puente de, 428.
 HEAVISIDE, 253.
 HELLMUND, R. E., 668.
 Heusler, aleaciones, 15.
 Hidrógeno, molécula de, 9.
 HILDEBRAND, L. F., 668.
 HILL, C. F., 667.

HILL, L. H., 674.
 Histeresis, 22.
 — ciclo de, 22, 24.
 — pérdida por, 22.
 HITCHCOCK, R. C., 673.
 HOBSON, J. E., 674.
 HODNETTE, J. K., 277, 669.
 HODTUM, J. B., 407, 672.
 HORSTMAN, C. C., 277, 669.
 HOTTEL, H. C., 667.
 HOWE, G. H., 39.
 HUNTER, E. M., 669.

Inanación, curvas de, 12.
 — difícil, dirección de, 12.
 — fácil, dirección de, 12.
 — intrínseca, curvas de, 56, 57.
 — mediana, dirección de, 12.
 — modos de, 14, 15.
 — normal, curva de, 23, 25.
 — para flujo sinusoidal, 182.
 — regiones de, 14.
 Imanes permanentes, 95, 96.
 Impedancia aparente, 205.
 — — de la carga, 453.
 — de fuga, 326.
 — del núcleo, 207.
 — en corto circuito, 431, 433.
 — equivalente, 333, 334.
 — mutua, 432.
 — tanto por ciento de, 365, 366.
 Inducción residual, 22.
 — magnética intrínseca, 23.
 Inducciones mutuas, medida de, 429.
 Inductancia de fuga, 311, 436.
 — incremental, medida de la, 428.
 — mutua, 423.
 — — referida, 436.
 Inerteen, 289.
 INGEBRETSEN, R. E., 463.
 Inmersión en aceite, 287.
 Intensidad, tanto por ciento de la, 364.
 — tanto por uno de la, 364.
 — valor de base de la, 364.
 — — normal de la, 364.
 Interferencia inductiva, 547.

JACKSON, L. R., 39, 664.
 JAMES, W. G., 266, 669.
 JOHNSON, E. W., 666, 668.
 JOHNSON, K. S., 672.
 JOHNSON, T. C., 668.
 JONAS, B., 664.

KAPP, G., 670.
 KELLER, E. G., 666.
 KELLEY, L. A., 673.

KERCHNER, R. M., 86, 665.
 KETTNER, A. E., 665.
 KIMBALL, G. S., 675.
 KLINKHAMER, H. A. W., 667.
 KLIPSCH, P. W., 673.
 KLOEFFLER, R. G., 86, 665.
 KNAAK, W., 671.
 KNOPP, O. A., 674.
 KOEHLER, G., 673.
 KUHLMANN, J. H., 669.

LACEY, H. M., 668.
 LACOUR, J. L., 668.
 LAIRD, A. G., 279, 669, 673.
 LAXDIS, G. H., 492, 674.
 LANGSDORF, A. S., 86, 665, 668.
 LA PIERRE, C. W., 675.
 LAWRENCE, R. R., 423, 490, 628, 666, 668, 675.
 LEGG, V. E., 26, 35, 664.
 LENARD, S., 672.
 LENNOX, T. C., 675.
 Lenz, 54.
 LEWIS, C. H., 405, 672.
 LEWIS, W. A., 674.
 Ley de Stefan, 237.
 LOEB, L. B., 9, 663.
 LYMAN, W. J., 674.
 LYON, W. V., 561, 675.

LLOYD, T. C., 668.

MACARTHUR, C. A., 676.
 MACFERRAN, M., 676.
 Magnetismo remanente, 20, 22, 23.
 — teoría del, 8.
 Magnetostricción, 16.
 MALOFF, I. G., 666.
 Maquinaria eléctrica, 249.
 Máquinas giratorias, refrigeración de, 242.
 Marcas normalizadas, 660.
 — para terminales, 660.
 MASSA, F., 665.
 Materiales, ferromagnéticos, 7.
 — magnéticos, características de los, 20.
 — — curvas de imanación de los, 20.
 — — propiedades de los, 17.
 MAUNDER, S. T., 669.
 MCCARTY, O. P., 675.
 MCEACHRON, K. B., 307, 670.
 MCELROY, P. K., 666.
 Medida de autoinducciones, 427.
 — de inducciones mutuas, 429.
 — de la inductancia incremental, 428.
 — de las admitancias, 608.
 — de los parámetros de un transformador, 425.

Medida, equipo de, 481.
 MEERKAMP VAN EMBDEN, H. J., 664.
 MEYER, F., 669.
 MINER, D. F., 669.
 MINTON, J., 666.
 Modelos, teoría de, 204, 224.
 Momento cinético, 9.
 — magnético, 9.
 MONTSINGER, V. M., 234, 671.
 MOORE, A. D., 239, 241, 667, 668.
 MORGAN, T. H., 675.
 MORRIS, A. L., 670.

NARUTOVSKIY, P., 671.
 Neutro de los primarios, 508.
 — primario aislado, 511.
 NEWLON, A. E., 665.
 NICHOLS, L. C., 671.
 NORTH, J. R., 674.
 Núcleo de hierro, 314.
 — de transformador, 274.
 — giratorio, 9.

Oersted, 55.
 Orthohidrógeno, 9.
 OSBON, W. O., 673.
 Oscilógrafo, 80.

PAGE, J. C., 669.
 PAKALA, W. E., 667.
 PALME, A., 674.
 PALUEFF, K. K., 670.
 PALUEV, K. K., 275, 669, 676.
 Parahidrógeno, 9.
 Paramagnetismo, 10.
 Pararrayos, 291.
 PARTRIDGE, N., 666.
 Pasatapas, 290.
 Pérdida anual de energía, 398, 399.
 — — en el cobre, 398.
 — capa de, 108.
 — de flujo, 45.
 — en el cobre, 395.
 — en el metal, 121.
 — en el núcleo, 206, 357, 358.
 — — medida de la, 140.
 — — para flujo sinusoidal, 183.
 — — reducción de la, 137.
 — en la carga, 357, 358, 359, 395.
 — momentánea en el cobre, 398.
 — por cargas parásitas, 153.
 — por corrientes de Foucault, 121, 128.
 — por histeresis, 22, 121, 123.
 — — alterna, 126.
 — — rotatoria, 127.
 — total en el núcleo, 121, 134.
 Pérdidas de un autotransformador, 382.
 — de un transformador, 268.

Pérdidas, razón de, 216.
 Permeabilidad del vacío, 54.
 — equivalente, 191.
 — estática, 23.
 — incremental, 191, 192.
 Permeámetro Fahy simplex, 30, 31.
 — Sanford-Bennett, 34.
 Permeancia, 51.
 PETERS, J. F., 669, 673.
 PETERSON, E., 159, 426, 666.
 PETERSON, H. A., 675.
 PÍ CALLEJA, P., 167, 449.
 Polaridad aditiva, 661.
 — externa, 661.
 — interna de los devanados, 661.
 — sustractiva, 661.
 Policristales, 13.
 POPE, E. B., 177, 666.
 Potencia, instantánea, 170, 172, 173.
 — media, 172, 173.
 — mitad, puntos de, 464.
 — reactiva, 215.
 — sistemas de, 251.
 — tanto por uno de, 366.
 Potencial magnético, 48, 51.
 Potencias nominales, 657, 658, 659.
 Primario, 254.
 Primarios en estrella, 546.
 — en triángulo, 540.
 Primera imanación, curva de, 20.
 PRINCE, D. C., 667.
 Producto de pérdida, 407, 411.
 Protección de los transformadores, 291.
 Protón giratorio, 9.
 Pruebas magnéticas, 30.
 PUCHSTEIN, A. F., 668.
 Puente de Hay, 428.
 Punto de Curie, 39.
 Puntos de potencia mitad, 464.
 PUPIN, M. I., 253.
 Push-puff, 433.
 PUTMAN, H. V., 669, 670, 671.
 Pyranol, 289.

Q de una bobina, 205, 212.
 Quintos armónicos, 542.

RADER, R., 672.
 Radiación del calor, 237.
 — térmica, ley fundamental de la, 237.
 RANDALL, W. F., 35, 664.
 Razón de pérdida, 216, 407.
 — de potencias, 452.
 — de transformación, 324.
 Reactancia aparente, 205, 209.
 — de fuga, 334.
 — en corto circuito, 433.

Reactancia en corto circuito ideal, 434.
 — equivalente, 334.
 — mutua, 421, 599.
 — referida, 328.
 Recta negativa del entrehierro, 70.
 — — — modificada, 70, 71.
 Red cristalina, 11.
 — cúbica centrada, 11.
 — — — de caras contradas, 11.
 Reducción de la pérdida en el núcleo, 137.
 REED, E. G., 668, 669, 672.
 Refrigeración, 285.
 — de aparatos, 241.
 — de máquinas giratorias, 242.
 — de transformadores, 242, 268.
 — por aceite forzado, 287.
 — por agua, 287.
 — por aire, 285.
 — forzado, 287.
 — por corriente de aire, 285.
 Regulación, 367.
 — de tensión, 352, 353.
 Regulador por etapas, 487.
 — por inducción, 489.
 Reluctancia, 50.
 Reluctividad, 24.
 Remanencia, 20.
 Rendimiento, 356.
 — convencional, 358.
 — de un autotransformador, 382.
 — energético, 362.
 Repetidor de dos hilos, 501.
 Resistencia aparente, 151, 205.
 — efectiva en c. a., 151.
 — en corto circuito, 433.
 — equivalente, 334.
 — referida, 328.
 Resistencias adaptadas, 451.
 Resistividad térmica, 236.
 — transversal, 236.
 Resonancia, 472.
 Respuesta a la frecuencia, 449.
 Retentividad, 23.
 REY PASTOR, J., 167, 449.
 RICHTER, R., 668.
 ROGOWSKI, W., 670, 671.
 ROSA, E. B., 437.
 ROTERS, H. C., 68, 665.
 ROTH, E., 671.
 RÜDENBERG, R., 670.
 RUDER, W. E., 665.
 RUSSELL, H. W., 39, 664.

SANFORD, R. L., 31, 34, 665.
 SCOTT, F. C., 638.
 SCOTT, J. A., 667.
 SCHWAGER, A. C., 673, 674.
 Secundario, 254.

Secundarios en cruz, 634.
 SELETZKY, A. C., 677.
 Semejanza eléctrica, 204.
 Series de Fourier, 167.
 SHACKELTON, W. J., 137.
 SHOCKLEY, W., 10, 664.
 SHOTT, H. S., 675.
 SIMONS, K., 670.
 Simplex, 500.
 SINKS, A. T., 674.
 Sistema antiautopercepción, 497.
 — hexafásico, 628.
 Sistemas de potencia, 251.
 SLOAT, T. K., 671.
 SMITH, B. M., 103, 142, 665, 666.
 SMITH, J. J., 667.
 SNYDER, E. H., 405, 672.
 SPOONER, T., 20, 157, 665, 666.
 SPORN, P., 669.
 STARR, F. M., 604, 611, 676, 677.
 ST. CLAIR, H. P., 596, 676.
 STEINMETZ, C. P., 125.
 STEPHENS, H. O., 670.
 STIGANT, S. A., 668.
 STORY, J. G., 673.
 SUMNER, W. A., 407, 672.
 Susceptancia magnetizante, 206.
 SZUNG, L. S., 670.

Tanques, 289.
 Tanto por ciento de impedancia, 365, 366.
 — — — de la intensidad, 364.
 — — — de la tensión, 364.
 — por uno de admitancia, 365, 366.
 — — — de impedancia, 365, 366.
 — — — de la intensidad, 364.
 — — — de potencia, 366.
 Temperatura, gradiente de, 235.
 TEN BROECK, R. L., 674.
 Tensión de impedancia, 338.
 — — — a plena carga, 338.
 — nominal del circuito, 657, 658, 659.
 — tanto por ciento de la, 364.
 — valor de base de la, 364.
 — normal de la, 364.
 Tensiones hexafásicas, 628.
 — referidas, 328.
 Teoría del magnetismo, 8.
 — de modelos, 204, 224.
 Terceros armónicos, 541.
 Terciario, 557.
 FERMAN, F. E., 428, 463, 672, 673.
 Terminales, marcas para, 660.
 Tesla, 54.
 THOMAS, E. J., 279, 673.
 THOMPSON, B. H., 667.
 TIMBIE, W. H., 173.
 Transformador aislador de bucles, 484.
 — campo eléctrico en un, 270.

Transformación de fases, 628, 634.
 — de tres a dos fases, 636.
 Transformador con cambio de tomas, 485.
 — con núcleo de aire, 254.
 — — — de hierro, 254.
 — costos de fabricación de un, 392.
 — de acoplo interetapa, 263.
 — de audiofrecuencia, 263.
 — de distribución, 265, 266.
 — de entrada, 263, 450, 466, 468.
 — de frecuencias intermedias, 263.
 — de intensidad, 267, 476, 477.
 — — — constante, 266, 481.
 — de potencia, 266.
 — de potencial, 267, 476.
 — de puesta a tierra, 555.
 — de radiofrecuencia, 263.
 — de razón ajustable, 485.
 — de salida, 264, 450, 453.
 — de tres circuitos, 615, 616, 621, 622.
 — — — devanados, 500.
 — ecuaciones del 561.
 — equivalente 325.
 — excitador, 638.
 — fugas magnéticas en un, 268.
 — ideal, 257.
 — interetapa, 450, 466, 468.
 — medida de los parámetros de un, 425.
 — modulador, 264.
 — multicircuito, 596, 614.
 — — — teoría general del, 597.
 — para filamentos, 264.
 — para instrumentos, 267, 476.
 — pérdidas de un, 268.
 — principal, 638.
 — refrigeración del, 268, 285.
 — regulador de tensión, 267, 487.
 — teoría elemental del, 254.
 — tipo acorazado, 274.
 — — — distribuido, 274, 284.
 — — — de núcleo, 274, 284.
 — trifásico, 585.
 — — — de tres ramas, 587.
 — — — en triángulo abierto, 592.
 — — — excitación del, 587.
 — — — inconvenientes del, 594.
 — — — tipo acorazado, 585.
 — — — — — de núcleo, 587.
 — — — — — ventajas del 594.
 Transformadores autorrefrigerados, 242.
 — de puesta a tierra, 583.
 — en paralelo, 644.
 — refrigeración de, 242.
 TREANOR, E. D., 277, 669.
 TREJO, C. A., 167, 449.
 Triángulo abierto, conexión en, 580.
 — de terciarios, 557.
 — prolongado, conexión en, 579.

Unidades electromagnéticas, 54.	WAGNER, C. F., 561, 675.
— Giorgi, 54.	WEBB, C. E., 26.
URK, A. TH. VAN, 101.	WELCH, A. V., 668.
	WELLER, C. T., 675.
	WENTZ, E. C., 674.
Valor de base de la intensidad, 364.	WEST, H. B., 674.
— — de la tensión, 364.	WEST, W., 673.
— normal de la intensidad, 364.	WHEELER, H. A., 666.
— — de la tensión, 364.	WIEGAND, D. E., 669.
Valores eficaces, 173.	WIGGINS, A. M., 674.
— momentáneos, 395.	WILLIAMS, P. W., 673.
— nominales, 370, 380, 657, 658, 659.	WINFREY, R., 394, 672.
— referidos, 603.	WOOD JR, J. A., 175.
VAR para flujo sinusoidal, 184.	WOODRUFF, L. F., 129.
VOGEL, F. J., 266, 669, 671.	
Voltímetro de flujo, 142.	ZIGZAG, conexión en, 581.

Indice general

Páginas

PRÓPOSITO	1
PREFACIO.	3

PARTE I. CIRCUITOS MAGNÉTICOS

CAPÍTULO I

PROPIEDADES DE LOS MATERIALES FERROMAGNÉTICOS	7
1. Importancia de los materiales ferromagnéticos.	7
2. Teoría del magnetismo.	8
2a. Electrones y núcleos.	9
2b. El átomo.	9
2c. El dominio	11
2d. El cristal.	11
2e. Sustancias policristalinas.	13
3. Propiedades generales de los materiales magnéticos.	17
4. Características y curvas de imanación de los materiales magnéticos . .	20
5. Pruebas magnéticas.	30
6. Utilización técnica de los materiales ferromagnéticos.	35
Problemas.	40

CAPÍTULO II

CONCEPTO DE CIRCUITO MAGNÉTICO.	41
1. Problema general.	41
2. Analogías entre circuitos eléctricos y magnéticos.	44

CAPÍTULO III

PRINCIPIOS DE LOS CÁLCULOS DE CIRCUITOS MAGNÉTICOS	54
1. Unidades para cálculos magnéticos.	54
2. Cálculos para caminos magnéticos contenidos totalmente en el hierro. .	55
3. Ejemplo de cálculo de estructura magnética de sección recta y material uniformes.	59
4. Ejemplos de cálculo de estructura magnética de material uniforme y sección no uniforme.	60
5. Circuitos magnéticos con entrehierros	64
6. Flujos disperso y de pérdidas.	66

7. Métodos de cálculo de entrehierros cortos.	67
8. Ejemplo de cálculo para un circuito ferromagnético sencillo con entrehierro corto.	73
9. Ejemplos de cálculos para caminos serie-paralelo de material ferromagnético y entrehierros cortos.	77
10. Cálculos para entrehierros largos y para caminos del flujo de pérdidas.	79
11. Ejemplo de cálculo del flujo de pérdidas del circuito magnético de un oscilógrafo.	80
12. Cálculo de la curva de imanación de una dinamo	82
Problemas.	91

CAPÍTULO IV

IMANES PERMANENTES Y ENERGÍA DEL CAMPO MAGNÉTICO.	95
1. Circuitos magnéticos que contienen imanes permanentes.	96
2. Diseño para emplear la mínima cantidad de material magnético	99
3. Dispersión y pérdida.	101
4. Estabilización de imanes permanentes.	108
5. Energía del campo magnético	110
6. Fuerza atractiva magnética.	114
Problemas.	118

CAPÍTULO V

PÉRDIDAS EN NÚCLEOS MAGNÉTICOS QUE CONTENGAN FLUJOS VARIABLES CON EL TIEMPO.	121
1. Pérdida por histéresis.	121
2. Corrientes de Foucault y efecto cortical.	128
3. Pérdida total en el núcleo.	134
4. Reducción de la pérdida total en el núcleo; consideraciones de diseño	137
5. Medida de la pérdida total en el núcleo.	140
6. Curvas de pérdida experimentales, coeficientes experimentales.	143
7. Separación de las pérdidas por histéresis y por corrientes de Foucault.	146
Problemas.	149

CAPÍTULO VI

CARACTERÍSTICAS DE EXCITACIÓN POR CORRIENTE ALTERNA DE LAS BOBINAS CON NÚCLEO DE HIERRO Y DE LOS TRANSFORMADORES.	151
1. Propiedades generales de las bobinas con núcleo de hierro.	151
2. Núcleos de hierro en los transformadores.	152
3. Hipótesis.	153
3a. Capacidad.	153
3b. Resistencia.	153
4. Relaciones entre la tensión inducida, el flujo y la intensidad de la corriente.	154

5. Tensión alterna aplicada.	155
6. Corriente de excitación sinusoidal.	159
7. Tensión inducida por un flujo sinusoidal.	161
8. Forma de onda de la corriente de excitación para flujo sinusoidal	163
9. Propiedades generales de las series de Fourier.	167
9a. Término constante.	168
9b. Funciones pares e impares.	168
9c. Armónicos pares e impares.	169
9d. Potencia.	170
9e. Valores eficaces.	173
10. Análisis de Fourier de la corriente de excitación para flujo sinusoidal.	174
10a. Efecto de un entrehierro	177
11. Representación vectorial de la corriente de excitación.	179
12. Características de la excitación en corriente alterna.	181
12a. Ejemplo de diseño de una bobina con núcleo de hierro	186
13. Circuitos equivalentes.	187
14. Características del hierro sometido a un campo magnético alterno superpuesto a otro continuo.	190
15. Bobinas con núcleo de hierro con excitaciones continua y alterna superpuestas.	194
15a. Ejemplo de cálculo de una autoinducción aparente	195
Problemas.	199

CAPÍTULO VII

TEORÍA DE MODELOS Y DISEÑOS DE BOBINAS CON NÚCLEO DE HIERRO.	204
1. Relaciones generales.	204
2. Efectos de los cambios en el devanado.	208
3. Efecto de los cambios en las dimensiones lineales.	210
4. Consideraciones energéticas.	213
5. Efectos de un entrehierro.	220
5a. Reducción de los efectos no lineales por medio de un entrehierro.	220
5b. Efectos de un entrehierro sobre el factor de calidad.	222
6. Teoría de modelos aplicada a redes.	224
6a. Relaciones entre las variables.	225
6b. Relaciones entre los parámetros lineales correspondientes.	226
6c. Relaciones entre las bobinas prototipo y derivada.	227
Problemas.	230

CAPÍTULO VIII

PROPIEDADES TÉRMICAS Y CIRCULACIÓN DEL CALOR.	233
1. Efectos del calor sobre los materiales.	233
2. Conducción del calor.	235
3. Radiación del calor.	237

	Páginas
4. Convección del calor.	240
5. Refrigeración de los aparatos eléctricos	241
5a. Transformadores.	242
5b. Máquinas giratorias.	242
6. Calentamiento transitorio.	243

PARTE II. TRANSFORMADORES

CAPÍTULO IX

CONSIDERACIONES GENERALES DE DISEÑO Y COSTO.	249
1. Maquinaria eléctrica.	249
2. Sistemas de potencia.	251
3. Dispositivos electrónicos.	251
4. Circuitos electrónicos y de otros tipos.	253

CAPÍTULO X

TRANSFORMADORES: PRINCIPIOS GENERALES.	254
1. Teoría elemental del transformador.	254
2. Transformador ideal.	257
3. Usos de los transformadores.	260
4. Evolución de los transformadores.	267
5. Problemas de los transformadores	268
5a. Pérdidas.	268
5b. Refrigeración.	268
5c. Fugas magnéticas.	268
5d. Corriente de excitación.	269
5e. Campo eléctrico.	270
5f. Problemas de fabricación.	270
5g. Otras consideraciones.	270
Problemas.	270

CAPÍTULO XI

CARACTERÍSTICAS FÍSICAS DE LOS TRANSFORMADORES.	274
1. Núcleos.	274
2. Devanados.	280
3. Refrigeración y aislamiento.	285
3a. Refrigeración por aire	285
3b. Refrigeración por corriente de aire.	285
3c. Aceite para transformadores.	287
3d. Inmersión en aceite, autorrefrigeración.	287
3e. Inmersión en aceite, refrigeración por aire forzado.	287
3f. Inmersión en aceite, refrigeración por agua.	287
3g. Refrigeración por aceite forzado.	287
3h. Pyranol, Inerteen o Chlorextol	289

4. Tanques.	289
5. Pasatapas.	290
6. Dispositivos de protección.	291
7. Blindaje.	297

CAPÍTULO XII

FUGAS MAGNÉTICAS EN LOS TRANSFORMADORES.	300
1. Fugas magnéticas en vacío.	300
2. Ecuaciones de tensiones y distribución de flujo bajo carga.	304
2a. Flujos componentes.	305
2b. Distribución resultante del flujo.	306
3. Inductancias de fuga.	310
4. Componentes de excitación y de carga de la corriente del primario.	312
5. Circuito equivalente.	313
6. Efectos del núcleo de hierro y aproximaciones simplificadoras.	314
Problemas.	315

CAPÍTULO XIII

INDUCTANCIAS DE FUGA	318
1. Diagramas vectoriales y un circuito equivalente	318
2. Transformador con igual número de espiras en primario y en secundario.	323
3. Razón de transformación.	324
4. Transformador equivalente de razón uno es a uno.	325
5. Ejemplo ilustrativo de las relaciones vectoriales «exactas».	330
6. Circuitos equivalentes simplificados; impedancia equivalente	333
7. Ejemplo ilustrativo de las relaciones vectoriales simplificadas.	335
8. Determinación de los parámetros mediante ensayos.	337
8a. Ensayos en circuito abierto.	337
8b. Ensayos en corto circuito.	338
8c. Circuito equivalente «exacto» determinado a partir de ensayos.	340
9. Determinación de los parámetros a partir de las dimensiones	341
Problemas.	346

CAPÍTULO XIV

REGULACIÓN DE TENSIÓN, RENDIMIENTO Y VALORES NOMINALES	352
1. Regulación de tensión.	352
2. Rendimiento.	356
2a. Pérdida en el núcleo.	357
2b. Pérdida en la carga.	357
3. Rendimiento convencional.	358
3a. Pérdida en el núcleo.	358
3b. Pérdida en la carga.	359

4. Ejemplo de cálculo de la regulación y del rendimiento	361
5. Rendimiento energético; ejemplo	362
6. Tantos por ciento y por uno	364
7. Ejemplo ilustrativo del sistema de tantos por uno	368
8. Valores nominales de los transformadores de potencia y de distribución. Problemas.	370 374

CAPÍTULO XV

AUTOTRANSFORMADORES.	378
1. Relaciones de tensiones y corrientes.	378
2. Valores nominales.	380
3. Pérdidas y rendimiento.	382
4. Corriente de excitación.	383
5. Circuitos equivalentes y fenómenos de impedancia.	384
6. Conclusiones.	388
Problemas.	388

CAPÍTULO XVI

ECONOMÍA EN LAS APLICACIONES DE LOS TRANSFORMADORES DE SISTEMAS DE POTENCIA.	391
1. Elementos de los costos de transformadores.	392
2. Costos directos fijos.	393
3. Costos directos de funcionamiento.	395
4. Ejemplo: Comparación de transformadores usados y nuevos.	400
5. Costos indirectos.	405
6. Costos de mantenimiento.	406
7. Determinación de la razón de pérdida más económica.	407
8. Determinación del producto de pérdida más económico.	411
9. Resumen del estudio del costo de un transformador.	413
Problemas.	414

CAPÍTULO XVII

AUTOINDUCCIONES E INDUCCIONES MUTUAS.	417
1. Ecuaciones para circuitos acoplados.	419
2. Coeficiente de acoplo y coeficiente de fuga.	422
3. Medida de los parámetros.	425
3a. Medida de autoinducciones.	427
3b. Medida de inducciones mutuas.	429
3c. Ensayos en corto circuito.	431
3d. Conclusiones referentes a las medidas de los parámetros.	435
4. Inductancia de fuga.	436
5. Circuitos equivalentes para transformadores de dos devanados.	437
6. Resumen.	445
Problemas.	445

CAPÍTULO XVIII

CARACTERÍSTICAS DE FRECUENCIA.	449
1. Relaciones de potencia.	450
2. Características de frecuencia y fase de los transformadores de salida.	453
3. Características de frecuencia y fase de los transformadores de entrada e interetapa.	466
Problemas.	474

CAPÍTULO XIX

APLICACIONES DE LOS TRANSFORMADORES EN SISTEMAS DE POTENCIA.	476
1. Transformadores para instrumentos.	476
1a. Transformador de potencia.	476
1b. Transformador de intensidad.	477
1c. Conexiones trifásicas.	479
2. Transformador de intensidad constante.	481
3. Transformador de razón ajustable o con cambio de tomas.	485
4. Transformadores reguladores de tensión.	487
4a. Regulador por etapas.	487
4b. Regulador por inducción.	489
Problemas.	492

CAPÍTULO XX

APLICACIÓN DE LOS TRANSFORMADORES EN SISTEMAS TELEFÓNICOS.	496
1. Bobina de inducción.	496
2. Bobina repetidora.	498
3. Bobina híbrida o transformadora de tres devanados.	500

CAPÍTULO XXI

CONEXIONES TRIFÁSICAS; CONSIDERACIONES GENERALES.	502
1. Conexión triángulo-triángulo.	503
1a. Relaciones de tensiones y corrientes en circuitos triángulo equilibrados.	504
1b. Resumen; conexión triángulo.	506
2. Conexión estrella-estrella.	507
2a. Neutro de los primarios conectados al neutro del generador.	508
2b. Neutro primario aislado.	511
2c. Resumen; conexión estrella.	513
3. Comparación de las conexiones estrella y triángulo.	513
4. Conexiones triángulo-estrella y estrella-triángulo	515
5. Conexión en V o triángulo abierto.	518
6. Funcionamiento de emergencia de bancos triángulo-estrella y estrella-triángulo.	521
Problemas.	522

CAPÍTULO XXII

Páginas

EFFECTOS DE LAS IMPEDANCIAS DE LOS TRANSFORMADORES EN LOS CIRCUITOS TRIFÁSICOS.	526
1. Circuitos equivalentes.	526
2. Circuitos equivalentes monofásicos para condiciones de equilibrio.	529
2a. Ejemplo de circuito equilibrado.	531
2b. Ejemplo resuelto con cantidades expresadas en tanto por uno.	534
Problemas.	537

CAPÍTULO XXIII

FENÓMENOS DE ARMÓNICOS EN LOS CIRCUITOS TRIFÁSICOS.	540
1. Primarios conectados en triángulo.	540
1a. Terceros armónicos.	541
1b. Quintos armónicos.	542
1c. Resumen de los defasajes entre armónicos.	543
1d. Intensidades eficaces de las corrientes en el triángulo y en la línea.	544
1e. Conexiones triángulo-estrella y triángulo-triángulo.	545
2. Primarios conectados en estrella.	546
2a. Conexión estrella-estrella: neutro de primarios conectado al neutro del generador.	546
2b. Interferencia inductiva ocasionada por el tercer armónico de las corrientes de excitación.	547
2c. Conexión estrella-triángulo.	549
2d. Conexión estrella-estrella con neutros aislados.	551
3. Igualación de las tensiones de los neutros en los bancos estrella-estrella.	555
3a. Transformadores de puesta a tierra en estrella-triángulo.	555
3b. Conexión estrella-estrella-triángulo.	557
4. Resumen de los fenómenos debidos a los armónicos.	558
Problemas.	559

CAPÍTULO XXIV

BANCOS TRIFÁSICOS DE TRANSFORMADORES DESEQUILIBRADOS.	561
1. Condiciones de desequilibrio en bancos triángulo-triángulo.	563
1a. Corrientes circulantes en bancos triángulo-triángulo, debidas a razones de transformación desiguales.	563
1b. Ecuaciones generales para bancos triángulo-triángulo; razones de transformación iguales.	563
2. Corrientes monofásicas en bancos trifásicos.	566
3. Avería de línea a tierra en el lado de primarios de un banco estrella-triángulo con neutro a tierra.	570
4. Análisis de componentes simétricas.	571
Problemas.	575

CAPÍTULO XXV

Páginas

CONEXIONES TRIFÁSICAS DE AUTOTRANSFORMADORES.	578
1. Conexión en estrella de autotransformadores.	578
2. Conexión en triángulo de autotransformadores.	579
3. Conexión de autotransformadores en triángulo abierto.	580
3a. Compensadores de arranque.	580
4. Conexión en zigzag.	581
4a. Transformadores de puesta a tierra conectados en zigzag.	583
Problemas.	583

CAPÍTULO XXVI

TRANSFORMADORES TRIFÁSICOS.	585
1. Tipo acorazado.	585
2. Tipo de núcleo con tres ramas.	587
2a. Fenómenos de excitación en los transformadores trifásicos del tipo de núcleo de tres ramas conectados en estrella-estrella.	589
2b. Corrientes de secuencia cero en los transformadores del tipo de núcleo de tres ramas.	591
3. Conexión en triángulo abierto de transformadores trifásicos.	592
4. Comparación de los transformadores trifásicos y monofásicos.	592
Problemas.	594

CAPÍTULO XXVII

TRANSFORMADORES MULTICIRCUITO.	596
1. Teoría general de los transformadores multicircuito.	597
1a. Ecuaciones para las tensiones en las mallas.	598
1b. Admitancias de entrada y de transferencia en corto circuito.	600
1c. Ecuaciones para las corrientes en los nudos.	601
1d. Comparación de las ecuaciones para las mallas y para los nudos.	602
1e. Intensidades, tensiones y parámetros del circuito referidos a una base común.	603
2. Circuitos equivalentes.	604
2a. Circuito equivalente para corriente de excitación despreciable.	606
2b. Relaciones entre el circuito equivalente y las ecuaciones intensidad-tensión.	607
3. Medida de las admitancias.	608
3a. Relaciones de las admitancias con la teoría del transformador de dos circuitos.	612